Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 164–174

УДК 517.9

Т. С. Кузьменко

(Житомирський державний університет імені Івана Франка, Житомир)

kuzmenko.ts@mail.ru

Степеневі ряди та ряди Лорана в алгебрі комплексних кватерніонів

Taylor's and Laurent's expansions of G-monogenic mappings with values in the algebra of complex quaternion are obtained and singularities of these mappings are classified.

В алгебре комплексных кватернинионов получены тейлоровские и лорановские разложения для G-моногенных отображений, а также классифицированы их особые изолированные точки.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ — алгебра кватерніонів над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, базис якої складається з одиниці алгебри 1 і елементів I, J, K, для яких виконуються наступні правила множення:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1,\ IJ = -JI = K,\ JK = -KJ = I,\ KI = -IK = J.$$

Розглянемо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ інший базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, розклад елементів якого в базисі $\{1, I, J, K\}$ має вигляд

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + iI), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1 - iI), \quad e_3 = \frac{1}{2}(iJ - K), \quad e_4 = \frac{1}{2}(iJ + K),$$

де i — уявна комплексна одиниця. Таблиця множення в новому базисі набуває вигляду

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	0	e_3	0
e_2	0	e_2	0	e_4
e_3	0	e_3	0	e_1
e_4	e_4	0	e_2	0

.

Норма кватерніона $c = \sum\limits_{k=1}^{4} c_k e_k$, $c_k \in \mathbb{C}$ визначається рівністю

$$\|c\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{4} |c_k|^2}\,, \tag{1}$$

а одиниця алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ в цьому базисі є сумою ідемпотентів: $1 = e_1 + e_2$.

Розглянемо лінійні функціонали $f_1 \colon \mathbb{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ та $f_2 \colon \mathbb{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$, покладаючи

$$f_1(e_1) = f_1(e_3) = 1, \qquad f_1(e_2) = f_1(e_4) = 0,$$

$$f_2(e_2) = f_2(e_4) = 1, \qquad f_2(e_1) = f_2(e_3) = 0.$$

Системи $\{i_1, i_2, i_3\}$, де $i_1 = 1$, $\; i_2 = a_1 e_1 + a_2 e_2$, $\; i_3 = b_1 e_1 + b_2 e_2$, $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, задають трійки лінійно незалежних векторів над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ (див. [1, с. 223]).

Виділимо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ лінійну оболонку $E_3 \colon = \{\zeta = x i_1 + y i_2 + z i_3 \colon x, y, z \in \mathbb{R}\}$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжену векторами i_1, i_2, i_3. Області Ω тривимірного простору $\mathbb{R}^3$ поставимо у відповідність область $\Omega_\zeta \colon = \{\zeta = x i_1 + y i_2 + z i_3 : (x, y, z) \in \Omega\}$ в E_3.

Введемо позначення $\xi_1 \colon = f_1(\zeta) = x + y a_1 + z b_1$, $\xi_2 \colon = f_2(\zeta) = x + y a_2 + z b_2$. Тепер елемент $\zeta \in E_3$ можна подати у вигляді $\zeta = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$, і згідно визначення (1)

$$\|\zeta\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2}. \tag{2}$$

Позначимо через $f_k(E_3) \colon = \{f_k(\zeta) : \zeta \in E_3\}$, $k = 1, 2$. Відмітимо, що в подальшому істотним є припущення: $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Очевидно, що воно має місце тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел у кожній з пар (a_1, b_1), (a_2, b_2) належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Неперервне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ $\big($або $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})\big)$ називається *право-G-моногенним* $\big($або *ліво-G-моногенним*$\big)$ в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, якщо Φ $\big($або $\widehat{\Phi}\big)$ диференційовне за Гато у кожній точці цієї області, тобто якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ $\big($або $\widehat{\Phi}'(\zeta)\big)$ алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \Big(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\Big)\varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_3$$

$$\left(\text{або} \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\widehat{\Phi}(\zeta+\varepsilon h)-\widehat{\Phi}(\zeta)\right)\varepsilon^{-1}=\widehat{\Phi}'(\zeta)h \quad \forall\, h\in E_3\right).$$

Із розкладу резольвенти (див. [6])

$$(t-\zeta)^{-1}=\frac{1}{t-\xi_1}\,e_1+\frac{1}{t-\xi_2}\,e_2\,,\qquad \forall\, t\in\mathbb{C}:\ t\neq\xi_1\,,\ t\neq\xi_2$$

