Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 192–204

УДК 517.518

Назаренко М. О., Брязкало Т. А.[*]

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ)

[*] **tianan@yandex.ru**

Несиметрична фрактальна апроксимація функцій у просторі $L_p^{\alpha,\beta}(I)$

Sufficient conditions to the sequence of functions that are the result of fractal iterated operator transformation into some function coincided on the segment. We obtained error estimates for fractal approximation, which is analogous to Barnsley theorem about a collage of fractal approximation in the space of integrable in p degree functions with asymmetric metric. Super fractal approximation of sets has been adapted to approximation of functions on $L_p^{\alpha,\beta}(I)$.

Встановлені достатні умови для того, щоб послідовність функцій, які є результатом дії ітераційного оператора фрактального перетворення на деяку функцію, збігалася на відрізку. Одержано оцінки для похибки фрактального наближення, що є аналогами теореми Барнслі про колаж з фрактального наближення на просторі інтегровних у p-му степені функцій з несиметричною метрикою. Окремим випадком було адаптовано суперфрактальну апроксимації множин до апроксимації функцій у $L_p^{\alpha,\beta}(I)$.

1. Вступ. Результати статті відносяться головним чином до задач знаходження умов збіжності алгоритмів фрактальної та суперфрактальної апроксимації, а також оцінок похибки фрактального наближення в несиметричній метриці. Розглядається випадок простору інтегровних у p-му степені на відрізку I функцій з несиметричною метрикою. Досліджується випадок при $1 \leq p < \infty$. Ці задачі, важливі як з теоретичної, так і з прикладної точки зору, протягом багатьох років викликають інтерес вітчизняних та закордонних фахівців. Вагомі результати були отримані у роботах Барнслі, Гатчінсона, Жакена, Стенфло [1-3].

У роботі отримані достатні умови для того, аби оператори фрактального та суперфрактального перетворення були стискуючими або принаймні евантуально стискуючими на певній замкненій множині у просторі інтегровних в деякому степені функцій з несиметричною метрикою на відрізку. Їх виконання гарантує збіжність послідовності функцій, які є результатом дії ітерацій оператора фрактального перетворення на деяку функцію, до його єдиної нерухомої точки у метриці простору функцій.

Поведінка послідовності ітерацій фрактального та суперфрактального операторів в метричному просторі, а також в сенсі збіжності в просторі інтегровних в деякому степені функцій досліджена в даній роботі. Саме від неї залежить, чи буде досліджуваний оператор стискуючим чи хоча б евантуально стискуючим.

Далі розглядається випадок $0 < p < 1$, коли $L_p^{\alpha,\beta}(I)$ не є метричним простором. Зауважимо, що, застосовуючи аналог нерівності трикутника, встановлюються результати аналогічні, як і для $1 \leq p < \infty$.

2. Фрактальна апроксимація у просторі $L_p^{\alpha,\beta}(I)$, $1 \leq p < \infty$. Нехай задано відрізок $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ та функцію $f_0 \in L_p^{\alpha,\beta}(I)$. Виберемо:

1. Набір точок $\{x_i\}_{i=0}^n$ таких, що $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, тобто таких, що утворюють розбиття відрізка I. Позначимо $I_i = [x_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{1,\ldots,n-1}$, $I_n = [x_{n-1}, x_n]$. Очевидно, що $I_i \subset I$, $i = \overline{1,\ldots,n}$; $\bigcup_{i=1}^n I_n = I$; $I_{i_1} \cap I_{i_2} = \varnothing$, $1 \leq i_1 \neq i_2 \leq n$.

2. Набори точок $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ таких, що $a \leq \lambda_i < \mu_i \leq b$. Позначимо $I_i{}' = [\lambda_i, \mu_i)$ або $(\lambda_i, \mu_i]$, $i = \overline{1,\ldots,n-1}$; $I_n{}' = [\lambda_n, \mu_n]$.

