Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, Т.10, №1, 296-303

УДК 517.5

С. О. Чайченко (Донбаський держ. пед. ун-т, Слов'янськ)

РАЦІОНАЛЬНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ЗГОРТОК ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

In this work the rational approximation of the classes of 2π-periodic functions which represented by the convolution of the functions from $L_p(0, 2\pi]$ with fixed kernels, which are given in the form of the sum of series on the system of Takenaka-Malmquist are investigated. The order estimates for values of best uniform rational approximation with fixed poles for the functions of these classes were found.

В роботі досліджено раціональні наближення класів 2π–періодичних функцій, які зображаються згортками функцій з $L_p(0, 2\pi]$ з фіксованими ядрами, заданими у вигляді суми ряду за системою Такенака–Мальмквіста. Знайдено порядкові оцінки для величин найкращих рівномірних раціональних наближень з фіксованими полюсами для функцій із зазначених класів.

Традиційно для наближення 2π–періодичних функцій дійсної чи комплексної змінних використовуються агрегати, які будуються на основі частинних сум рядів Фур'є за тригонометричною системою або ж прямокутні лінійні середні рядів Фур'є. Вибір у ролі базису тригонометричної системи $\{e^{ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ є цілком природнім і виправданим. Для багатьох класів 2π–періодичних функцій, як це засвідчують результати про поперечник, такий базис є найкращим в тому розумінні, що лінійна оболонка, натягнута на нього є екстремальним підпростором для колмогоровського поперечника (див., наприклад, [1, 2]).

У випадку наближення аналітичних функцій класу Гарді ситуація мало чим відрізняється від 2π–періодичного випадку. Тут природно у ролі базису брати систему степенів $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$, яка на одиничному колі $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ збігається з тригонометричною системою $\{e^{ikt}\}_{k=0}^{\infty}$. Але у випадку наближення аналітичних чи гармонічних функцій на компактних множинах всередині одиничного круга апроксимативні властивості степеневої системи погіршуються. Як показано в [3, 4] у такому випадку оптимальною системою в сенсі колмогоровського поперечника є система Такенаки–Мальмквіста раціональних функцій з полюсами зовні одиничного кола. З огляду на цей та інші відомі факти дослідження апроксимативних властивостей системи Такенака–Мальмквіста як для класів аналітичних так і 2π–періодичних функцій представляє значний науковий інтерес.

В даній роботі ми досліджуємо раціональні наближення класів 2π–періодичних функцій, які зображаються згортками функцій з $L_p(0, 2\pi]$ з фіксованими ядрами, заданими у вигляді суми ряду за системою Такенака–Мальмквіста. Знайдено порядкові оцінки для величин найкращих рівномірних раціональних наближень з фіксованими полюсами для функцій із зазначених класів. Наші дослідження у цьому напрямку стали поширенням ідей і методів роботи [5].

Нехай $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовність комплексних чисел $a_k \in \mathbb{C}$, $a_k \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$, причому $a_k = 0$ при $k = 0$, $k \geq n+1$. Розглянемо систему раціональних функцій

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_k(z) = \sqrt{\frac{1-|a_k|^2}{2\pi}} \cdot \frac{1}{1-\overline{a}_k z} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \frac{z-a_j}{1-\overline{a}_j z}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Система вигляду (1) була побудована в роботах [6, 7]. Як показано в [8], ця система є ортонормальною на одиничному колі, тобто

$$\int\limits_{|\xi|=1} \varphi_k(\xi)\overline{\varphi}_m(\xi)\ |d\xi| = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases} \tag{2}$$

При цьому також виконуються рівності

$$\int\limits_{|\xi|=1} \varphi_k(\xi)\varphi_m(\xi)\ |d\xi| = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,\ m = 1, 2, \ldots\ . \tag{3}$$

В свою чергу, як показано в роботі [5], система тригонометричних раціональних функцій

$$\rho_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \rho_k(t) = \sqrt{2}\cdot\mathrm{Re}\ \varphi_k(e^{it}),\ \tau_k(t) = \sqrt{2}\cdot\mathrm{Im}\ \varphi_k(e^{it}),\ k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

буде ортонормованою на $[0;2\pi]$, тобто

$$\int\limits_0^{2\pi} \rho_k(t)\rho_m(t)\ dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases}$$

і

$$\int\limits_0^{2\pi} \tau_k(t)\tau_m(t)\ dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases}$$

Нехай далі $L_p = L_p(0;2\pi]$, $p \geq 1$, — простір Лебега вимірних 2π-періодичних функцій g з нормою

$$||g||_{L_p} = ||g||_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} |g(t)|^p\ dt \right)^{1/p}. \tag{5}$$