випливає, що точки $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, які відповідають необоротним елементам $\zeta=xi_1+yi_2+zi_3\in E_3$, лежать на прямих

$$L^1\colon x+y\,\mathrm{Re}\ a_1+z\,\mathrm{Re}\ b_1=0,\qquad y\,\mathrm{Im}\ a_1+z\,\mathrm{Im}\ b_1=0,$$

$$L^2\colon x+y\,\mathrm{Re}\ a_2+z\,\mathrm{Re}\ b_2=0,\qquad y\,\mathrm{Im}\ a_2+z\,\mathrm{Im}\ b_2=0$$

в просторі $\mathbb{R}^3$. Прямим L^1, L^2 поставимо у відповідність конгруентні їм прямі L^1_ζ, L^2_ζ в E_3.

В роботах [2] — [4] для різних класів функцій кватерніонної змінної встановлено аналоги класичних результатів комплексного аналізу, зокрема, доведено аналоги інтегральних теорем Коші, інтегральної формули Коші, теореми Морера та досліджено розклади в степеневі ряди і ряди Лорана.

В роботі [5] для G-моногенних відображень отримано аналоги інтегральної теореми Коші для криволінійного і поверхневого інтегралів та аналог інтегральної формули Коші.

В цій роботі отримано розклади G-моногенних відображень в ряди Тейлора і Лорана, а також здійснено класифікацію особливих точок згаданих відображень.

2. Степеневі ряди і G-моногенні відображення. Безпосереднє застосування способу розкладу голоморфних функцій, що базується на розкладі в ряд ядра Коші (див., наприклад, [7, с. 107]), до право-G-моногенного в області Ω_ζ відображення $\Phi\colon\Omega_\zeta\longrightarrow\mathbb{H}(\mathbb{C})$, дозволяє отримати його розклад в степеневий ряд

$$\Phi(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta-\zeta_0)^n p_n \tag{3}$$

в кулі з центром у фіксованій точці $\zeta_0\in\Omega_\zeta$ меншого радіуса, ніж відстань від точки ζ_0 до межі $\partial\Omega_\zeta$; тут

$$p_n=\frac{\Phi^{(n)}(\zeta_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\zeta}\left(\left(\tau-\zeta_0\right)^{-1}\right)^{n+1}d\tau\Phi(\tau)\,,\quad n=0,1,\ldots,$$

а γ_ζ визначена в роботі [5]. Це пов'язано з тим, що в нерівності $\|ab\| \leq 2\sqrt{2}\,\|a\|\|b\|$ константа $2\sqrt{2}$ не може бути замінена одиницею.

Проте, використовуючи представлення право-G-моногенного відображення $\Phi\colon \Omega_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ через аналітичні функції комплексної змінної, покажемо, що право-G-моногенне відображення Φ в кулі $B(\zeta_0, R)\colon = \{\zeta \in E_3 : \|\zeta - \zeta_0\| < R\}$ радіуса $R\colon = \min\limits_{\zeta\in\partial\Omega_\zeta} \|\zeta - \zeta_0\|$ з центром в довільній точці $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ подається у вигляді ряду (3).

Розглядаючи питання про розклад G-моногенних відображень $\Phi\colon \Omega_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $\widehat{\Phi}\colon \Omega_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ в степеневий ряд, будемо вважати, що область $\Omega_\zeta \subset E_3$ є обмеженою. Зауважимо, що всі результати, що будуть встановлено для цього випадку, будуть мати місце і для необмежених областей.

Нехай $\zeta_0\colon = x_0 i_1 + y_0 i_2 + z_0 i_3$ — довільна фіксована точка області Ω_ζ і $R_0\colon = \min\limits_{\zeta\in\partial\Omega_\zeta} \|\zeta - \zeta_0\|$, де через $\partial\Omega_\zeta$ позначено межу області Ω_ζ в E_3. Візьмемо кулю $\Theta(\zeta_0, R_0)\colon = \{\zeta \in E_3\colon \|\zeta - \zeta_0\| < R_0\}$ в E_3 радіуса R_0 з центром в точці ζ_0.

