Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 220–224

УДК 517.53

Сафонов В. М.

(Національний університет харчових технологій, Київ)

Про нескінченні рівні неперервної функції

Objects of our study are continuous functions of a real variable with a dense set of infinite levels. There are investigated a behavior of functions with singularity, and found connections between sets of finite and infinite levels of an isolated mapping, respectively, in terms of categories.

У роботі розглядаються неперервні функції однієї дійсної змінної з щільною множиною нескінченних рівнів. В термінах категорії досліджується поведінка функцій з особливістю та встановлюється зв'язок між множинами скінченних і нескінченних рівнів нульвимірного відображення.

Якщо на відрізку $[a, b]$ задана функція $f(x)$, то для довільної точки $x_0 \in [a, b]$ повний прообраз $f^{-1}f(x_0)$ будемо називати рівнем функції f. Розуміння властивостей сукупності всіх рівнів функції (відображення) часто дозволяє охарактеризувати її структурні особливості. У зв'язку з цим постає питання про вивчення множини рівнів дійсних функцій.

Надалі розглядаються неперервні функції однієї дійсної змінної. Відомо, що рівні неперервної функції $f(x)$, $x \in [a, b]$ являють собою замкнені множини в $[a, b]$, скінченні або нескінченні. Більш того, існують неперервні функції, у яких всі рівні не тільки нескінченні, але і незліченні.

Дослідженню множини нескінченних рівнів неперервної функції присвячена дана робота.

Означення 1. Нехай $f\colon [a,b] \longrightarrow R$ — неперервне відображення та існує ніде не щільна замкнена множина $P \subset [a,b]$ така, що відображення f строго монотонно на кожному інтервалі суміжності до P і не є монотонним в жодному околі будь-якої точки із P. Тоді скажемо, що f є відображенням з особливою множиною P і точки множини $[a,b] \setminus P$ назвемо регулярними [1].

Зрозуміло, що на різних інтервалах доповнення $[a,b] \setminus P$ характер монотонності відображення f може бути неоднаковим. Якщо f строго зростає на кожному із суміжних інтервалів до множини P, то одним із прикладів [1] подібної функції є $f(x) = x - \Theta(x)$, $x \in [0,1]$, де $\Theta(x)$ — відома канторова функція [2]. На інтервалах суміжності до канторової множини P_0 функція $f(x)$ має вигляд $x + const$. При цьому образ $f(P_0)$ заповнює увесь відрізок $[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]$ осі ординат.

Означення 2. Замкнена множина $P \subset [a,b]$ називається нульвимірною ($dimP = 0$), якщо вона ніде не щільна на відрізку $[a,b]$.

Нетривіальним прикладом нульвимірної множини є відома канторова досконала множина P_0 на відрізку $[0,1]$, яка має потужність континуума в кожній своїй порції [2]. У наведеному вище прикладі ця множина P_0 є особливою множиною.

Означення 3. Неперервне відображення $f\colon [a,b] \longrightarrow R$ називається нульвимірним, якщо кожний його рівень є нульвимірною множиною, тобто $dimf^{-1}f(x_0) = 0$ для будь-якого $x_0 \in [a,b]$.

Доведемо тепер одне важливе твердження про функцію з особливістю, яке є доповненням до відомого результату [1, с.169]. Використані при цьому поняття, означення яких не наведені в роботі, можна знайти в [3].

Теорема 1. *Нехай $f\colon [a,b] \longrightarrow R$ — неперервне відображення з особливою множиною $P \subset [a,b]$. Тоді, якщо множина E нескінченних рівнів відображення f щільна на відрізку $[c,d] \subset f([a,b])$, то існує щільна підмножина $e \subset [c,d]$ типу G_δ така, що для будь-якого $x_0 \in e' = f^{-1}(e) \cap P$ знайдеться послідовність регулярних точок $\{x_k\}$, $x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$, для яких $f(x_k) = f(x_0)$, $k = 1, 2, \ldots$.*

Доведення. За умовою теореми неперервне відображення f є строго монотонним на кожному інтервалі суміжності до замкненої ніде не щільної множини $P \subset [a,b]$. Тому образ множини регулярних точок $f([a,b] \setminus P)$ є відкритою щільною на $f([a,b]) \subset R$ множиною. Отже, множина $F_0 = f([a,b]) \setminus f([a,b] \setminus P)$ замкнена і ніде не щільна.