3. Набір $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ бієкцій $\varphi_i\colon I_i{}' \longrightarrow I_i$, $i = \overline{1,\ldots,n}$, що будуть гомеоморфізмами.

4. Набір $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ відображень $\psi_i\colon I_i{}' \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1,...,n}$, що задовольняють умову Ліпшиця за другою змінною, а саме:

$$|\psi_i(x, y_1) - \psi_i(x, y_2)| \leq d_i |y_1 - y_2| \;\; \forall x \in I, \;\{y_1, y_2\} \subset \mathbb{R},\; d_i > 0.$$

Нехай $L_p(a,b)$, $1 \leq p < \infty$, — простір інтегровних у p-му степені на відрізку I функцій.

Задамо числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ і визначимо на $L_p\,(a,b)\,,\ 1 \le p < \infty$, функціонал

$$\rho(f,g) = \left(\int_a^b \left| \alpha (f-g)_+ + \beta (f-g)_- \right|^p dx \right)^{1/p} =$$

$$(\int_a^b |(f-g)[\alpha\, sign(f-g)_+ + \beta\, sign\,(f-g)_-]|^p dx)^{1/p},$$

де $f_\pm\,(t) = \max\,(\pm f\,(t)\,,0)\,.$

Цей функціонал буде метрикою в $L_p(a,b)$, $1 \le p < \infty$ (див. [4]). Позначимо простір з даною метрикою через $L_p^{\alpha,\beta}\,((a;b))\,.$

Розглянемо наближення функції $f \in L_p^{\alpha,\beta}$ атрактором динамічної системи $\left(T^{\circ k}\right)_{k=0}^{\infty}$, породженої ітераціями деякого оператора T, у випадку, коли атрактором є нерухома точка f_T^* оператора T. Зауважимо, що f_T^* може виявитися функцією, графік якої має дробову розмірність за Хаусдорфом – Безиковичем [1–3], тобто фракталом.

Нагадаємо: евантуально стискуючим оператором називається оператор, що задовольняє умову Ліпшиця, і у якого існує його степінь, що є оператором стиску.

Найменший показник такого степеня називається порядком евантуально стискуючого оператора.

Нехай

$$M_T^{(k)} = \sup_{\substack{f \ne g,\\ \{f,g\} \subset X}} \frac{\rho\left(T^{\circ k}\,(f)\,, T^{\circ k}\,(g)\right)}{\rho\,(f,g)} < +\infty,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

Коефіцієнтом стиску евантуально стискуючого оператора T порядку m називається величина $M_T^{(m)}$.

Відмітимо, що у евантуально стискуючого оператора всі його степені, починаючи з деякого, є стискуючими операторами. Дійсно, оскільки $M_T^{(m)} < 1$, то, починаючи з деякого k,

$$M_T^{(mk+p)} \le \left(M_T^{(m)}\right)^k \left(M_T^{(1)}\right)^p < 1,\ 0 \le p \le m-1.$$

Нагадаємо [2], що оператором фрактального перетворення називається відображення $T\colon L_p^{\alpha,\beta} \longrightarrow L_p^{\alpha,\beta}$

$$(T\,(f))\,(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \left(\varphi_i^{-1}\,(x)\,, f\left(\varphi_i^{-1}\,(x)\right)\right) \chi_{I_i}\,(x)\,,\ f \in L_p^{\alpha,\beta}\,(I)\,,\ x \in I.$$

Тут через $\chi_A(x)$ позначено індикаторну функцію множини A і вважається, що добуток невизначеного виразу на нульове значення індикаторної функції дорівнює нулю.

Отже, оператор T задається розбиттям відрізка на проміжки I_i, виділенням підпроміжків $I_i{}'$ відрізка I, заданням перетворень площини $\Phi_i(x,y) = (\varphi_i(x), \psi_i(x,y))$, і переводить довільну функцію $f \in L_p^{\alpha,\beta}(I)$ у кусковозадану функцію, що є на кожному з проміжків деформованою копією звуження f на проміжок.

