Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 225–235

УДК 514.517 + 517.55

М. В. Стефанчук [1]**,** ***М. В. Ткачук*** [2]

[1], [2] *(Інститут математики НАН України, Київ)*

[1] **stefanmv43@gmail.com,** [2] **mvtkachuk@mail.ru**

Лінійно опуклі та спряжені функції в гіперкомплексному просторі

We introduce new notions of linearly convex and conjugated functions in multidimensional hypercomplex space being a n-product of quaternions. There are investigated properties of these objects.

У даній роботі вводиться поняття лінійно опуклих та спряжених функцій в n-вимірному гіперкомплексному просторі $\mathbb{H}^n$, досліджуються їхні властивості.

1. Лінійно опуклі функції. Дана робота присвячена узагальненню деяких результатів щодо багатозначних функцій в комплексному просторі (див. [1, 2]) на гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$, $n = 1, 2, \dots$, що є прямим добутоком n-копій тіла кватерніонів $\mathbb{H}$ [3] ($\mathbb{H}^1 := \mathbb{H}$).

Для довільного скаляра $\lambda \in \mathbb{H}$ і вектора $x \in \mathbb{H}^n$ задамо множення вектора на скаляр у вигляді: $\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$. Вектори x, y називаються *колінеарними*, якщо $x = \lambda y$ з певним $\lambda \in \mathbb{H}$.

Також введемо поняття лінійного функціонала $l\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$, що має характеристичну властивість: $l(ax + by) = al(x) + bl(y)$ при всіх x і y з $\mathbb{H}^n$ і довільних a і b з $\mathbb{H}$. Обмежимось розглядом лінійних функціоналів, що можуть бути записані у вигляді: $l(x) = x_1a_1 + \dots + x_na_n$, де $a = (a_1, \dots, a_n)$ є фіксованим елементом з $\mathbb{H}^n$. Тоді, беручи до уваги, що довільний $a \in \mathbb{H}^n$ породжує функціонал даного типу, назвемо $a = (a_1, \dots, a_n)$ *ковектором* і *елементом спряженого простору* $\mathbb{H}^{n*}$. Для довільної пари $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{H}^{n*}$ визначимо скалярний добуток $\langle x, y\rangle$: $\langle x, y\rangle := \sum_{m=1}^{n} x_m y_m$.

Якщо $\langle x, y\rangle = 0$, то вектори x і y назвемо *ортогональними.* Очевидно, що всі пари векторів, колінеарні, відповідно, x і y, також є ортогональними.

Гіперплощиною назвемо множину $L \subset \mathbb{H}^n$, що задовольняє одну з умов: $\langle x, a\rangle = w$, $\langle x - x_0, a\rangle = 0$, де x — довільна точка множини L, x_0 — фіксований вектор, w — фіксований скаляр з $\mathbb{H}$, a — фіксований ковектор. Назвемо ковектор *a нормаллю.* Відповідно, *афінними* будемо називати лише функції виду: $l(x) = \langle x, a\rangle + b$, $b \in \mathbb{H}$.

Означення 1. Множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається *лінійно опуклою (справа)*, якщо для кожної точки $x^0 = (x^0_1, x^0_2, ..., x^0_n) \in \mathbb{H}^n \setminus E$ існує кватерніонна гіперплощина $\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : \langle x - x^0, a\rangle = 0, a \in \mathbb{H}^{n*}\}$, яка проходить через x^0 і не перетинає *E.*

Означення 2. Лінійно опукла множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається *строго лінійно опуклою*, якщо для довільної опорної гіперплощини l перетин $l \bigcap E$ не містить внутрішніх відносно l точок.

Означення 3. Замкнена або відкрита множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається *сильно лінійно опуклою*, якщо для довільної гіперкомплексної прямої γ множина $\gamma \bigcap E$ ациклічна [4], [5].

У спряженому просторі будемо розглядати лінійно опуклі множини зліва, вони мають властивості, аналогічні властивостям лінійно опуклих множин справа.

