Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 205–211

УДК 517.5

О. С. Плакса, В. С. Плакса, С. А. Плакса[*]

[*] *(Інститут математики НАН України, Київ)*

[*] **plaksa62@mail.ru**, [*] **plaksa@imath.kiev.ua**

Про стійкість сингулярного інтеграла Коші відносно збурення кривої інтегрування

In the paper we obtain a Zygmund type rate for a value deflection of singular Cauchy integral on a rectifiable curve with respect to a curve perturbation.

В роботі отримано оцінку типу оцінки Зігмунда для відхилення значень сингулярного інтеграла Коші по спрямлюваній кривій при збуренні кривої інтегрування.

1. Вступ. Добре відомо, що сингулярний інтеграл Коші, за допомогою якого виражаються граничні значення інтегралу типу Коші, відіграє важливу роль при розв'язанні крайових задач теорії аналітичних функцій, що мають різноманітні застосування в механіці і математичній фізиці (див., наприклад, [1 — 9]). При розв'язанні обернених крайових задач, задач з вільними границями, при дослідженні коректності постановки задач принциповою є проблема стійкості розв'язків при різноманітних збуреннях (див. [1, 8, 10 — 14]).

В роботі [15] отримано оцінку відхилення значень сингулярного інтеграла Коші з гельдеровою щільністю у випадку замкненої гладкої кривої інтегрування при певних збуреннях кривої. В роботі [16] для таких же збурень кривої інтегрування досліджено стійкість інтеграла типу Коші по розімкненій гладкій кривій.

В даній роботі при збуреннях того ж типу, що і в роботах [15, 16], досліджується стійкість сингулярного інтеграла Коші, щільність якого належить більш широкому, ніж в [15], класу функцій, що задовольняють умову Діні, а крива інтегрування є замкненою жордановою спрямлюваною (взагалі кажучи, негладкою) кривою, яка задовольняє умову Салаєва – Давіда (див. [17, 18]).

2. Позначення і постановка задачі. Нехай Γ — замкнена жорданова спрямлювана крива на комплексній площині $\mathbb{C}$, яка задовольняє умову Салаєва – Давіда (див. [17, 18])

$$\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \tag{1}$$

де $\theta(\varepsilon) := \sup\limits_{z\in\Gamma} \theta_z(\varepsilon)$, $\theta_z(\varepsilon) := \mathrm{mes}\,\{t \in \Gamma : |t - z| \le \varepsilon\}$ і mes — лінійна міра Лебега на Γ.

Нехай замкнена жорданова спрямлювана крива $\Gamma^\delta := \{\xi \in \mathbb{C} : \xi = t + \delta(t),\ t \in \Gamma\}$, яка теж задовольняє умову виду (1), отримана в результаті збурення $\delta(t)$ кривої Γ, причому відображення $\xi = t + \delta(t)$ між точками $t \in \Gamma$ і $\xi \in \Gamma^\delta$ є взаємно однозначним.

Як і в роботах [15, 16], будемо припускати, що функція $\delta\colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ належить банахову простору $C^1(\Gamma)$ неперервно диференційовних на Γ функцій з нормою

$$\|\delta\|_1 := \max_{t\in\Gamma} |\delta(t)| + \max_{t\in\Gamma} |\delta'(t)|\,.$$

Нехай на кривих Γ і Γ^δ задана неперервна функція $\varphi\colon \Gamma\cup\Gamma^\delta \longrightarrow \mathbb{C}$, модуль неперервності якої

$$\omega_\varphi(\varepsilon) := \sup_{t_1,t_2\in\Gamma\cup\Gamma^\delta,\ |t_1-t_2|\le\varepsilon} |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|$$

задовольняє умову Діні

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega_\varphi(\eta)}{\eta}\, d\eta < \infty\,. \tag{2}$$

Тоді існує так званий зведений сингулярний інтеграл Коші

$$(S\varphi)_\Gamma(z) := \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\varphi(t) - \varphi(z)}{t - z}\, dt\,, \quad z \in \Gamma\,, \tag{3}$$

за допомогою якого виражаються граничні значення інтеграла типу Коші (див. [19]).

