Збірник праць Інституту математики НАН України 2015, т. 12, № 5, 46–50

УДК 517.53

Про збіжність апроксимант Паде q–аналога експоненти

А. П. Голуб, Н. М. Гаврилюк

Інститут математики НАН України, Київ;
golub@imath.kiev.ua, nataliyagavrylyuk@gmail.com

Convergence is proved and asymptotic is found for the Padé approximant of the q–exponential function and its generalisation.

Доказана сходимость и найдена асимптотика аппроксимаций Паде q–аналога экспоненты и его обобщения.

В [1] з використанням методу узагальнених моментних зображень побудовано апроксиманти Паде q–аналога експоненти (див. [2])

$$E_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n} z^n = (-z;q)_\infty, \ |q| < 1,$$

де q–символ Похгаммера (або зсунутий q–факторіал) $(a;q)_n$ визначається формулою

$$(a;q)_n = \begin{cases} (1-a)(1-aq)\cdot\ldots\cdot(1-aq^{n-1}), & \text{при } n \geq 1, \\ 1, & \text{при } n = 0, \\ \prod\limits_{m=0}^{\infty}(1-aq^m) = \lim\limits_{n\to\infty}(a;q)_n, & \text{при } n = \infty, \end{cases}$$

а також функції

$$f_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q)^{k+1} q^{k(k+1)/2+k\nu}}{(q^{\nu+1};q)_{k+1}} z^k \tag{1}$$

при $\nu > -1$. Легко бачити, що

$$f_0(z) = \frac{E_q\left((1-q)z\right) - 1}{z}.$$

Було встановлено наступний результат.

Теорема 1. *[1] Апроксиманти Паде функції (1) порядків* $[N-1/N]$, $N \geq 1$, *можуть бути записані у вигляді*

$$[N-1/N]_{f_\nu}(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)}, \tag{2}$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\left(q^{-N};q\right)_{N-k}\left(q^{N+\nu+1};q\right)_{N-k}}{(1-q)^{N-k}(q;q)_{N-k}} q^{-(N-k)(N-k+2\nu-1)/2} z^k, \tag{3}$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{z^j}{(1-q)^{N-1-j}} \sum_{m=0}^{j} \frac{\left(q^{-N};q\right)_{N-m}\left(q^{N+\nu+1};q\right)_{N-m}}{(q;q)_{N-m}(q^{\nu+1};q)_{j-m+1}} \times$$
$$\times q^{(j(j+1)-N(N-1))/2+m(N-j-1)+(j-N)\nu}. \tag{4}$$

Встановимо збіжність апроксимант (2).

Теорема 2. *Апроксиманти Паде функції (1) порядків* $[N-1/N]$, $N \in \mathbb{N}$, *рівномірно збігаються до наближуваної функції на кожному компакті комплексної площини при* $N \to \infty$.

Доведення. Запишемо знаменник (3) апроксиманти (2) у вигляді

$$Q_N(z) = \frac{(q^{-N};q)_N(q^{N+\nu+1};q)_N}{(q;q)_N(1-q)^N} q^{-N(N+2\nu-1)/2} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-k)^k(-1)^k\left(q^{N-k+1};q\right)_k}{(q;q)_k\left(q^{2N-k+\nu+1};q\right)_k} q^{k(N+\nu)} z^k =$$
$$= \frac{(q^{-N};q)_N(q^{N+\nu+1};q)_N}{(q;q)_N(1-q)^N} q^{-N(N+2\nu-1)/2}\left(1+R_N(z)\right).$$

Нехай z належить компакту $K \subset \mathbb{C}$, такому, що $K \subseteq K_R = \{z : |z| \leq R\}$, $R > 0$. Очевидно, що

$$|1-q^k| < 1+|q|, \ \ \forall k \in \mathbb{N},$$
$$|1-q^m| > 1-|q|, \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Отож, $\forall N \in \mathbb{N}$

$$|R_N(z)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-k)^k(-1)^k\left(q^{N-k+1};q\right)_k}{(q;q)_k\left(q^{2N-k+\nu+1};q\right)_k} q^{k(N+\nu)} z^k\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} \frac{(1+|q|)^{2k}}{(1-|q|)^{2k}} |q|^{k(N+\nu)} R^k.$$

Позначимо

$$C = \left(\frac{1+|q|}{1-|q|}\right)^2 |q|^{\nu} R.$$

Отримаємо

$$|R_N(z)| < \sum_{k=1}^{N} C^k |q|^{kN} < |q|^N \sum_{k=0}^{\infty} C^{k+1} |q|^{kN} = \frac{C|q|^N}{1-C|q|^N} \to 0.$$

Отже,

$$Q_N(z) = \frac{(q^{-N};q)_N (q^{N+\nu+1};q)_N}{(q;q)_N (1-q)^N} q^{-N(N+2\nu-1)/2} (1+o(1)) \qquad (5)$$