Введемо поняття багатозначної функції. Функція $f : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ називається *багатозначною*, якщо образом точки $x \in \mathbb{H}^n$ є множина $f(x) \in \mathbb{H}$. Область визначення такої функції будемо позначати через $E_f := \{x \in \mathbb{H}^n :$ існує $y \in \mathbb{H}$, $y = f(x)\}$.

Означення 4. Багатозначна функція $f : E_f \longrightarrow \mathbb{H}$ називається *лінійно опуклою*, якщо для довільної пари точок $(x_0, y_0) \in \mathbb{H}^{n+1} \setminus \Gamma(f)$ існує афінна функція *l*, така, що $y_0 = l(x_0)$ і $l(x) \bigcap f(x) = \emptyset$ для всіх $x \in \mathbb{H}^n$, де через $\Gamma(f)$ позначено графік функції *f.*

Означення 5. Лінійно опукла функція $f : E_f \longrightarrow \mathbb{H}$ називається *сильно лінійно опуклою (відповідно строго лінійно опуклою)*, якщо її графік $\Gamma(f)$ є сильно лінійно опуклою (відповідно строго лінійно опуклою) множиною в $\mathbb{H}^{n+1}$ (в строгому випадку вимагаємо ще відкритість області визначення функції для того, щоб уникнути вертикальних дотичних до графіка $x = x_0$, які будуть опорними гіперплощинами до графіка функції *f*, і їх перетин з графіком функції f може мати внутрішні відносно цих гіперплощин точки).

Означення лінійно опуклої функції можна поширити на багатозначні функції, які приймають значення в розширеній гіперкомплексній площині $\mathbb{H}^o = \mathbb{H} \bigcup (\infty)$, компактифікованій однією точкою, вважаючи, що в тих точках $x \in \mathbb{H}^n$, де $f(x)$ не визначена, $f(x) = \infty$ (при цьому ми вважаємо, що в довільному околі точки x існують точки, в яких функція визначена).

Ефективною множиною лінійно опуклої функції f назвемо проекцію на $\mathbb{H}^n$ графіка функції *f*. Лінійно угнутою функцією назвемо таку багатозначну функцію *f*, для якої функція $\varphi = \mathbb{H} \setminus f$ — лінійно опукла.

Багатозначною афінною функцією назвемо функцію лінійно опуклу і лінійно угнуту одночасно, для якої знайдеться принаймні одна точка $x \in \mathbb{H}^n$, в якій кожна з множин $(f(x) \bigcap \mathbb{H})$, $(\mathbb{H} \setminus f(x))$ є непорожньою.

Легко перевірити, що для багатозначної афінної функції справедлива рівність $f(x) = f(\Theta) + l(x)$, де l — однозначна афінна функція, а $\Theta = (0, 0, ..., 0)$.

Дійсно, візьмемо точку x_0, для якої $f(x_0) \notin \{\emptyset, \mathbb{H}\}$, і точки $y_1 \in f(x_0)$, $y_2 \in \mathbb{H} \setminus f(x_0)$. Внаслідок афінності існують гіперплощини $l_1, l_2 : (x_0, y_1) \in l_1 \subset \Gamma(f), (x_0, y_2) \in l_2 \subset \mathbb{H}^{n+1} \setminus \Gamma(f)$. Звідки випливає, що для довільної точки x такої, що $x \in E_f$, виконуються умови: $f(x) \notin \{\emptyset, \mathbb{H}\}$, гіперплощини l_1, l_2 не перетинаються. Сім'я гіперкомплексних гіперплощин має геометричні властивості, аналогічні до комплексних гіперплощин. А саме: дві гіперплощини або паралельні, або перетинаються (якби ми взяли сім'ю мішаних площин $\sum_{i=1}^{k}(x_i - x_i^0)a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i(x_i - x_i^0) = 0$, то це було б вже не так). Отже, для довільної іншої пари точок $y_1 \in f(\Theta), y_2 \in \mathbb{H} \setminus f(\Theta)$ гіперплощини l_1, l_2 паралельні і задаються рівнянням виду: $y = y_k + l(x)$, $k = 1, 2$, звідки слідує, що $f(x) = \bigcup\limits_{y \in f(\Theta)} y + l(x) = f(\Theta) + l(x)$.