У точці $\zeta = z+\delta(z) \in \Gamma^\delta$, яка є відповідною точці $z \in \Gamma$, розглянемо зведений сингулярний інтеграл Коші

$$(S\varphi)_{\Gamma^\delta}(\zeta) := \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma^\delta} \frac{\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)}{\xi-\zeta}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\Big(\varphi\big(t+\delta(t)\big)-\varphi\big(z+\delta(z)\big)\Big)\Big(1+\delta'(t)\Big)}{t+\delta(t)-z-\delta(z)}\, dt\,.$$

Метою даної роботи є встановлення оцінки відхилення

$$\Big|(S\varphi)_{\Gamma^\delta}(\zeta)-(S\varphi)_{\Gamma}(z)\Big|$$

зведеного сингулярного інтеграла Коші (3) при збуренні $\delta(t)$ кривої інтегрування Γ.

3. Оцінка відхилення сингулярного інтеграла Коші.

Теорема. *Нехай замкнені жорданові спрямлювані криві* Γ, Γ^δ *задовольняють умови виду* (1) *і* $\|\delta\|_1 \le \varepsilon$, *а модуль неперервності функції* $\varphi : \Gamma \cup \Gamma^\delta \to \mathbb{C}$ *задовольняє умову* (2). *Тоді справедлива оцінка*

$$\Big|(S\varphi)_{\Gamma^\delta}(\zeta)-(S\varphi)_{\Gamma}(z)\Big| \le$$

$$\le c\left(\varepsilon\int\limits_0^{2d} \frac{\omega_\varphi(\eta)}{\eta(\eta+\varepsilon)}\, d\eta + \left(\omega_\varphi(\varepsilon)+\varepsilon\max_{\xi\in\Gamma^\delta}|\varphi(\xi)|\right)\ln\frac{2d}{\varepsilon}\right), \qquad (4)$$

$$\zeta = z+\delta(z),\ \ \forall\, z\in\Gamma\,,$$

де d *— діаметр кривої* Γ, *а стала* c *залежить лише від сталих в умовах виду* (1) *на криві* Γ, Γ^δ.

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $\varepsilon \le d/5$. Розглянемо різницю

$$(S\varphi)_{\Gamma^\delta}(\zeta)-(S\varphi)_{\Gamma}(z) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_{3\varepsilon}(z)} \frac{\varphi(t)-\varphi(z)}{t-z}\, dt - \int\limits_{\Gamma_{3\varepsilon}(z)} \frac{\Big(\varphi\big(t+\delta(t)\big)-\varphi\big(z+\delta(z)\big)\Big)\Big(1+\delta'(t)\Big)}{t+\delta(t)-z-\delta(z)}\, dt +$$

$$+\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_{3\varepsilon}(z)}\frac{\Big(\delta(t)-\delta(z)\Big)\Big(\varphi(t)-\varphi(z)\Big)}{(t-z)\Big(t+\delta(t)-z-\delta(z)\Big)}\,dt-$$

$$-\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_{3\varepsilon}(z)}\frac{\varphi\big(t+\delta(t)\big)-\varphi(t)+\varphi(z)-\varphi\big(z+\delta(z)\big)}{t+\delta(t)-z-\delta(z)}\,dt-$$

$$-\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_{3\varepsilon}(z)}\frac{\Big(\varphi\big(t+\delta(t)\big)-\varphi\big(z+\delta(z)\big)\Big)\delta'(t)}{t+\delta(t)-z-\delta(z)}\,dt=:I_1-I_2+I_3-I_4-I_5\,,$$

де $\Gamma_{3\varepsilon}(z):=\{t\in\Gamma:|t-z|\le 3\varepsilon\}$.

Інтеграл I_1 оцінюється з урахуванням умови (1) так, як відповідний інтеграл при доведенні теореми 1 з [20]:

$$|I_1|\le\int\limits_{[0,3\varepsilon]}\frac{\omega_\varphi(\eta)}{\eta}d\theta_z(\eta)\le\int\limits_0^{6\varepsilon}\frac{\theta_z(\eta)\omega_\varphi(\eta)}{\eta^2}d\eta\le c\int\limits_0^{6\varepsilon}\frac{\omega_\varphi(\eta)}{\eta}d\eta\le$$

$$\le c\,\varepsilon\int\limits_0^{6\varepsilon}\frac{\omega_\varphi(\eta)}{\eta(\eta+\varepsilon)}\,d\eta\,.$$

Тут і далі в доведенні через c позначено сталі, які залежать лише від сталих в умовах виду (1) на криві Γ, Γ^δ і значення яких, взагалі кажучи, є різними навіть в межах одного ланцюжка нерівностей.