Позначимо через $\xi_{10}\colon = x_0 + a_1 y_0 + b_1 z_0$ і $\xi_{20}\colon = x_0 + a_2 y_0 + b_2 z_0$ точки комплексної площини, які відповідають точці ζ_0, відповідно, за формулами $\xi_{10} = f_1(\zeta_0)$ і $\xi_{20} = f_2(\zeta_0)$, а через $\widetilde{D}_1$ і $\widetilde{D}_2$ — області в $\mathbb{C}$, на які куля $\Theta(\zeta_0, R_0)$ відображається, відповідно, функціоналами f_1 і f_2.

Нехай $R\colon = \min\Big\{R_0\,, \min\limits_{\tau_1\in\partial\widetilde{D}_1} |\tau_1 - \xi_{10}|\,, \min\limits_{\tau_2\in\partial\widetilde{D}_2} |\tau_2 - \xi_{20}|\Big\}$, де $\partial\widetilde{D}_k$, $k = 1, 2$, — границя області $\widetilde{D}_k$, $k = 1, 2$. Введемо у розгляд круги $U(\xi_{k0}, R) := \{\xi_k \in \mathbb{C}\colon |\xi_k - \xi_{k0}| < R\}$, $k = 1, 2$, відповідно, з центрами у точках ξ_{k0}, $k = 1, 2$.

Покажемо, що зображення (див. [6])

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + F_3(\xi_1)e_3 + F_4(\xi_2)e_4, \tag{4}$$

де F_1 і F_3 — деякі голоморфні в $U(\xi_{10}, R)$ функції, а F_2 і F_4 — деякі голоморфні в $U(\xi_{20}, R)$ функції, дає можливість отримати розклад право-G-моногенного відображення у степеневий ряд

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n p_n \tag{5}$$

в області $B(\zeta_0, R) := \{\zeta \in E_3\colon f_1(\zeta) \in U(\xi_{10}, R)\,, f_2(\zeta) \in U(\xi_{20}, R)\}$, а зображення

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + F_3(\xi_2)e_3 + F_4(\xi_1)e_4\,, \tag{6}$$

де F_1 і F_4 — деякі голоморфні в $U(\xi_{10}, R)$ функції, а F_2 і F_3 — деякі голоморфні в $U(\xi_{20}, R)$ функції, дає змогу одержати розклад ліво-G-моногенного відображення в степеневий ряд

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{p}_n (\zeta - \zeta_0)^n \tag{7}$$

в області $B(\zeta_0, R)$.

Оскільки за побудовою область $B(\zeta_0, R)$ є опуклою в напрямку прямих L^1_ζ і L^2_ζ, то в ній право-G-моногенне відображення $\Phi(\zeta)$ подається у вигляді (4), а ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi}(\zeta)$ подається у вигляді (6).

Теорема 1. *Нехай $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, функція $\Phi\colon \Omega_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є право-G-моногенною, а $\widehat{\Phi}\colon \Omega_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ — ліво-G-моногенною в довільно фіксованій обмеженій області $\Omega_\zeta \subset E_3$ і $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$. Тоді в області $B(\zeta_0, R)$ функція Φ подається у вигляді суми абсолютно збіжного степеневого ряду* (5), *в якому*

$$p_n = a_n e_1 + b_n e_2 + c_n e_3 + d_n e_4\,, \tag{8}$$

і $a_n\,, b_n\,, c_n\,, d_n$ — коефіцієнти рядів Тейлора функцій

$$\begin{aligned} F_1(\xi_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad & F_2(\xi_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\xi_2 - \xi_{20})^n, \\ F_3(\xi_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad & F_4(\xi_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n (\xi_2 - \xi_{20})^n, \end{aligned} \tag{9}$$

які містяться у зображенні (4) *для функції* $\Phi(\zeta)$ *при* $\zeta \in B(\zeta_0, R)$, *а* $\widehat{\Phi}$ *подається у вигляді суми абсолютно збіжного степеневого ряду* (7), *в якому*

$$\widehat{p}_n = \widehat{a}_n e_1 + \widehat{b}_n e_2 + \widehat{c}_n e_3 + \widehat{d}_n e_4 \tag{10}$$

і $\widehat{a}_n\,, \widehat{b}_n\,, \widehat{c}_n\,, \widehat{d}_n$ *— коефіцієнти рядів Тейлора функцій*

$$\begin{aligned} &\widehat{F}_1(\xi_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{a}_n(\xi_1-\xi_{10})^n, \qquad \widehat{F}_2(\xi_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{b}_n(\xi_2-\xi_{20})^n,\\ &\widehat{F}_3(\xi_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{c}_n(\xi_2-\xi_{20})^n, \qquad \widehat{F}_4(\xi_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{d}_n(\xi_1-\xi_{10})^n, \end{aligned} \tag{11}$$

які містяться у зображенні (6) *для відображення* $\widehat{\Phi}(\zeta)$ *при* $\zeta\in B(\zeta_0,R)$.

