Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 212–219

УДК 517.5

Р. П. Пухтаєвич [1], ***С. А. Плакса*** [2]

[1,2] *(Інститут математики НАН України, Київ)*

[1] **p_r_p@mail.ru,** [2] **plaksa@imath.kiev.ua**

Інтеграл типу Коші по прямій в тривимірній гармонічній алгебрі з одновимірним радикалом

In the paper we consider a certain analog of Cauchy type integral taking values in a three-dimensional harmonic algebra with one-dimensional radical. We establish sufficient conditions for the existence of limiting values of this integral on the straight line.

В роботі розглядається деякий аналог інтеграла типу Коші, що приймає значення в тривимірній гармонічній алгебрі з одновимірним радикалом. Встановлено достатні умови існування граничних значень цього інтеграла на прямій.

1. Вступ. Всюди в роботі через $\mathbb{C}$ і $\mathbb{R}$ позначаються відповідно поле комплексних чисел і поле дійсних чисел, а також їх геометричні моделі — комплексна площина і дійсна вісь комплексної площини.

В монографіях [1, 2] доведено існування граничних значень інтеграла типу Коші

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(t)}{t-\xi}\,dt\,, \qquad \xi\in\mathbb{C}\setminus\gamma\,, \tag{1}$$

за класичних умов: γ — замкнена гладка крива на комплексній площині і функція $\varphi\colon\gamma\longrightarrow\mathbb{C}$ задовольняє умову Гельдера.

У випадку, коли γ — замкнена жорданова спрямлювана крива, в роботі [3] отримано достатні умови існування на γ граничних значень інтеграла (1) з внутрішньої та зовнішньої областей, обмежених кривою γ. З використанням результату роботи [3], зокрема, було показано, що за умови на криву γ (див. [4]):

$$\sup_{\xi\in\gamma} \operatorname{mes}\{t\in\gamma : |t-\xi|\le\varepsilon\} = O(\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0, \tag{2}$$

де через mes позначено лінійну міру Лебега на γ, і умови Діні

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega_\gamma(\varphi,\eta)}{\eta} d\eta < \infty, \tag{3}$$

на модуль неперервності функції $\varphi\colon \gamma \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$\omega_\gamma(\varphi,\varepsilon) := \sup_{t_1,t_2\in\gamma,\ |t_1-t_2|\le\varepsilon} |\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|$$

інтеграл (1) має граничні значення в кожній точці кривої γ (див. [5]).

У випадку, коли γ — дійсна вісь $\mathbb{R}$, в монографіях [1, 2] доведено існування граничних значень інтеграла (1) за умов, що функція $\varphi\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ задовольняє умову Гельдера, має скінченну границю $\varphi(\infty)$ в нескінченно віддаленій точці, в околі якої задовольняє також нерівність

$$|\varphi(t)-\varphi(\infty)| < \frac{c}{|\,t\,|^\lambda}\,, \qquad \lambda > 0\,,$$

де стала c не залежить від t.

Спираючись на результат роботи [5] і лему 3.3 з [6], можна стверджувати існування граничних значень інтеграла (1) у випадку $\gamma=\mathbb{R}$ за умов, що модуль неперервності $\omega_{\mathbb{R}}(\varphi,\varepsilon)$ і локальний центрований відносно точки ∞ модуль неперервності

$$\omega_{\mathbb{R},\infty}(\varphi,\varepsilon) = \sup_{\tau\in\mathbb{R}\,:\,|\tau|\ge 1/\varepsilon} |\varphi(\tau)-\varphi(\infty)|$$

функції φ задовольняють умови Діні:

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R}}(\varphi,\eta)}{\eta}\, d\eta < \infty\,, \qquad \int\limits_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R},\infty}(\varphi,\eta)}{\eta}\, d\eta < \infty\,. \tag{4}$$

В роботі [7] розглянуто аналог інтеграла типу Коші:

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \varphi(\tau)(\tau-\zeta)^{-1}\, d\tau \tag{5}$$