Визначимо ядро

$$K_\psi(x;t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)[\rho_k(x)\rho_k(t) + \tau_k(x)\tau_k(t)], \tag{6}$$

де $\psi(k)$ — довільна незростаюча нуль-послідовність, і розглянемо клас 2π-періодичних функцій, які можуть бути подані у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \int\limits_0^{2\pi} g(t) K_\psi(x;t)\ dt, \qquad g \in L_p. \tag{7}$$

Через $C = C(0;2\pi]$ позначимо простір неперервних дійснозначних 2π-періодичних функцій з нормою

$$||f||_C = \sup_{x \in [0;2\pi]} |f(x)|$$

і покладемо

$$R_n(f) = R_n(f; a_1, a_2, ..., a_n) =$$
$$= \inf_{\alpha_k, \beta_k} \left\| f(\cdot) - \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \rho_k(\cdot) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \tau_k(\cdot) \right) \right\|_C, \tag{8}$$

де $a_k \in \mathbb{D},\ k = 1, 2, \ldots, n,$ — набір чисел, які визначають систему (1), а α_k, β_k — дійсні коефіцієнти. Величина $R_n(f)$ називається найкращим рівномірним раціональним наближенням.

Через Θ_p позначимо множину послідовностей $\psi(n)$, кожна з яких задовольняє наступним умовам:

1. $\psi(n),\ n = 1, 2, \ldots,$ монотонно незростає;

2. знайдеться число $\varepsilon > 0$ і додатна стала K такі, що для всіх натуральних $k_1 > k_2 \geq 1$ виконується нерівність $k_1^{\frac{1}{p}+\varepsilon}\psi(k_1) \leq Ck_2^{\frac{1}{p}+\varepsilon}\psi(k_2)$;

Основним результатом роботы є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $g \in L_p$, $1 \leq p < \infty$ і $\psi \in \Theta_p$. Тоді згортка вигляду (7) є неперервною періодичною функцією і виконується нерівність*

$$R_n(f) \leq K\psi(n)n^{1/p}. \tag{9}$$

Зауважимо, що у випадку $\psi(k) = k^r,\ r > 1/p,\ k \in \mathbb{N}$ твердження теореми 1 співпадає з результатом роботи [5].

Доведення. Покладемо у співвідношенні (4) $k = n + m$ і представимо ортогональні функції у вигляді

$$\rho_k(t) = \sqrt{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{e^{it} - a_j}{1 - \overline{a}_j e^{it}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Re}\left(\prod_{j=0}^{n}\frac{e^{it} - a_j}{1 - \overline{a}_j e^{it}} \cdot e^{imt}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\left(\Phi_n(t) + mt\right), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

і аналогічно

$$\tau_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\left(\Phi_n(t) + mt\right), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

де

$$\Phi_n(t) = \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{n} \frac{1-|a_j|^2}{1-2|a_j|\cos(\theta - \operatorname{arctg} a_j) + |a_j|^2}\, d\theta. \tag{12}$$

Нехай $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тоді, враховуючи співвідношення (10) і (11), і застосовуючи нерівність Мінковського для довільного $m \in \mathbb{N}$, отримаємо

$$I = \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n+m}^{\infty} \psi(k) \Big(\rho_k(x)\rho_k(t) + \tau_k(x)\tau_k(t) \Big) \right|^q dt \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{j=m}^{\infty} \psi(n+j) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\Phi_n(t)+jt) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\Phi_n(x)+jx) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(\Phi_n(t)+jt) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(\Phi_n(x)+jx) \right] \right|^q dt \right)^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{j=m}^{\infty} \psi(n+j) \cos(\Phi_n(x) - \Phi_n(t) + j(x-t)) \right|^q dt \right)^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{j=m}^{\infty} \psi(n+j) \cos(\Phi_n(x) - \Phi_n(t)) \cos j(x-t) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sin(\Phi_n(x) - \Phi_n(t)) \sin j(x-t) \right|^q dt \right)^{1/q}.$$

Оскільки $\Phi_n(x) - \Phi_n(t)$ не залежить від m, то

$$I \le \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{j=m}^{\infty} \psi(n+j) \cos j(x-t) \right|^q dt \right)^{1/q} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{j=m}^{\infty} \psi(n+j) \sin j(x-t) \right|^q dt \right)^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=m}^{\infty} \psi(n+j) \cos jt \right|^q dt \right)^{1/q} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=m}^{\infty} \psi(n+j) \sin jt \right|^q dt \right)^{1/q} = J_1 + J_2. \tag{13}$$

Беручи до уваги рівність

$$\cos jy = D_j(y) - D_{j-1}(y),$$

де

$$D_j(y) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{j} \cos ky = \frac{\sin \frac{2j+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