Доведення. Оскільки у зображенні (4) функції F_1, F_3 голоморфні в крузі $U(\xi_{10},R)$, а функції F_2, F_4 голоморфні в крузі $U(\xi_{20},R)$, то у відповідних кругах ряди (9) абсолютно збіжні. Тоді при всіх $\zeta\in B(\zeta_0,R)$ рівність (4) набуває вигляду: $\Phi(\zeta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(\xi_1-\xi_{10})^n e_1+$ $+\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n(\xi_2-\xi_{20})^n e_2+\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(\xi_1-\xi_{10})^n e_3+\sum\limits_{n=0}^{\infty}d_n(\xi_2-\xi_{20})^n e_4$.

Звідси, враховуючи співвідношення

$$\begin{aligned} &(\zeta-\zeta_0)^n e_1=(\xi_1-\xi_{10})^n e_1, \quad (\zeta-\zeta_0)^n e_2=(\xi_2-\xi_{20})^n e_2,\\ &(\zeta-\zeta_0)^n e_3=(\xi_1-\xi_{10})^n e_3, \quad (\zeta-\zeta_0)^n e_4=(\xi_2-\xi_{20})^n e_4 \end{aligned} \tag{12}$$

для всіх $\zeta\in E_3$ і $n=0,1,\ldots$, приходимо до розкладу (5), коефіцієнти якого визначаються рівністю (8), при цьому ряд (5) абсолютно збігається в області $B(\zeta_0,R)$. Повністю аналогічно доводиться рівність (7). Теорему доведено.

Тепер, так як і для голоморфних функцій комплексної змінної (див., наприклад, [7, с. 118]), встановлюється наступна теорема єдиності для G-моногенних відображень, які визначені в області $\Omega_\zeta\subset E_3$ і приймають значення в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теорема 2. *Якщо дві право-G-моногенні функції* $\Phi_1\colon\Omega_\zeta\longrightarrow\mathbb{H}(\mathbb{C})$, $\Phi_2\colon\Omega_\zeta\longrightarrow\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *в довільно фіксованій області* $\Omega_\zeta\subset E_3$ *співпадають в деякому околі внутрішньої точки області* Ω_ζ, *то вони тотожно рівні у всій області* Ω_ζ.

Аналогічна теорема справедлива і для ліво-G-моногенних відображень.

Зазначимо, що співпадання відображень $\Phi_1\colon\Omega_\zeta\longrightarrow\mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $\Phi_2\colon\Omega_\zeta\longrightarrow\mathbb{H}(\mathbb{C})$ на множині точок, яка містить хоча б одну граничну точку області Ω_ζ, є недостатнім для тотожної рівності цих відображень у всій області Ω_ζ. Так, наприклад, значення G-моногенних в E_3 відображень $\Phi_1(\zeta) = \zeta e_3$ і $\Phi_2(\zeta) = 0$ співпадають для всіх $\zeta \in L^1_\zeta$, проте не співпадають тотожно.

3. Ряди Лорана і класифікація особливих точок G-моногенних відображень.

Розглянемо питання про розклад право-G-моногенного відображення $\Phi\colon \mathcal{K}_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і ліво-G-моногенного відображення $\widehat{\Phi}\colon \mathcal{K}_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ в ряд Лорана відносно точки $\zeta_0 := x_0 i_1 + y_0 i_2 + z_0 i_3$, вважаючи, що відображення задане в області $\mathcal{K}_\zeta\colon = \{\zeta \in E_3\colon 0 \le r < |\xi_1 - \xi_{10}| < R \le \infty,$ $0 \le r < |\xi_2 - \xi_{20}| < R \le \infty\}$.