Розглянемо множину $\mathcal{F} \subset L_p^{\alpha,\beta}(I)$, $1 \le p < \infty$, інваріантну відносно фрактального оператора T, тобто таку, що $T(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$.

Зауважимо, що для T знайдеться його ітерація, можливо, з іще більшим номером, починаючи з якої всі наступні ітерації є стискуючими операторами на $\mathcal{F}$. Евантуально стискуючий оператор деякого натурального степеня просто називається евантуально стискуючим [2].

Теорема 1. *Нехай задано набори точок $\{x_i\}$, $\{\lambda_i\}$, $\{\mu_i\}$, біекції $\{\varphi_i\}$ є дифеоморфізмами, відображення $\{\psi_i\}$ задовольняють умови:*

$$\psi_i \in C\left(I_i{}' \times \mathbb{R}\right),$$

$$|\psi_i(x,y_1) - \psi_i(x,y_2)| \le d_i\,|y_1 - y_2|\,,\ x \in I_i{}', \{y_1,y_2\} \subset \mathbb{R},\ d_i > 0.$$

Тоді оператор $T\colon L_p^{\alpha,\beta}(I) \longrightarrow L_p^{\alpha,\beta}(I)$ є неперервним відносно метрики

$$\rho(f,g) = \left(\int_a^b \left|(f-g)\left[\alpha\, sign\,(f-g)_+ + \beta\, sign(f-g)_-\right]\right|^p dt\right)^{1/p}$$

у просторі $L_p^{\alpha,\beta}(I)$, $1 \le p < +\infty$.

Доведення. Коректність визначення оператора $T(f)$ на класі еквівалентності функції f очевидна.

Належність функції $T(f)$ класу $L_p^{\alpha,\beta}(I)$, $1 \le p < +\infty$, перевіримо наступним чином:

$$\int_I \left|\alpha(T(f))_+(x) + \beta(T(f))_-(x)\right| dx =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{I_i} |\alpha\psi_+(\varphi_i^{-1}(x), f(\varphi_i^{-1}(x))) + \beta\psi_-(\varphi_i^{-1}(x), f(\varphi_i^{-1}(x)))|^p dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\varphi_i^{-1}(I_i)} |\alpha\psi_{i+}(x, f(x)) + \beta\psi_{i-}(x, f(x))|^p |\varphi'_i(x)| \, dx \leq$$

$$\leq 2^{p-1} \sum_{i=1}^{n} \int_{\varphi_i^{-1}(I_i)} (|\alpha\psi_{i+}(x, f(x_0)) + \beta\psi_{i-}(x, f(x_0))|^p +$$

$$+(\left|\alpha(\psi_i(x, f(x)) - \psi_{i+}(x, f(x_0)))_+ + \beta(\psi_i(x, f(x)) - \psi_{i+}(x, f(x_0)))_-\right|^p)\times$$

$$\times|\varphi'_i(x)|dx \leq 2^{p-1} \sum_{i=1}^{n} \int_{\varphi_i^{-1}(I_i)} |\alpha\psi_{i+}(x, f(x_0)) + \beta\psi_{i-}(x, f(x_0))|^p +$$

$$+d_i^p \left|\alpha(f(x) - f(x_0))_+ + \beta(f(x) - f(x_0))_-\right|^p) \left|\varphi'_i(x)\right| dx < +\infty$$

Неперервність оператора T випливає з нерівностей:

$$\rho(T(f), T(g))^p =$$

$$\int_I \left|\alpha((T(f))(x) - (T(g))(x))_+ + \beta((T(f))(x) - (T(g))(x))_-\right|^p dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} |\alpha\big(\psi_i\left(\varphi_i^{-1}(x), f\left(\varphi_i^{-1}(x)\right)\right) - \psi_i\left(\varphi_i^{-1}(x), g\left(\varphi_i^{-1}(x)\right)\right)\big)_+ +$$