— ядро Діріхле порядку j, і застосовуючи перетворення Абеля, знаходимо

$$\sum_{j=m}^{\infty} \psi(n+j) \cos jt = -\psi(n+m) \cdot D_{m-1}(t) +$$

$$+ \sum_{j=m}^{\infty} (\psi(n+j) - \psi(n+j+1)) D_j(t). \tag{14}$$

Відомо (див., наприклад, [5]), що для ядра Діріхле виконується оцінка

$$||D_j(\cdot)||_q \leq K j^{1/p}. \tag{15}$$

Використовуючи співвідношення

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \left\| \sum_{j=m}^{\infty} \psi(n+j) \cos jt \right\|_q \leq$$

$$\leq K \left(\sum_{j=m}^{\infty} \Delta\psi(n+j) j^{\frac{1}{p}} + \psi(n+m) m^{\frac{1}{p}} \right), \ 1 < q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

і

$$\sum_{j=m}^{\infty} \Delta\psi(n+j) j^{\frac{1}{p}} < \psi(m+n) m^{\frac{1}{p}},$$

одержані в роботі [9] (див. співвідношення (21) і (22), відповідно), одержуємо оцінку

$$J_1 \leq K\psi(n+m)(n+m)^{1/p}. \tag{16}$$

Беручи до уваги властивості спряженого ядра Діріхле і використовуючи аналогічні міркування, знаходимо

$$J_2 \leq K\psi(n+m)(n+m)^{1/p}. \tag{17}$$

Підставляючи оцінки (16) і (17) у співвідношення (13), отримуємо нерівність

$$\left\| \sum_{k=n+m}^{\infty} \psi(k)[\rho_k(x)\rho_k(t) + \tau_k(x)\tau_k(t)] \right\|_q \leq K\psi(n+m)(n+m)^{1/p}. \tag{18}$$

З нерівності (18) з урахуванням означення множини Θ_p (умова 3) випливає, що L_q норма залишка ядра (6) може бути зробленою як завгодно малою рівномірно відносно x, і тому з (7) і співвідношення

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \int_0^{2\pi} |g(t)||K_\psi(x_1;t) - K_\psi(x_2;t)|\, dt \leq$$

$$\leq \|g\|_p \|K_\psi(x_1;\cdot) - K_\psi(x_2;\cdot)\|_q,$$

отримуємо, що $f \in C$.

Беручи до уваги визначення найкращого наближення (8), використовуючи нерівність Гельдера і оцінку (18), знаходимо

$$R_n(f) \leq \left\| \int_0^{2\pi} g(t) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k)[\rho_k(\cdot)\rho_k(t) + \tau_k(\cdot)\tau_k(t)]\, dt \right\|_C \leq$$

$$\leq K\|g\|_p \psi(n+1)(n+1)^{1/p} \leq K\psi(n)n^{1/p}, \tag{19}$$

і у випадку $1 < p < \infty$ теорему доведено.

Якщо ж $p = 1$, то використовуючи аналогічні міркування і враховуючи при цьому елементарні нерівності

$$|D_j(\cdot)| \leq \frac{1}{2} + j, \quad |\tilde{D}_j(\cdot)| \leq j,$$

одержуємо

$$\left\| \sum_{k=n+m}^{\infty} \psi(k)[\rho_k(\cdot)\rho_k(t) + \tau_k(\cdot)\tau_k(t)] \right\|_C \leq K(n+m)\psi(n+m),$$

звідки випливає, що оцінка (19) буде виконуватись. Теорему доведено повністю.

1. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближения. — Москва: Изд. МГУ, 1976. — 304 с.

2. *Pinkus A.* n-Wedths in approximation theory. — Berlin, Heilderberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag, 1986. — 291 p.

3. *Савчук В. В.* Найкращі лінійні методи наближення та оптимальні ортонормовані системи простору Гарді // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 5. — С. 636 – 646.

4. *Савчук В. В.* Найкращі лінійні методи наближення обмежених гармонічних функцій // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 2. — С. 242 – 251.

5. *Русак В. Н., Рыбаченко И. В.* О наилучших рациональных приближениях одного класса периодических функций // Вестник БГУ. Сер. 1. — 2010. — № 3. — С. 106 – 110.

6. *Takenaka C.* On the orthogonal functions and a new formula of interpolation // Japanese Journal of Mathematics. — 1925. — № 2. — P. 129 – 145.

7. *Malmquist F.* Comptes rendus du sixiene congres des mathematiciens scandinares. Kopenhagen, 1925. — 253 p.

8. *Джрбашян М. М.* К теории рядов Фурье по рациональным функциям // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1956. — **9**, № 7. — С. 3 – 28.

9. Сердюк А.С., Грабова У.З. Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів $(\psi;\beta)$–диференційовних функцій // Arxiv preprint, arXiv: 1301.7620, 2013. — 14 с.