Теорема 3. *Нехай $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Тоді кожне право-$G$-моногенне відображення $\Phi\colon \mathcal{K}_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ в області $\mathcal{K}_\zeta$ подається у вигляді суми абсолютно збіжного ряду*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n p_n\,, \tag{13}$$

де коефіцієнти p_n визначаються формулами (8), *в яких a_n, b_n, c_n, d_n — коефіцієнти рядів Лорана функцій*

$$\begin{aligned} F_1(\xi_1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad F_2(\xi_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\xi_2 - \xi_{20})^n, \\ F_3(\xi_1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad F_4(\xi_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(\xi_2 - \xi_{20})^n, \end{aligned} \tag{14}$$

які містяться в розкладі (4) *відображення $\Phi(\zeta)$, а ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi} : \mathcal{K}_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається в області $\mathcal{K}_\zeta$ у вигляді суми абсолютно збіжного ряду*

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{p}_n(\zeta - \zeta_0)^n\,, \tag{15}$$

де коефіцієнти $\widehat{p}_n$ визначаються формулами (10), *в яких $\widehat{a}_n$, $\widehat{b}_n$, $\widehat{c}_n$,*

$\widehat{d}_n$ *— коефіцієнти рядів Лорана функцій*

$$\widehat{F}_1(\xi_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{a}_n(\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad \widehat{F}_2(\xi_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{b}_n(\xi_2 - \xi_{20})^n,$$
$$\widehat{F}_3(\xi_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{c}_n(\xi_2 - \xi_{20})^n, \qquad \widehat{F}_4(\xi_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{d}_n(\xi_1 - \xi_{10})^n, \tag{16}$$

які містяться в розкладі (6) *відображення* $\widehat{\Phi}(\zeta)$ *при* $\zeta \in \mathcal{K}_\zeta$. *При цьому* $(\zeta-\zeta_0)^n$ *при* $n = -1, -2, \ldots$ *в рівностях* (13), (15) *визначається рівністю* $(\zeta - \zeta_0)^n := \big((\zeta - \zeta_0)^{-1}\big)^{-n}$.

Доведення. Оскільки в поданні (4) функції F_1, F_3 голоморфні в кільці $\{\xi_1 \in \mathbb{C}\colon r < |\xi_1 - \xi_{10}| < R\}$, а функції F_2, F_4 голоморфні в кільці $\{\xi_2 \in \mathbb{C}\colon r < |\xi_2 - \xi_{20}| < R\}$, то ряди (14) у відповідних кільцях абсолютно збіжні. Використовуючи розклади (14), рівність (4) набуває вигляду: $\Phi(\zeta) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\xi_1 - \xi_{10})^n e_1 + \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\xi_2 - \xi_{20})^n e_2 + \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\xi_1 - \xi_{10})^n e_3 + \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} d_n(\xi_2 - \xi_{20})^n e_4$.

Тепер, враховуючи співвідношення (12), які виконуються при всіх цілих значеннях n, отримуємо розклад відображення Φ в абсолютно збіжний в області $\mathcal{K}_\zeta$ ряд (13), коефіцієнти якого визначаються рівностями (8). Повністю аналогічно доводиться розклад у ряд Лорана ліво-G-моногенного відображення (6). Теорему доведено.

Сукупність членів ряду Лорана (13) $\big($або (15)$\big)$ з невід'ємними степенями називають його *правильною частиною*, а сукупність членів цього ряду з від'ємними степенями — *головною частиною* ряду Лорана.

Компактифікуємо алгебру $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, додаючи до неї нескінченно віддалену точку ∞, до якої прямує кожна послідовність $w_n :\, = \tau_{1,n}e_1 + \tau_{2,n}e_2 + \tau_{3,n}e_3 + \tau_{4,n}e_4$, де $\tau_{1,n}$, $\tau_{2,n}$, $\tau_{3,n}$, $\tau_{4,n} \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, у випадку, коли хоча б одна з послідовностей $\tau_{1,n}$, $\tau_{2,n}$, $\tau_{3,n}$, $\tau_{4,n}$ збігається до нескінченно віддаленої точки розширеної комплексної площини.