Позначимо $\xi:=t+\delta(t)$. Враховуючи співвідношення $|\xi-\zeta|=$ $=|t+\delta(t)-z-\delta(z)|\le|t-z|+|\delta(t)|+|\delta(z)|\le 5\varepsilon$ для всіх $t\in\Gamma_{3\varepsilon}(z)$, подібно до оцінки інтеграла I_1 отримуємо

$$|I_2|\le\int\limits_{\Gamma^\delta_{5\varepsilon}(\zeta)}\frac{|\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)|}{|\xi-\zeta|}\,|d\xi|\le c\,\varepsilon\int\limits_0^{10\varepsilon}\frac{\omega_\varphi(\eta)}{\eta(\eta+\varepsilon)}\,d\eta\,.$$

З урахуванням співвідношень

$$|t+\delta(t)-z-\delta(z)|\ge|t-z|-2\varepsilon\ge|t-z|/3\qquad\forall\,t\in\Gamma\setminus\Gamma_{3\varepsilon}(z)\qquad(5)$$

і умови (1) оцінимо I_3 так, як відповідний інтеграл при доведенні теореми 1 з [20]:

$$|I_3| \le 6\varepsilon \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_{3\varepsilon}(z)} \frac{|\varphi(t)-\varphi(z)|}{|t-z|^2}\,|dt| \le c\,\varepsilon \int\limits_{\varepsilon}^{2d} \frac{\omega_\varphi(\eta)}{\eta^2}\,d\eta \le c\,\varepsilon \int\limits_{\varepsilon}^{2d} \frac{\omega_\varphi(\eta)}{\eta(\eta+\varepsilon)}\,d\eta\,.$$

Враховуючи співвідношення (5), у такий же спосіб оцінюємо інтеграли I_4, I_5:

$$|I_4| \le 6\,\omega_\varphi(\varepsilon) \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_{3\varepsilon}(z)} \frac{|dt|}{|t-z|} \le c\,\omega_\varphi(\varepsilon)\,\ln\frac{2d}{\varepsilon}\,,$$

$$|I_5| \le 6\,\varepsilon \max_{\xi\in\Gamma^\delta} |\varphi(\xi)| \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_{3\varepsilon}(z)} \frac{|dt|}{|t-z|} \le c\,\varepsilon \max_{\xi\in\Gamma^\delta} |\varphi(\xi)|\,\ln\frac{2d}{\varepsilon}\,.$$

Теорему доведено.

Наслідок. *Якщо за умов теореми функція φ є гельдеровою, тобто*

$$\omega_\varphi(\varepsilon) = O(\varepsilon^\alpha)\,, \quad \varepsilon\to 0, \quad \alpha\in(0,1]\,,$$

то

$$\Big|(S\varphi)_{\Gamma^\delta}(\zeta) - (S\varphi)_\Gamma(z)\Big| \le c\,\varepsilon^\alpha\,\ln\frac{2d}{\varepsilon}\,, \qquad \zeta = z+\delta(z),\ \ \forall\, z\in\Gamma\,, \tag{6}$$

де стала c не залежить від ε.

Зауважимо, що у порівнянні з оцінкою Зігмунда для модуля неперервності зведеного сингулярного інтеграла Коші $(S\varphi)_\Gamma$ (див. [17, 20]) в оцінці (4) присутній член, в якому міститься логарифм. З наслідку випливає, що у випадку гельдерових функцій φ цей член стає головним членом оцінки. Оцінка (6) є точною за порядком, що підтверджується наведеним нижче прикладом кривих Γ, Γ^δ і функції φ.

В роботі [15] встановлено, що у випадку замкненої гладкої кривої Γ відхилення значень сингулярного інтеграла Коші, щільність якого є гельдеровою з показником $\alpha\in(0,1)$, при такому ж збуренні δ, як і в умовах наслідку, в свою чергу, є гельдеровим з показником $\alpha' < \alpha$. Тепер стає очевидним, що відповідна оцінка роботи [15] за порядком не є точною.

4. Точність оцінки. Наведемо приклад кривих Γ, Γ^δ і функції φ, для яких оцінка (6) є точною за порядком.

Нехай крива Γ є об'єднанням чотирьох відрізків: Γ_1, який сполучає точки -1 і 1; Γ_2, який сполучає точки 1 і $1+i$; Γ_3, який сполучає точки $1+i$ і $-1+i$; Γ_4, який сполучає точки $-1+1$ і -1.