Позначимо через F_n множину точок прямої $R = R_y$, кожній з яких відповідає щонайбільше n точок доповнення $[a,b] \setminus P$. Будь-яка множина F_n замкнена на R, оскільки легко довести, що її доповнення відкрите. Зазначимо тут, що точку $a \in [a,b]$ вважатимемо регулярною лише у тому випадку, якщо відображення f в точках a і $b \in [a,b]$ однобічно зростає або спадає. Тоді обидві ці точки слід визнавати за одну. Очевидно маємо $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$.

Покажемо тепер, що кожна $F_n (n = 1, 2, \ldots)$ є ніде не щільною множиною на відрізку $[c,d]$. Зробимо це від супротивного. Припустимо, що знайдеться інтервал $\Delta \subset [c,d] \subset f([a,b])$, в якому хоча б одна з множин F_n є скрізь щільною. Внаслідок замкненості множини F_n маємо $\Delta \subset F_n$.

Нехай точці $y_0 \in \Delta$ відповідає максимально можливе число N точок $\{x_k\}(k = 1, 2, \ldots, N)$ з доповнення $[a,b] \setminus P$ серед усіх точок інтервала Δ. Зрозуміло, що $N \leq n$.

Побудуємо далі такі інтервали-околи $U(x_k)\,(k = 1, 2, \ldots, N)$ точок $x_k \in [a,b] \setminus P$, щоб образ кожного з них був деяким фіксованим інтервалом $\delta(y_0) \subset \underline{\Delta \subset [}c,d]$ з центром в точці y_0 і щоб замикання цих околів – відрізки $\overline{U(x_k)} \subset [a,b] \setminus P (k = 1, 2, \ldots, N)$. Можливість виконання такої побудови легко випливає з відкритості строго монотонних функцій.

Оскільки множина E нескінченних рівнів відображення f є щільною на відрізку $[c,d] \subset f([a,b])$, то існує точка перетину множин $\tilde{y} \in [c,d] \cap E$ така, що $\tilde{y} \in \delta(y_0) \subset \Delta$.

Розглянемо рівень $f^{-1}(\tilde{y})$ відображення f, який є нескінченною нульвимірною множиною. Тоді маємо $f^{-1}(\tilde{y}) \cap P \neq \varnothing$ і в деякій точці $\tilde{x} \in P$ дістанемо $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Оскільки множина P ніде не щільна і $\tilde{x}$ не міститься в об'єднанні $\bigcup\limits_{k=1}^{N} \overline{U(x_k)}$, то існує послідовність точок $\{\tilde{x}_m\}$, $\tilde{x}_m \in [a,b] \setminus P (m = 1, 2, 3, \ldots)$, яка є збіжною до $\tilde{x}$. За неперервністю відображення f образи цих точок $\tilde{y}_m = f(\tilde{x}_m)$, починаючи з деякого номера m, будуть лежати у середині інтервалу $\delta(y_0)$.

Попереднє свідчить про таке. Якщо $\tilde{y}_m$ — одна з таких точок, то їй має відповідати множина, яка містить принаймні $N + 1$ точок з доповнення $[a,b] \setminus P$. Це суперечить визначенню точки y_0 і числа N.

Отримане протиріччя доводить те, що будь-яка із замкнених множин $F_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ ніде не щільна на відрізку $[c, d]$. Тоді об'єднання $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} F_n$ — множина першої категорії в $[c, d]$ і, отже, доповнення $e = [c, d] \setminus \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} F_n$ є множиною другої категорії типу G_δ. Звідси та із означення множин F_n випливає, що множина e є шуканою множиною. Теорема доведена.