при $N \to \infty$. Звідси випливає, що, починаючи з деякого номера $N_0 = N_0(R) \in \mathbb{N}$, знаменники Q_N не мають нулів на компакті K. Для похибки апроксимації має місце формула (див. [3])

$$f_\nu(z) - [N-1/N]_{f_\nu}(z) = \frac{z^{2N}}{Q_N(z)} \left\langle \mathcal{R}_z(B) x_N, Y_N \right\rangle,$$

в якій використано позначення:

$$(B\varphi)(t) = qt(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\left(tq^{n+1}\right) g^n$$

для будь–якої функції φ з простору

$$\mathcal{X}_\alpha = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid \exists M > 0, |f(x)x^\alpha \mid < M, \quad \forall x \in [0,1]\}$$

при $-\nu < \alpha < 1$, резольвентна функція оператора B має вигляд (див. [1])

$$(\mathcal{R}_z(B)\varphi)(t) = \left[(I - zB)^{-1} \varphi\right](t) =$$

$$= \varphi(t) + zq \int_0^t \frac{\sigma(zt)}{\sigma(z\tau)} \varphi(q\tau) d_q\tau,$$

де

$$\sigma(t)=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+q^{m}(1-q)t\right),$$

q–інтеграл Джексона визначається співвідношенням

$$\int_0^t \varphi(\tau)d_q\tau = t(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(tq^n)q^n,$$

білінійна форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathcal{X}_\alpha\times\mathcal{X}_\alpha$ має вигляд

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int_0^1\varphi(\tau)\psi(\tau)d_q\tau,$$

$$x_N(t)=\left(B^N x_0\right)(t)=\frac{(1-q)^N}{\left(q^{\nu+1};q\right)_N}q^{N(N+1)/2+N\nu}t^{N+\nu},\ N\in\mathbb{Z}_+,$$

а Y_N, $N\in\mathbb{Z}_+$, — поліноми, ортогональні за білінійною формою $\langle\cdot,\cdot\rangle$ з вагою t^ν, тобто q–аналоги поліномів Якобі, для яких справедливе наступне зображення (див. [2])

$$Y_N(t)=\sum_{j=0}^{N}\frac{\left(q^{-N};q\right)_j\left(q^{N+\nu+1};q\right)_j}{(q;q)_j\left(q^{\nu+1};q\right)_j}(qt)^j.$$

Отже,

$$f_\nu(z)-[N-1/N]_{f_\nu}(z)=\frac{z^{2N}}{Q_N(z)}\left\langle\sum_{k=N}^{\infty}x_k z^{k-N},Y_N\right\rangle=$$

$$=\frac{z^{2N}}{Q_N(z)}\left(\langle x_N,Y_N\rangle+\varepsilon_N(z)\right).$$

Неважко переконатися, що $\varepsilon_N(z)=o\left(\langle x_N,Y_N\rangle\right)$, тому

$$f_\nu(z)-[N-1/N]_{f_\nu}(z)=\frac{z^{2N}}{Q_N(z)}\langle x_N,Y_N\rangle(1+o(1))=$$

$$=\frac{z^{2N}}{Q_N(z)}\frac{1}{c_N^{(N)}}\langle Y_N,Y_N\rangle(1+o(1))=$$

$$= \frac{z^{2N}}{c_N^{(N)} Q_N(z)} \frac{(1-q)q^{N(\nu+1)}}{1-q^{2N+\nu+1}} \left[\frac{(q;q)_N}{(q^{\nu+1};q)_N}\right]^2 (1+o(1)).$$

Враховуючи формулу (5) і те, що

$$c_N^{(N)} = \frac{(q^{-N};q)_N (q^{N+\nu+1};q)_N}{(q;q)_N (1-q)^N} q^{-N(N+2\nu-1)/2},$$

в результаті отримуємо

$$f_\nu(z) - [N-1/N]_{f_\nu}(z) =$$

$$= \frac{z^{2N}(1-q)^{2N+1} \left((q;q)_N\right)^4 q^{N(N+3\nu)} (1+o(1))}{\left((q^{-N};q)_N\right)^2 (q^{N+\nu+1};q)_N (q^{N+\nu+1};q)_{N+1} \left((q^{\nu+1};q)_N\right)^2},$$

що, як легко бачити, прямує рівномірно до нуля на кожному компакті комплексної площини. □

Зауваження 1. Апроксиманти Паде функції E_q вивчалися також в [4–6].

[1] *Гаврилюк Н. М., Голуб А. П.* Апроксиманти Паде q–аналогів експоненти та їх узагальнень // Теорія наближення функцій та суміжні питання. Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12**, 4. — С.144–153.

[2] *Гаспер Дж., Рахман М.* Базисные гипергеометрические ряды. — М: Мир, 1993. — 349 с.

[3] *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — К: Ін-т математики НАН України, 2002. — 222 с.

[4] *Walliser R.* Rationale approximation des q–analogons der exponentialfunktion und irrationalitätsaussagen für diese funktion // Arch. Math. — 1985. — **44**, 1. — S. 59–64.

[5] *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления базисных гипергеометрических рядов // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**,6. — С. 803–808.

[6] *Голуб А. П.* Об одной системе биортогональных полиномов и ее приложениях // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, 7. — С. 961–965.