Лінійно опуклу функцію назвемо *власною*, якщо хоча б для одного x виконується співвідношення: $f(x) \bigcap \mathbb{H} \neq \emptyset$ і для всіх x має місце нерівність: $\mathbb{H} \setminus f(x) \neq \emptyset$.

Наведемо деякі приклади лінійно опуклих функцій.

Для кожного вектора нормалі y розглянемо всі гіперплощини l : $\langle y, x \rangle = w$, які не перетинають деяку множину E: $l \bigcap E = \emptyset$. Для кожного y множину всіх таких w, що $l \bigcap E = \emptyset$, позначимо через $W_E(y)$.

Означення 6. Функція

$$W_E(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in E} \langle x, y \rangle$$

називається *опорною функцією* множини $E \subset \mathbb{H}^n$.

Зауважимо, що графік опорної функції $\Gamma(W_E) = \{(y, W_E(y)) : : y \in \mathbb{H}^{n*}\}$ є конусом. Якщо $z \in \Gamma(W_E)$, то $\forall \alpha \in \mathbb{H}$ має місце включення $\alpha z \in \Gamma(W_E)$.

Означення 7. Якщо $E \subset \mathbb{H}^n$ – лінійно опукла множина, то функція

$$\delta(x|E) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in E, \\ \infty, & \text{якщо } x \notin E, \end{cases}$$

називається її *індикаторною функцією.*

Легко переконатися, що опорна та індикаторна функції лінійно опуклі.

Теорема 1. *Якщо f_α, $\alpha \in \mathrm{A}$, є сім'єю лінійно опуклих функцій (A — довільна множина індексів), то функція $f = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{f}_\alpha$ є лінійно опуклою.*

Доведення. Маємо $\Gamma(f) = \bigcap_{\alpha \in A} \Gamma(f_\alpha)$. Але перетин лінійно опуклих множин є лінійно опуклим [5]. Тому $\Gamma(f)$ лінійно опукла множина і функція f лінійно опукла.

Означення 8. Скажемо, що функція $g = \mathtt{int} f$, якщо її графік можна подати у вигляді $\Gamma(g) = \mathtt{int}\,(\Gamma(f))$, де $\mathtt{int}(\cdot)$ позначає внутрішність відповідної множини.

Теорема 2. *Якщо f — лінійно опукла функція і $E_f = E_{\mathrm{int}(f)}$, то $\mathrm{int} f$ — лінійно опукла функція.*

Доведення. Оскільки f – лінійно опукла функція, то $\Gamma(f)$ – лінійно опукла множина. Тому $\Gamma(\mathtt{int}(f)) = \mathtt{int}\,(\Gamma(f))$ теж лінійно опукла множина [5]. Звідси $\mathtt{int}(f)$ – лінійно опукла функція. Умова $E_f = E_{\mathtt{int}(f)}$

забезпечує те, що гіперплощина, яка не перетинає $\Gamma(\mathtt{int}f)$, задає афінну функцію в точках $(x,y) \in \Gamma(f) \setminus \Gamma(\mathtt{int}f)$, так як $\mathtt{int}f \neq \emptyset$ при $x \in E_{(\mathtt{int}f)}$ (знову уникаємо вертикальних дотичних $x = x_0$).

2. Спряжені функції. Нехай $f\colon E_f \longrightarrow \mathbb{H}^o = \mathbb{H}\bigcup(\infty)$ — багатозначна функція.

Розглянемо опорну функцію до графіка $\Gamma(f)$.