Особливо важливими в багатьох випадках виявилися дослідження, які пов'язані з неперервними відображеннями, що не мають інтервалів сталості. Використовуючи категорний підхід, охарактеризуємо множину рівнів неперервного нульвимірного відображення.

Позначимо множини скінченних та зліченних рівнів відображення f відповідно через E_1 і E_2.

На підставі доведеної тут теореми про точки нескінченної регулярної кратності та одержаного раніше результату [4] дістанемо такі твердження.

Теорема 2. *Нехай неперервне нульвимірне відображення* $f\colon [a, b] \longrightarrow R$ *має множину* $E_1 \cup E_2$ *скінченних або зліченних рівнів скрізь другої категорії. Якщо множина* E *нескінченних рівнів відображення* f *щільна на відрізку* $[c, d] \subset f([a, b])$, *то множина його зліченних рівнів* E_2 *другої категорії на* $[c, d]$.

Доведення. За умовою відображення f нульвимірне і має множину $E_1 \cup E_2$ не більше, ніж зліченних рівнів скрізь другої категорії на образі $f([a, b])$. Тому існує щільна на відрізку $[a, b]$ скінченна або зліченна послідовність $\{(a_i, b_i)\}$ інтервалів попарно без спільних точок, в кожному з яких f строго монотонно [4], причому надалі можна вважати, що ніде не щільна замкнена множина $P = [a, b] \setminus \bigcup\limits_{i} (a_i, b_i) \neq \varnothing$ і в жодному околі кожної точки $x \in P$ відображення f не є монотонним.

Оскільки множина E нескінченних рівнів відображення f щільна на відрізку $[c, d] \subset f([a, b])$, то згідно з теоремою 1 існує G_δ-множина e другої категорії на $[c, d]$ така, що для кожного $x_0 \in f^{-1}(e) \cap P$ і деякої послідовності регулярних точок $\{x_k\}, x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$, маємо $f(x_k) = f(x_0), k = 1, 2, \ldots$. При цьому із самого доведення теореми 1 випливає, що $E_1 \subset \bigcup\limits_{n} F_n$.

Нехай множина E_1 скінченних рівнів відображення f не першої категорії на відрізку $[c, d]$. Тоді F_σ-множина $\bigcup\limits_{n} F_n$ теж не першої категорії на $[c, d]$ і, отже, знайдеться інтервал $\Delta \subset [c, d] \subset f([a, b])$, на якому одна із множин F_n буде щільною. Із замкнености множини F_n дістанемо $\Delta \subset F_n$. Звідси та із попереднього випливає, що $F_n \cap e \neq \varnothing$, всупереч визначенню множин F_n та e.

Отже, $E_1 \cap [c, d]$ — множина першої категорії і тому множина E_2 зліченних рівнів відображення f другої категорії на $[c, d]$. Теорема 2 доведена.

Наслідком теореми 2 є твердження стосовно внутрішніх точок множини скінченних рівнів відображення f.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2. Якщо множина E_2 зліченних рівнів відображення f ніде не щільна на відрізку $[c, d] \subset f([a, b])$, то для множини E_1 скінченних його рівнів справджується $IntE_1 \neq \varnothing$ (стосовно відрізка $[c, d] \subset R$).*

З доведення теореми 2 безпосередньо випливає таке твердження.

Теорема 4. *Якщо за умов теореми 2 множина E_1 скінченних рівнів відображення f не першої категорії на $f([a, b])$, то існує інтервал $\delta \subset f([a, b])$ такий, що $\delta \subset E_1$.*

Література

[1] *Трохимчук Ю.Ю.* Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2008. — 539 с.

[2] *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. — М.: Мир, 1967. — 252 с.

[3] *Куратовский К.* Топология: В 2-х томах. — М.: Мир, 1966. — Т. 1. — 595 с.

[4] *Сафонов В.М.* Про зліченно-кратні функції // Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Аналіз і застосування /. — 2012. — **9**, №2. — К.: Ін-т математики НАН України, 2012. — С. 341 – 346.