Нехай при $0<\varepsilon<1/2$ крива Γ^δ є об'єднанням чотирьох відрізків, які послідовно сполучають точки $-1+i\varepsilon$, $1+i\varepsilon$, $1+i$, $-1+i$ і $-1+i\varepsilon$.

При $\alpha\in(0,1]$ розглянемо наступну функцію:

$$\varphi(t)=\begin{cases} 0 & \text{при } \ t\in\Gamma^\delta\,,\\ -\varepsilon^\alpha & \text{при } \ t\in\Gamma_1: -1\le t<-\varepsilon\,,\\ -|t|^\alpha & \text{при } \ t\in\Gamma_1: -\varepsilon\le t<0\,,\\ t^\alpha & \text{при } \ t\in\Gamma_1: 0\le t\le\varepsilon\,,\\ \varepsilon^\alpha & \text{при } \ t\in\Gamma_1: \varepsilon<t\le 1\,,\\ \varepsilon^{\alpha-1}(\varepsilon-\operatorname{Im}t) & \text{при } \ t\in\Gamma_2: 0<\operatorname{Im}t<\varepsilon\,,\\ -\varepsilon^{\alpha-1}(\varepsilon-\operatorname{Im}t) & \text{при } \ t\in\Gamma_4: 0<\operatorname{Im}t<\varepsilon\,. \end{cases}$$

Тоді $(S\varphi)_{\Gamma^\delta}(\zeta)\equiv 0$ на Γ^δ і $c_1\,\varepsilon^\alpha\,\ln\frac{1}{\varepsilon}\le|(S\varphi)_\Gamma(0)|\le c_2\,\varepsilon^\alpha\,\ln\frac{1}{\varepsilon}$ для всіх $\varepsilon\in(0,1/2)$, де сталі c_1,c_2 не залежать від ε, що і доводить точність за порядком оцінки (6).

Література

[1] *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977. — 640 с.

[2] *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968. — 511 с.

[3] *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 707 с.

[4] *Михлин С.Г.* Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. — М.–Л.: ОГИЗ, 1949. — 380 с.

[5] *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных операторов. — Кишинев: Штиинца, 1973. — 426 с.

[6] *Данилюк И.И.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости. — М.: Наука, 1975. — 296 с.

[7] *Литвинчук Г.С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. — М.: Наука, 1977. — 448 с.

[8] *Монахов В.Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. — Новосибирск: Наука, 1977. — 422 с.

[9] *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2008. — 230 с.

[10] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 740 с.

[11] *Монахов В.Н., Семенко Е.В.* Классы корректности краевых задач сопряжения аналитических функций с бесконечным индексом // Докл. АН СССР. — 1986. — **286**, № 1. — С. 27 – 30.

[12] *Lanza de Cristoforis M., Preciso L.* On the analyticity of the Cauchy integral in Schauder spaces // J. Integral Equations Applications. — 1999. — **11**, No. 3. — P. 363 – 391.

[13] *Preciso L., Rogosin S.* On the analyticity of the Schwarz operator with respect to a curve // Factorization, Singular Operators and Related Problems: Proc. of Conference in honour of Prof. Georgui Litvinchuk. — Kluwer Academic Publishers, 2003. – P. 237 – 254.

[14] *Wang C.R., Zhang H.M., Zhu Y.C.* The Riemann boundary value problem with respect to the perturbation of boundary curve // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2006. — **51**, № 8 – 11. — P. 831 – 845.

[15] *Wang X.L., Gong Y.F.* On stability of a class of singular integral with respect to path of integration // Acta Math. Sinica. — 1999. — **42**, № 2. — P. 343 – 350 (in Chinese).

[16] *Lin J., Wang C.R.* On stability of Cauchy type integral with kernel density of class H. with respect to path of integration for an open arc // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2007. — **52**, № 10 – 11. — P. 863 – 898.

[17] *Салаев В. В.* Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой // Мат. заметки. — 1976. — **19**, № 3. — С. 365 – 380.

[18] *David G.* Operateurs intégraux sur certaines courbes du plan complexe // Ann. sci. de l'Ecole Supérieure, 4 ser. — 1984. — **14**, № 1. — P. 157 – 189.

[19] *Давыдов Н. А.* Непрерывность интеграла типа Коши в замкнутой области // Докл. АН СССР. — 1949. — **64**, № 6. — С. 759 – 762.

[20] *Герус О. Ф.* Некоторые оценки модулей гладкости интегралов типа Коши // Укр. мат. журн. — 1978. — **30**, № 5. — С. 594 – 601.