$W_{\Gamma(f)}(z^*) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup\limits_{z\in\Gamma(f)} \langle z, z^*\rangle = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup\limits_{x\in\mathbb{H}^n, y\in f(x)} (\langle x, x^*\rangle + yy^*)$, де $z = (x,y)$, $z^* = (x^*, y^*)$, $x \in \mathbb{H}^n$, $x^* \in \mathbb{H}^{n*}$; $y, y^* \in \mathbb{H}$. Оскільки графік опорної функції є конусом, то він повністю задається своїм зрізом, наприклад гіперплощиною $l\ :\ z^*_{n+1} = -1$. $W_{\Gamma(f)}(x^*)\bigcap l = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup\limits_{x\in\mathbb{H}^n} (\langle x, x^*\rangle - f(x))$.

Функцією, *спряженою* з f, назвемо функцію, що задається рівністю

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x (\langle x, y\rangle - f(x)). \tag{1}$$

З означення спряженої функції випливає гіперкомплексний аналог нерівності Юнга-Фенхеля [7]:

$$\langle x, y\rangle \notin f(x) + f^*(y). \tag{2}$$

Співвідношення (2) можна переписати у вигляді

$$\langle x, y\rangle \in \mathbb{H} \setminus (f(x) + f^*(y)),$$

або

$$f(x) \bigcap (\langle x, y\rangle - f^*(y)) = \emptyset$$

при всіх $x \in \mathbb{H}^n$, $y \in \mathbb{H}^{n*}$.

Знайдемо функцію, спряжену до функцій $f^*(x)$.

$$f^{**}(x) = (f^*)^*(x) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_y (\langle x, y\rangle - f^*(y)).$$

Побудуємо функції, спряжені до лінійно опуклих функцій, введених у розгляд у попередньому розділі.

Приклад 1. Спряженою з багатозначною афінною функцією $f(x) = \langle x, y_0\rangle + f(\Theta)$, де $f(\Theta)$ — множина, є функція

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x (\langle x, y\rangle - \langle x, y_0\rangle - f(\Theta)) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x (\langle x, y - y_0\rangle - f(\Theta)) =$$

$$= \begin{cases} \mathbb{H}^o \setminus (-f(\Theta)), & \text{якщо } y = y_0, \\ \infty, & \text{якщо } y \neq y_0. \end{cases}$$

Приклад 2. Нехай $E \subset \mathbb{H}^n$, $\mathbb{H}^n \setminus E \neq \emptyset$, $f(x) = \delta(x|E)$. Тоді

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x (\langle x, y\rangle - \delta(x|E)) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \subset E} \langle x, y\rangle,$$

тобто спряженою з індикаторною функцією власної підмножини E буде опорна функція цієї множини.

Будемо записувати $f_1 \supseteq f_2$, якщо $f_1(x) \supseteq f_2(x)$ при всіх x, причому не виключаємо випадок $f_2(x) = \emptyset$ для деяких точок x. Також будемо говорити при цьому, що f_1 є *продовженням* функції f_2, а f_2 є *звуженням* функції f_1. Із включень $f_1 \supseteq f_2$ та рівностей (1) і (2) випливає, що $f_1^* \subseteq f_2^*$.

Теорема 3. *Для кожної функції* $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ *справедливе включення* $f \subset f^{**}$.

Доведення. З нерівності (2) отримаємо

$$\langle x, y\rangle - f^*(y) \notin f(x), \langle x, y\rangle - f^*(y) \subset \mathbb{H}^o \setminus f(x),$$

$$\mathbb{H}^o \setminus (\langle x, y\rangle - f^*(y)) \supset f(x), \bigcap_y [\mathbb{H}^o \setminus (\langle x, y\rangle - f^*(y))] \supset f(x),$$

$$\mathbb{H}^o \setminus \bigcup_y (\langle x, y\rangle - f^*(y)) \supset f(x), f \subset f^{**}.$$

Означення 9. Багатозначна функція $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ називається *відкритою (відповідно, замкненою чи компактною)*, коли її графік є відкритою (відповідно, замкненою чи компактною) множиною в $\mathbb{H}^{n+1}$.