Припустимо тепер, що право-G-моногенне відображення $\Phi\colon \mathcal{K}_\zeta^0 \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi}\colon \mathcal{K}_\zeta^0 \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ задані в області $\mathcal{K}_\zeta^0 :\, = \{\zeta \in E_3 \colon 0 < |\xi_1 - \xi_{10}| < R \le \infty,\ 0 < |\xi_2 - \xi_{20}| < R \le \infty\}$. Позначимо через $\widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0 :\, = \{\zeta \in E_3 : |\xi_1 - \xi_{10}| < R, |\xi_2 - \xi_{20}| < R\}$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Якщо в розкладі* (13) *для відображення* $\Phi : \mathcal{K}^0_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$:

1) *не міститься головної частини, то відображення* Φ *має скінченні границі*

$$\lim_{\substack{\zeta \longrightarrow \zeta_0 + e^*, \\ \zeta \notin \{\zeta_0 + e^* \colon e^* \in L^1_\zeta \cup L^2_\zeta\}}} \Phi(\zeta) \tag{17}$$

2) *міститься лише скінченне число доданків у головній частині, то хоча б при одному значенні* $k = 1$ *або* $k = 2$ *відображення* Φ *має нескінченні границі*

$$\lim_{\substack{\zeta \longrightarrow \zeta_0 + e^*_k, \\ \zeta \notin \{\zeta_0 + e^*_k \colon e^*_k \in L^k_\zeta\}}} \Phi(\zeta) \tag{18}$$

в усіх точках $\zeta_0 + e^*_k \in \widetilde{\mathcal{K}}^0_\zeta \cap \{\zeta_0 + e^*_k \colon \; e^*_k \in L^k_\zeta\}$;

3) *міститься нескінченне число доданків у головній частині, то хоча б при одному значенні* $k = 1, 2$ *відображення* Φ *або має нескінченну границю, або не має ні скінченної, ні нескінченної границі в усіх точках* $\zeta_0 + e^*_k \in \widetilde{\mathcal{K}}^0_\zeta \cap \{\zeta_0 + e^*_k \colon \; e^*_k \in L^k_\zeta\}$.

Аналогічні твердження справедливі для ліво-G-моногенних відображень.

Доведення. Відображення Φ в області $\mathcal{K}^0_\zeta$ подається у вигляді (4), де функції F_1, F_3 голоморфні в проколотому околі $U(\xi_{10}, R) \setminus \{\xi_{10}\}$ точки ξ_{10}, а функції F_2, F_4 голоморфні в проколотому околі $U(\xi_{20}, R) \setminus \{\xi_{20}\}$ точки ξ_{20} .

Розглянемо випадок, коли розклад (13) не містить головної частини, тобто має вигляд (5). При цьому коефіцієнти рядів Лорана (14) пов'язані з коефіцієнтами ряду (5) співвідношеннями (8), з яких, в силу рівностей $p_n = 0$ при $n = -1, -2, \ldots$, слідують рівності $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ при всіх від'ємних індексах n. Отже, ряди Лорана (14) в околах відповідних точок ξ_{10}, ξ_{20} є рядами Тейлора своїх сум і тому функції F_1, F_2, F_3, F_4 з рівності (4) є голоморфними у відповідних областях $U(\xi_{10}, R)$ чи $U(\xi_{20}, R)$. Тому відображення (4) має скінченні границі (17) в усіх точках $\zeta_0 + e^* \in \widetilde{\mathcal{K}}^0_\zeta \cap \{\zeta_0 + e^* \colon e^* \in L^1_\zeta \cup L^2_\zeta\}$.

Розглянемо тепер випадок, коли головна частина розкладу (13) містить лише скінченне число доданків, тобто в (13) тільки скінченне число відмінних від нуля коефіцієнтів p_n при від'ємних n. Тоді із співвідношень (8), які пов'язують коефіцієнти рядів Лорана (14) з коефіцієнтами ряду (13), випливає, що всі головні частини рядів (14) не містять нескінченної кількості доданків і головна частина хоча б одного з них відмінна від тотожного нуля. Тому точка ξ_{10} не є істотно особливою точкою для функцій F_1, F_3, а точка ξ_{20} — для функцій F_2 і F_4, але хоча б одна з функцій F_1, F_2, F_3, F_4 має полюс у відповідній точці. Звідси випливає, що хоча б одна з функцій F_1, F_2, F_3, F_4 має нескінченну границю при $\xi_1 \to \xi_{10}$ чи при $\xi_2 \to \xi_{20}$, тобто границя (18) є також нескінченною при $k = 1$ або $k = 2$.

Розглянемо, нарешті, випадок, коли головна частина розкладу (13) містить нескінченно багато відмінних від нуля членів, тобто існує нескінченно багато відмінних від нуля коефіцієнтів p_n при від'ємних n. Тоді із співвідношень (8) випливає, що головна частина хоча б одного з рядів (14) містить нескінченно багато доданків, а це, в свою чергу, означає, що або точка ξ_{10} є істотно особливою для функцій F_1 чи F_3, або точка ξ_{20} є істотно особливою, принаймні, для однієї з функцій: F_2 чи F_4. Тому відображення Φ не може мати скінченної границі в усіх точках множини $\widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0 \cap \{\zeta_0 + e^* \colon e^* \in L_\zeta^1 \cup L_\zeta^2\}$, але вона може мати в цих точках нескінченну границю.