в тривимірній гармонічній алгебрі з двовимірним радикалом у випадку, коли крива Γ є плоскою і задовольняє умову вигляду (2), а модуль неперервності функції $\varphi\colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ — умову вигляду (3). З урахуванням структури дільників нуля у вказаній алгебрі показано, що інтеграл (5) визначений в двох необмежених циліндричних областях, напрямною спільної межі яких є крива Γ, і встановлено існування його граничних значень на кривій Γ по шляхах, які, так би мовити, не дотикаються межі області поза площиною кривої Γ. При додаткових припущеннях про функцію φ в роботі [8] встановлено існування граничних значень інтеграла (5) на усій межі кожної з циліндричних областей.

В цій роботі розглядається інтеграл (5) у тривимірній гармонічній алгебрі з одновимірним радикалом. Зазначимо, що у цій алгебрі збільшується кількість областей визначення інтеграла (5) і ускладнюється їх геометрія, що пов'язано з ускладненням структури дільників нуля. Наприклад, у модельному випадку інтегрування по прямій, який розглядається в роботі, таких областей 4, і граничні значення на лінії інтегрування з кожної з цих областей знаходяться за різними формулами.

2. Інтеграл типу Коші по "дійсній" прямій в тривимірній гармонічній алгебрі з одновимірним радикалом. Нехай $\mathbb{A}_2$ — тривимірна комутативна банахова алгебра над полем $\mathbb{C}$ з базисом $\{I_1, I_2, \rho\}$, для елементів якого виконуються правила множення:

$$I_1{}^2 = I_1, \quad I_2{}^2 = I_2, \quad I_1 I_2 = \rho^2 = I_1\rho = 0, \quad I_2\rho = \rho,$$

при цьому одиниця алгебри має розклад $1 = I_1 + I_2$.

В алгебрі $\mathbb{A}_2$ розглянемо гармонічний базис (див., наприклад, [6])

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = iI_1 + \rho, \qquad e_3 = iI_2.$$

Виділимо в алгебрі $\mathbb{A}_2$ лінійну оболонку $E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ над полем $\mathbb{R}$, породжену векторами вказаного гармонічного базису $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Неперервна функція $\Phi\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{A}_2$ називається *моногенною* в області $\Omega \subset E_3$, якщо Φ диференційовна за Гато у кожній точці цієї області, тобто якщо для кожного $\zeta \in \Omega$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{A}_2$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\right) \varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall h \in E_3.$$

Для функції $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ визначимо функцію в кожній точці $\tau = te_1$ "дійсної" прямої $\Gamma := \{\tau = te_1 : t \in \mathbb{R}\} \subset E_3$ тотожністю $\varphi(\tau) \equiv \varphi(t)$, зберігши для неї те ж саме позначення φ.

Надалі функція $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має скінченну границю $\varphi(\infty)$ в нескінченно віддаленій точці і задовольняє умови (4).

Розглянемо інтеграл (5) по прямій Γ з щільністю $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, який розуміється у сенсі його головного значення, тобто

$$\Phi(\zeta) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \varphi(\tau)(\tau-\zeta)^{-1}\,d\tau := \frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to+\infty}\int\limits_{-N}^{N} \varphi(t)(te_1-\zeta)^{-1}\,dt, \quad (6)$$

і є моногенною функцією в кожній з областей

$$\Pi_1 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : x+iy \in D^+, x+iz \in D^+\},$$

$$\Pi_2 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : x+iy \in D^-, x+iz \in D^+\},$$

$$\Pi_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : x+iy \in D^-, x+iz \in D^-\},$$

$$\Pi_4 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : x+iy \in D^+, x+iz \in D^-\},$$

в E_3, де D^+ і D^- відповідно верхня і нижня відносно дійсної осі півплощини комплексної площини.