Теорема 4. *Функція, спряжена до відкритої функції, буде замкненою та лінійно опуклою.*

Доведення. Значення спряженої функції можна записати у вигляді $f^*(y) = \bigcap_x (\mathbb{H}^o \setminus (\langle x, y\rangle - f(x)))$. При фіксованому x функція $\mathbb{H}^o \setminus (\langle x, y\rangle - f(x))$ є багатозначною афінною функцією по y, тому її можна подати у вигляді $\langle x, y\rangle + [\mathbb{H}^0 \setminus (-f(x))]$. Графік $\Gamma(f^*)$ є перетином графіків замкнених лінійно опуклих функцій виду $\langle x, y\rangle + [\mathbb{H}^o \setminus (-f(x))]$, тому $\Gamma(f^*)$ є замкненою та лінійно опуклою множиною.

Аналогічно доводяться замкненість і лінійна опуклість функції, що є спряженою до відкритої функції.

Зауваження 1. Відмітимо, що при доведенні теореми 2 відкритість вихідної функції ми використовували тільки у доведенні замкненості спряженої функції. Відповідно, функція, що є спряженою до функції $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$, буде лінійно опуклою.

Теорема 5. *Нехай f — власна лінійно опукла функція. Тоді f^* — власна функція.*

Доведення. Якщо $x_0 \in E_f$, то

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x (\langle x, y\rangle - f(x)) \subset \mathbb{H}^o \setminus (\langle x_0, y\rangle - f(x_0)).$$

Відповідно, $\mathbb{H}\setminus f^*(y) \supset \langle x_0, y\rangle - f(x_0) \neq \emptyset$ для всіх y. З другого боку, оскільки f – власна лінійно опукла функція, то існує афінна функція $l(x) = \langle x, y\rangle + \alpha$, яка не перетинає $\Gamma(f)$. Тоді для цього $y : \langle x, y\rangle + \alpha \notin f(x)$; $\langle x, y\rangle - f(x) \notin -\alpha$; $-\alpha \subset \mathbb{H}^o\setminus(\langle x, y\rangle - f(x))$. Отже, $f^*(y) \supset -\alpha \neq \emptyset$.

Розглянемо лінійне відображення $A\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n$, $A(x) = (l_1(x), \ldots, l_2(x))$. Якщо ковектори $l_1, \ldots, l_n$ лінійно незалежні, то відображення A є сюр'єктивним, а, отже, внаслідок лінійності, є гомеоморфізмом. Доведемо, що обернене відображення A^{-1} також лінійне. Дійсно, $A^{-1}(ax + by) = z$, $A(z) = ax + by$, з іншого боку: $A(aA^{-1}x + bA^{-1}y) = ax + by$. Тепер з гомеоморфності відображення A випливає, що $A^{-1}(ax + by) = z = aA^{-1}(x) + bA^{-1}(y)$.

Отже, довільне лінійне відображення $A\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n$, $A(x) = (l_1(x), \ldots, l_2(x))$, що задається квадратною матрицею, рядки якої є координатами лінійно незалежних ковекторів, є лінійним гомеоморфізмом. Справедливе також обернене твердження.

Теорема 6. *Задано відображення $\Lambda\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n$, яке є гіперкомплексно лінійним гомеоморфізмом, і функцію $g\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$. Нехай*

$$f(x) = \lambda g(\Lambda x + w_0) + \langle x, y_0\rangle + \gamma_0,$$

де $w_0 \in \mathbb{H}^n, y_0 \in \mathbb{H}^{n*}$, $\gamma_0 \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Тоді

$$f^*(y) = \lambda g^*(\lambda^{-1}\Lambda^{-1*}(y - y_0)) - \langle \Lambda^{-1}w_0, y - y_0\rangle - \gamma_0.$$