Так, наприклад, якщо ξ_{10} — полюс функції F_1 і істотно особлива точка функції F_3, а ξ_{20} — істотно особлива точка функцій F_2, F_4, то функція F_1 має нескінченну границю в точці ξ_{10}, а отже, границя (18) є нескінченною в усіх точках $\zeta_0 + e^* \in \widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0 \cap \{\zeta_0 + e^* \colon e^* \in L_\zeta^1\}$.

У випадку, коли, наприклад, $F_2 \equiv 0$, $F_3 \equiv 0$, $F_4 \equiv 0$ і точка ξ_{10} є істотно особливою для функції F_1, відображення Φ не має ні скінченної, ні нескінченної границі (18) в усіх точках $\zeta_0 + e^* \in \widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0 \cap \{\zeta_0 + e^* \colon e^* \in L_\zeta^1\}$. Теорему доведено.

Поняття усувної особливої точки, полюса або істотно особливої точки для G-моногенного в області $\mathcal{K}_\zeta^0$ відображення $\Phi \colon \mathcal{K}_\zeta^0 \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вводяться так, як і відповідні поняття для голоморфних функцій в комплексній площині (див., наприклад, [7, с. 135]). А саме, точка ζ_0 називається:

1) *усувною особливою точкою* відображення Φ, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\substack{\zeta \longrightarrow \zeta_0, \\ \zeta \notin \{\zeta_0 + e^* \colon e^* \in L_\zeta^1 \cup L_\zeta^2\}}} \Phi(\zeta) = A;$$

2) *полюсом* функції Φ, якщо існує нескінченна границя

$$\lim_{\substack{\zeta \longrightarrow \zeta_0, \\ \zeta \notin \{\zeta_0 + e^* \colon e^* \in L^1_\zeta \cup L^2_\zeta\}}} \Phi(\zeta) = \infty;$$

3) *істотно особливою точкою* відображення Φ, якщо відображення Φ не має ні скінченної, ні нескінченної границі при $\zeta \longrightarrow \zeta_0$ і $\zeta \notin \{\zeta_0 + e^* \colon e^* \in L^1_\zeta \cup L^2_\zeta\}$.

Повністю аналогічно дані поняття вводяться і для ліво-G-моногенних відображень $\widehat{\Phi} \colon \mathcal{K}^0_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$.

З теореми 4 випливає, що ізольована особлива точка у G-моногенного відображення може бути лише усувною, а у випадку, коли відображення має неусувну особливість в точці ζ_0, особливими є всі точки хоча б однієї з множин $\widetilde{\mathcal{K}}^0_\zeta \cap \{\zeta_0 + e^*_1 \colon \; e^*_1 \in L^1_\zeta\}$ або $\widetilde{\mathcal{K}}^0_\zeta \cap \{\zeta_0 + e^*_2 \colon \; e^*_2 \in L^2_\zeta\}$.

Література

[1] *Plaksa S.A., Pukhtaievych R.P.* Constructive description of monogenic functions in n-dimensional semi-simple algebra // An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa. — 2014. — **22**, No. 1. — P. 221 – 235.

[2] *Moisil G.C., Theodoresco N.* Functions holomorphes dans l'espace // Mathematica (Cluj). — 1931. — **5**. — P. 142 – 159.

[3] *Sudbery A.* Quaternionic analysis // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1979. — **85**. — P. 199 – 225.

[4] *Gentili G., Stoppato C., Struppa D.* Regular Functions of a Quaternionic Variable. — qSpringer Monographs in Mathematics, 2013.

[5] *Shpakivskyi V. S., Kuzmenko T. S.* Integral theorems for the quaternionic G-monogenic mappings // accepted to An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa; http://arxiv.org/pdf/1412.5320v1.pdf

[6] *Шпаківський В. С., Кузьменко Т. С.* Про один клас кватерніонних відображень // прийнята до друку в Укр. мат. журн.; http://arxiv.org/pdf/1412.5142v1.pdf.

[7] *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1976. — Ч.1. — 320 с.