Розглянемо також сингулярний інтеграл в точці $\zeta_0 = \xi e_1$, $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_0(\zeta_0) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \varphi(\tau)(\tau-\zeta_0)^{-1}\,d\tau := \frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\int\limits_{-N}^{\xi-\varepsilon} + \int\limits_{\xi+\varepsilon}^{N}\right)\frac{\varphi(t)}{t-\xi}\,dt.$$

Визначимо евклідову норму $\|a\| := \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2}$ в $\mathbb{A}_2$ (тут $a = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$ і $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{C}$), для неї справедливі нерівності:

$$\|ab\| \le c\|a\|\|b\|\,, \qquad \left\|\int\limits_{\Gamma} \varphi(\tau)d\tau\right\| \le c\int\limits_{\Gamma} \|\varphi(\tau)\|\|d\tau\|\,, \quad (7)$$

де c — деяка абсолютна стала.

Лема. *Нехай функція $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умови* (4). *Якщо точка ζ прямує до точки $\zeta_0 \in \Gamma$ по кривій γ, для якої існує константа $m \ge 0$ така, що в кожній точці $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \gamma$ виконується нерівність*

$$|y| \le m\,|z|, \quad (8)$$

то

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0,\zeta\in\gamma}\int\limits_{\Gamma}\Big(\varphi(\tau)-\varphi(\zeta_0)\Big)(\tau-\zeta)^{-1}d\tau=\int\limits_{\Gamma}\Big(\varphi(\tau)-\varphi(\zeta_0)\Big)(\tau-\zeta_0)^{-1}d\tau.$$

Доведення. Позначимо $\varepsilon:=\|\zeta-\zeta_0\|$ і розглянемо різницю

$$\int\limits_{\Gamma}\Big(\varphi(\tau)-\varphi(\zeta_0)\Big)(\tau-\zeta)^{-1}d\tau-\int\limits_{\Gamma}\Big(\varphi(\tau)-\varphi(\zeta_0)\Big)(\tau-\zeta_0)^{-1}d\tau=$$

$$=\int\limits_{\Gamma^{2\varepsilon}(\zeta_0)}\Big(\varphi(\tau)-\varphi(\zeta_0)\Big)(\tau-\zeta)^{-1}d\tau-\int\limits_{\Gamma^{2\varepsilon}(\zeta_0)}\Big(\varphi(\tau)-\varphi(\zeta_0)\Big)(\tau-\zeta_0)^{-1}d\tau+$$

$$+(\zeta-\zeta_0)\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma^{2\varepsilon}(\zeta_0)}\Big(\varphi(\tau)-\varphi(\zeta_0)\Big)(\tau-\zeta)^{-1}(\tau-\zeta_0)^{-1}d\tau=:I_1-I_2+I_3,$$

де $\Gamma^{2\varepsilon}(\zeta_0):=\{\tau\in\Gamma:\|\tau-\zeta_0\|\le 2\varepsilon\}$.

Для оцінки інтеграла I_1 виберемо на прямій Γ точку ζ_1 таку, що $\|\zeta-\zeta_1\|=\min\limits_{\tau\in\Gamma}\|\tau-\zeta\|$. Тоді, використовуючи нерівності (7), отримуємо:

$$\|I_1\|=\left\|\int\limits_{\Gamma^{2\varepsilon}(\zeta_0)}\Big(\varphi(\tau)-\varphi(\zeta_1)\Big)(\tau-\zeta)^{-1}d\tau+\Big(\varphi(\zeta_1)-\varphi(\zeta_0)\Big)\int\limits_{\Gamma^{2\varepsilon}(\zeta_0)}(\tau-\zeta)^{-1}d\tau\right\|\le$$

$$\le c\int\limits_{\Gamma^{2\varepsilon}(\zeta_0)}|\varphi(\tau)-\varphi(\zeta_1)|\,\|(\tau-\zeta)^{-1}\|\,\|d\tau\|+$$

$$+|\varphi(\zeta_1)-\varphi(\zeta_0)|\left\|\int\limits_{\Gamma^{2\varepsilon}(\zeta_0)}(\tau-\zeta)^{-1}d\tau\right\|=:I_1'+I_1''.$$