Доведення. Маємо

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x \big(\langle x, y\rangle - \lambda g(\Lambda x + w_0) - \langle x, y_0\rangle - \gamma_0\big) =$$

$$= \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x \big(\langle x, y - y_0\rangle - \lambda g(\Lambda x + w_0) - \gamma_0\big) =$$

$$= \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x \big(\langle w, \Lambda^{-1*}(y - y_0)\rangle - \lambda g(w) - \langle \Lambda^{-1} w_0, y - y_0\rangle - \gamma_0\big) =$$

$$= \left(\mathbb{H}^o \setminus \bigcup_w \lambda(\langle w, \lambda^{-1}\Lambda^{-1*}(y - y_0)\rangle - g(w))) - \langle \Lambda^{-1} w_0, y - y_0\rangle - \gamma_0\right) =$$

$$= \lambda\left(\mathbb{H}^o \setminus \bigcup_w (\langle w, \lambda^{-1}\Lambda^{-1*}(y - y_0)\rangle - g(w))) - \langle \Lambda^{-1} w_0, y - y_0\rangle - \gamma_0\right) =$$

$$= \lambda g^*(\lambda^{-1}\Lambda^{-1*}(y - y_0)) - \langle \Lambda^{-1} w_0, y - y_0\rangle - \gamma_0.$$

(Нехай $w = \Lambda x + w_0$, тоді $x = \Lambda^{-1}(w - w_0)$, а $\langle x, y - y_0\rangle = \langle \Lambda^{-1} w, y - y_0\rangle - \langle \Lambda^{-1} w_0, y - y_0\rangle = \langle w, \Lambda^{-1*}(y - y_0)\rangle - \langle \Lambda^{-1} w_0, y - y_0\rangle$).

З цієї теореми випливають формули для обчислення деяких спряжених функцій:

$$f(x) = g(x + x_0) \Rightarrow f^*(y) = g^*(y) - \langle y_0, y\rangle;$$

$$f(x) = g(x) + \langle x, y_0\rangle \Rightarrow f^*(y) = g^*(y - y_0);$$

$$f(x) = \lambda g(\mu x), \lambda \neq 0, \mu \neq 0 \Rightarrow f^*(y) = \lambda g^*(\lambda^{-1}\mu^{-1} y).$$

Доведемо гіперкомплексний аналог теореми Фенхеля-Моро.

Теорема 7. *Нехай багатозначна функція $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ така, що $\mathbb{H} \setminus f(x) \neq \emptyset$ для всіх $x \in \mathbb{H}^n$. Тоді $f^{**} = f$ тоді і тільки тоді, коли f є лінійно опуклою.*

Доведення. Доведемо, що рівність $f^{**} = f$ рівносильна лінійній опуклості функції f.

Якщо $f^{**} = f$, то, згідно з зауваженням 2, функція, спряжена до довільної функції, буде лінійно опуклою. Якщо $f(\mathbb{H}^n) \equiv \infty$, то рівність $f^{**} = f$ отримується з формул (1) і (2). Маємо $f^*(y) = \mathbb{H}$ для всіх $y \in \mathbb{H}^{n*}$ і $f^{**} = \infty$. Оскільки за теоремою 2 завжди виконується $f \subset f^{**}$, то достатньо показати, що для лінійно опуклої функції справедливе включення $f \supseteq f^{**}$.

Нехай в деякій точці x_0 має місце нерівність $f(x_0) \neq f^{**}(x_0)$. Тоді існує афінна функція $l(x) = \langle x, y_0\rangle + \alpha$, така, що $\Gamma(l) \bigcap \Gamma(f) = \emptyset$ і $w_0 = \langle x_0, y_0\rangle + \alpha$, де $w_0 \in f^{**}(x_0) \setminus f(x_0)$. Тоді

$$f^*(y_0) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x (\langle x, y_0\rangle - f(x)) = \bigcap_x [\mathbb{H}^o \setminus (\langle x, y_0\rangle - f(x))] \supsetneq (-\alpha),$$

так як $[\langle x, y_0\rangle - f(x)] \neq -\alpha$ для всіх $x \in \mathbb{H}^n$. Для функції f^{**} справедливе включення

$$f^{**}(x_0) = \bigcap_y [\mathbb{H}^o \setminus (\langle x_0, y\rangle - f^*(y))] \subset$$

$$\subset \mathbb{H}^o \setminus (\langle x_0, y_0\rangle - f^*(y_0)) \subset \mathbb{H}^o \setminus (\langle x_0, y_0\rangle + \alpha) = \mathbb{H}^o \setminus w_0.$$

Тому $w_0 \notin f^{**}(x_0)$, що суперечить вибору точки $w_0 \in f^{**}(x_0) \setminus f(x_0)$. Теорема доведена.

Означення 10. Функція f називається *однорідною*, якщо $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для всіх скалярів $\lambda \in \mathbb{H} \setminus 0$.

Теорема 8. *Нехай $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$ є власною лінійною опуклою однорідною функцією і $f(\Theta) = \mathbb{H}^o \setminus 0$. Тоді f є опорною функцією деякої множини.*

Доведення. Розглянемо множину $A = \{y \in \mathbb{H}^{n*} | f(x) \not\ni \langle x, y\rangle\, \forall x \in \mathbb{H}^n\}$ і покажемо, що $f(x) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{y\in A} \langle x, y\rangle = W_A(x)$. Якщо $y \in A$, то $\langle x, y\rangle \notin f(x)$ і $0 \notin \langle x, y\rangle - f(x)$ для всіх x. Відповідно, $f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x\in\mathbb{H}^n} (\langle x, y\rangle - f(x)) = \mathbb{H}^o \setminus f(\Theta) = 0$. Якщо $y \notin A$, то $\langle x, y\rangle \in f(x)$ для деякого $x_0 \in \mathbb{H}^n$, $x_0 \neq 0$. Тоді

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \cup_{x\in\mathbb{H}^n} (\langle x, y\rangle - f(x)) = \mathbb{H}^o \setminus (f(\Theta) \cup_{x\in\mathbb{H}^n\setminus\Theta} (\langle x, y\rangle - f(x))) =$$

$$= \mathbb{H}^o \setminus ((\mathbb{H}^o \setminus 0) \cup (\langle x_0, y\rangle - f(x_0))) = \mathbb{H}^o \setminus \left((\mathbb{H}^o \setminus 0) \bigcup 0\right) = \infty.$$

Згідно з теоремою 5 одержуємо, що f^* є власною функцією. Тому $A \neq \emptyset$ і $f^* = \delta_A$. Беручи до уваги гіперкомплексну теорему Фенхеля–Моро і приклад 2, одержуємо рівність $f = f^{**} = \delta_A^* = W_A$. Тобто f — опорна функція множини A.

Звідси отримуємо наступне твердження.

Наслідок 1. *Якщо однорідна лінійно опукла функція $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$ є відмінною від афінної, то*

$$f^*(y) = \delta(y|E_{f^*}).$$

Теорема 9. *Якщо $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \longrightarrow \mathbb{H}$ — однорідна лінійно опукла функція, відмінна від афінної, то*

$$f(x) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{y\in E_{f^*}} \langle x, y\rangle.$$

Доведення. Якщо f — лінійно опукла функція, то за теоремою Фенхеля–Моро $f = f^{**} = \delta^*$. Беручи до уваги приклад 2, переконуємось, що f є опорною функцією множини E_{f^*}.

Одним з прикладів однорідної функції буде гіперкомплексна функція Мінковського, яку означимо наступним чином. Нехай E — множина в $\mathbb{H}^n$, $\Theta \in E$. Покладемо $R_E(x) = \{w \in \mathbb{H} \,|\, w^{-1}x \in E\}$ при $x \in \mathbb{H}^n \setminus \Theta$, $R_E(\Theta) = \mathbb{H} \setminus 0$. Покажемо однорідність функції R_E. Маємо $R_E(\lambda x) = \{w \in \mathbb{H} \,|\, w^{-1}(\lambda x) \in E\} = \{\lambda w \in \mathbb{H} \,|\, (\lambda w)^{-1}(\lambda x) = w^{-1}\lambda^{-1}(\lambda x) = w^{-1}x \in E\} = \lambda R_E(x)$.

Однорідна функція має наступні властивості:

1) якщо E – гіперкомплексно опукла множина, то функція R_E гіперкомплексно опукла;

2) якщо $x \in E$, то $1 \in R_E$; якщо $x \notin E$, то $1 \notin R_E$.