З леми 1.3 з [6] випливає рівність

$$(\tau-\zeta)^{-1}=\frac{1}{t-x-iy}I_1+\frac{1}{t-x-iz}I_2+\frac{y}{(t-x-iz)^2}\,\rho \tag{9}$$

для всіх $\zeta=x+ye_2+ze_3\in\Pi_k$, $k=\overline{1,4}$, і $\tau=te_1$. Із співвідношень (8), (9) випливає нерівність

$$\|(\tau-\zeta)^{-1}\|\le\frac{c(m)}{\min\{|t-x-iy|;|t-x-iz|\}}\ . \tag{10}$$

Враховуючи нерівності $|t-x-iy| \geq \|\tau-\zeta_1\|$, $|t-x-iz| \geq \|\tau-\zeta_1\|$, а також нерівність (10), отримуємо:

$$\|I_1'\| \leq c(m) \int\limits_{\Gamma^{2\varepsilon}(\zeta_0)} \frac{|\varphi(\tau)-\varphi(\zeta_1)|}{\min\{|t-x-iy|;|t-x-iz|\}}\|d\tau\| \leq$$

$$\leq c(m) \int\limits_{\Gamma^{2\varepsilon}(\zeta_0)} \frac{|\varphi(\tau)-\varphi(\zeta_1)|}{\|\tau-\zeta_1\|}\|d\tau\| \leq c(m) \int\limits_0^{4\varepsilon} \frac{\omega_{\mathbb{R}}(\varphi,\eta)}{\eta}\,d\eta \ \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Для оцінки інтеграла I_1'' розглянемо область $D^{2\varepsilon}(\zeta_0) := \{\tau = t_1e_1 + t_2(e_2+e_3) : t_1, \in \mathbb{R}, t_2 > 0, \|\tau-\zeta_0\| \leq 2\,\varepsilon\}$ в площині $\{\tau = t_1e_1+t_2(e_2+e_3) : t_1,t_2 \in \mathbb{R}\}$ і її межу $\partial D^{2\varepsilon}(\zeta_0)$ у відносній топології цієї площини. Тепер, враховуючи нерівності (7), (10), отримаємо:

$$\|I_1''\| \leq \omega_{\mathbb{R}}\big(\varphi, \|\zeta_1-\zeta_0\|\big)\left\| \int\limits_{\Gamma^{2\varepsilon}(\zeta_0)} (\tau-\zeta)^{-1}d\tau \right\| =$$

$$= \omega_{\mathbb{R}}\big(\varphi, \|\zeta_1-\zeta_0\|\big)\left\| \int\limits_{\partial D^{2\varepsilon}(\zeta_0)} (\tau-\zeta)^{-1}d\tau - \int\limits_{\partial D^{2\varepsilon}(\zeta_0)\setminus\Gamma^{2\varepsilon}(\zeta_0)} (\tau-\zeta)^{-1}d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \omega_{\mathbb{R}}\big(\varphi, \|\zeta_1-\zeta_0\|\big)\left(2\pi + c(m) \int\limits_{\partial D^{2\varepsilon}(\zeta_0)\setminus\Gamma^{2\varepsilon}(\zeta_0)} \frac{\|d\tau\|}{\min\{|t-x-iy|;|t-x-iz|\}}\right) \leq$$

$$\leq \omega_{\mathbb{R}}(\varphi, 2\varepsilon)\Big(2\pi + c(m)\,\frac{1}{\varepsilon}\,2\pi\varepsilon\Big) \ \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Оцінка інтеграла I_2 проводиться подібно оцінці інтеграла I_1':

$$\|I_2\| \leq c \int\limits_0^{2\varepsilon} \frac{\omega_{\mathbb{R}}(\varphi,\eta)}{\eta}\,d\eta \ \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Аналогічно, враховуючи нерівності $|t-x-iy| \geq \frac{1}{2}\|\tau-\zeta_0\|$, $|t-x-iz| \geq \frac{1}{2}\|\tau-\zeta_0\|$ при всіх $\tau \in \Gamma \setminus \Gamma^{2\varepsilon}(\zeta_0)$, а також нерівності (7), (10), оцінюємо інтеграл I_3:

$$\|I_3\| \leq c\,\varepsilon \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma^{2\varepsilon}(\zeta_0)} |\varphi(\tau)-\varphi(\zeta_0)|\,\|(\tau-\zeta)^{-1}\|\,\|(\tau-\zeta_0)^{-1}\|\,\|d\tau\| \leq$$

$$\leq c\,\varepsilon \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma^{2\varepsilon}(\zeta_0)} \frac{|\varphi(\tau)-\varphi(\zeta_0)|}{\|\tau-\zeta_0\|^2}\|d\tau\| \leq c\,\varepsilon \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\omega_{\mathbb{R}}(\varphi,\eta)}{\eta^2}\,d\eta \to 0, \quad \varepsilon\to 0,$$

Лему доведено.

Позначимо через $\widehat{\Phi}_k(\zeta_0)$ при $k=\overline{1,4}$ граничні значення функції (6) при прямуванні точки ζ до точки $\zeta_0\in L$ по кривій $\gamma\subset\Pi_k$, для якої існує стала m така, що в кожній точці $\zeta=x+ye_2+ze_3\in\gamma$ виконується нерівність (8).

Теорема. *Нехай функція* $\varphi\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *задовольняє умови* (4). *Тоді інтеграл* (5) *має граничні значення* $\widehat{\Phi}_k(\zeta_0)$, $k=\overline{1,4}$, *в усіх точках* $\zeta_0\in\Gamma$, *які задаються формулами:*

$$\widehat{\Phi}_1(\zeta_0)=\Phi_0(\zeta_0)+\frac{1}{2}\,\varphi(\zeta_0)\,,\quad \widehat{\Phi}_2(\zeta_0)=\Phi_0(\zeta_0)-\frac{1}{2}\,\varphi(\zeta_0)(I_1-I_2),$$

$$\widehat{\Phi}_3(\zeta_0)=\Phi_0(\zeta_0)-\frac{1}{2}\,\varphi(\zeta_0)\,,\quad \widehat{\Phi}_4(\zeta_0)=\Phi_0(\zeta_0)+\frac{1}{2}\,\varphi(\zeta_0)(I_1-I_2),$$

Доведення. Подамо інтеграл (6) у вигляді

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\varphi(\tau)(\tau-\zeta)^{-1}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\varphi(\tau)-\varphi(\zeta_0))(\tau-\zeta)^{-1}d\tau+\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\tau-\zeta)^{-1}d\tau\,.$$

Тепер твердження теореми є наслідком леми і рівності

$$\int\limits_{\Gamma}(\tau-\zeta)^{-1}d\tau=\begin{cases}\pi i & \text{при } \zeta\in\Pi_1,\\ -\pi i(I_1-I_2) & \text{при } \zeta\in\Pi_2,\\ -\pi i & \text{при } \zeta\in\Pi_3,\\ \pi i(I_1-I_2) & \text{при } \zeta\in\Pi_4,\\ 0 & \text{при } \zeta\in\Gamma.\end{cases}$$

Література

[1] *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977. — 640 с.

[2] *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968. — 511 с.

[3] *Давыдов Н. А.* Непрерывность интеграла типа Коши в замкнутой области // Докл. АН СССР. — 1949. — **64**, № 6. — С. 759 – 762.

[4] *Салаев В. В.* Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой // Мат. заметки. — 1976. — **19**, № 3. — С. 365 – 380.

[5] *Герус О. Ф.* Конечноразностные гладкости интегралов типа Коши // Укр. мат. журн. — 1977. — **29**, № 5. — С. 642 – 646.

[6] *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2008. — 230 с.

[7] *Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S.* On limiting values of Cauchy type integral in a harmonic algebra with two-dimensional radical // Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska. Sectio A. — 2013. — **67**, No. 1. — P. 57 – 64.

[8] *Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S.* Limiting values of the Cauchy type integral in a three-dimensional harmonic algebra // Eurasian Math. J. — 2012. — **3**, No. 2. — P. 120 – 128.