Розглянемо сім'ї рівнянь

$$w = \langle x, y\rangle - \alpha, \tag{3}$$

які при фіксованому y задають сім'ї паралельних гіперплощин в $\mathbb{H}^{n+1}$, що залежать від α. Якщо $\alpha \in \langle x_0, y\rangle - f(x_0)$, то ця гіперплощина перетинає графік $\Gamma(f)$. Поклавши $x = 0$, отримаємо, що множина $\bigcup_{x_0}(\langle x_0, y\rangle - f(x_0))$ задає образ графіка $\Gamma(f)$ при проектуванні π_L сім'єю (4) на вісь $x = 0$. Тому згідно (1) і (2)

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \pi_L(\Gamma(f)). \tag{4}$$

Наслідок 2. *Якщо f — відкрите відображення, то $f^*(y)$ компактне.*

Цей наслідок випливає з (4) і того, що проекція π_L зберігає відкритість.

Наслідок 3. *Якщо f — компактне відображення, то $f^*(y)$ відкрите.*

Наслідок випливає з (4), оскільки неперервне однозначне відображення π_L зберігає компактність.

Наслідок 4. *Якщо f — сильно гіперкомплексно опукле відображення, то $f^*(y)$ — ациклічне.*

Наслідок випливає з (4) і наслідку 2.

Означення 11. Нехай $f_\alpha \colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}, \alpha \in A$, є багатозначними функціями. Функцію $(\bigcup_\alpha f_\alpha)(x) := \bigcup_\alpha f_\alpha(x)$ назвемо *об'єднанням функцій* f_α, а $(\bigcap_\alpha f_\alpha)(x) := \bigcap_\alpha f_\alpha(x)$ — їх *перетином.*

Для спряжених функцій має місце теорема двоїстості.

Теорема 10. *Нехай* $f_\alpha \colon \mathbb{H}^{\mathrm{n}} \longrightarrow \mathbb{H}, \alpha \in \mathrm{A}$, *є багатозначними функціями. Тоді виконуеться рівність*

$$\left(\bigcup_\alpha f_\alpha\right)^* = \bigcap_\alpha f_\alpha^*.$$

Доведення. Використовуючи вираз (1) для спряжених функцій, одержуємо

$$\left(\bigcup_\alpha f_\alpha\right)^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x \left(\langle x, y\rangle - \bigcup_\alpha f_\alpha(x)\right) =$$

$$= \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x \bigcup_\alpha \left(\langle x, y\rangle - f_\alpha(x)\right) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_\alpha \bigcup_x \left(\langle x, y\rangle - f_\alpha(x)\right) =$$

$$= \bigcap_\alpha \left(\mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x (\langle x, y\rangle - f_\alpha(x))\right) = \bigcap_\alpha f_\alpha^*(y).$$

Література

[1] *Зелинский Ю.Б.* Выпуклость. Избранные главы. — К. : Ін-т математики НАН України, 2012. — 280 с.

[2] *Зелинский Ю.Б.* О многозначных линийно выпуклых функциях // Комплексный анализ, алгебра и топология. — 1990. — К.: Ин-т матемематиеи АН УССР. — С. 52 – 61.

[3] *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. — М. : Наука, 1973. — 144 с.

[4] *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества: Пер. с нем. — М.: Наука, 1985. — 336 с.

[5] *Мкртчян Г. А.* О гиперкомплексной выпуклости // V Тираспол. симпоз. по общ. топологии. – Кишинев : Штиинца, 1985. — С. 177.

[6] *Мкртчян Г. А.* О гиперкомплексно выпуклых множествах. — Киев: ИМ АН УССР, 1987. — 17 с. — (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 87.42)

[7] *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971. — 680 с.

[8] *Ткачук М. В., Осіпчук Т. М.* Аналітичний критерій лінійної опуклості для областей Гартогса з гладкою межею в $\mathbb{H}^2$// Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, №2. — С. 226 — 236.