$$\beta\big(\psi_i\left(\varphi_i^{-1}(x), f\left(\varphi_i^{-1}(x)\right)\right) - \psi_i\left(\varphi_i^{-1}(x), g\left(\varphi_i^{-1}(x)\right)\right)\big)_-|^p dx \leq \sum_{i=1}^{n} d_i^p \cdot$$

$$\cdot \int_{I_i} |\alpha\big(f\left(\varphi_i^{-1}(x)\right) - g\left(\varphi_i^{-1}(x)\right)\big)_+ + \beta\big(f\left(\varphi_i^{-1}(x)\right) - g\left(\varphi_i^{-1}(x)\right)\big)_-||\varphi'_i(x)|^p dx \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} d_i^p \max_I \left|\varphi_i'\right| \rho(f, g)^p.$$

Таким чином, теорему доведено.

Розглянемо множину функцій $\mathcal{F}$: $\mathcal{F} \subset L_p^{\alpha,\beta}(I)$.

Теорема 2. *Нехай задано набори точок* $\{x_i\}$, $\{\lambda_i\}$, $\{\mu_i\}$, *бієкції* $\{\varphi_i\}$ *є дифеоморфізмами, відображення* $\{\psi_i\}$ *задовольняють умови*:

$$\psi_i \in C\left(I_i' \times \mathbb{R}\right),$$

$$|\psi_i(x, y_1) - \psi_i(x, y_2)| \leq d_i |y_1 - y_2|, \; x \in I_i', \{y_1, y_2\} \subset \mathbb{R}, \; d_i > 0.$$

Існує границя

$$w_p = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n}(d_{i_1}...d_{i_k})^p v_{i_1\dots i_k,p;\alpha,\beta}\right)^{1/k} < +\infty,$$

де

$$v_{i_1\dots i_k,p;\alpha,\beta} =$$

$$\sup_{\substack{f\neq g\\ \{f,g\}\subset\mathcal{F}}}[\int_{\varphi_{i_k}^{-1}\left(I_{i_k}\cap\dots\cap\varphi_{i_2}^{-1}\left(I_{i_2}\cap\varphi_{i_1}^{-1}(I_{i_1})\right)\dots\right)}\left|\alpha(f-g)_+ + \beta(f-g)_-\right|\times$$

$$\times\left|(\varphi_{i_1}\circ\dots\circ\varphi_{i_k})'\right|dx\cdot\left(\int_I\left|\alpha(f-g)_+ + \beta(f-g)_-\right|^p dx\right)^{-1}].$$

Доведення. Позначимо

$$w_{k,p} = \sum_{i_1,\dots,i_k}^{n} d_{i_1}^p...d_{i_k}^p v_{i_1\dots i_k,p;\alpha,\beta}.$$

Існування границі $w_p = \lim\limits_{k\to\infty} w_{k,p}^{1/k} = \inf\limits_{k\geq 1} w_{k,p}^{1/k} < +\infty$ випливає з міркувань субмультиплікативності [2], тобто $w_{k_1+k_2} \leq w_{k_1,p}w_{k_2,p}.$

Нехай

$$M_k\left(T,\mathcal{F},L_{p;\alpha,\beta}(I)\right) = \sum_{i_1,\dots i_k=1}^{n} d_{i_1}^p...d_{i_k}^p v_{i_1\dots i_k}\left(\mathcal{F},L_p^{\alpha,\beta}\right),\ k\geq 1.$$

Теорема 3. *Якщо* $\inf_{k\geq1}M_k\left(T,\mathcal{F},L_p^{\alpha,\beta}\right) < 1$, *то оператор* T *— евантуально стискуючий на* $\mathcal{F}$.

Доведення. Оператор T — евантуально стискуючий на $\mathcal{F}$, оскільки існує такий номер k, що $w_{k,p} < 1$. Дійсно, запишемо нерівності, з яких випливає потрібний результат:

$$\sup_{\substack{f\neq g,\\ \{f,g\}\subset F}}\frac{\rho(T(f),T(g))^p}{\rho(f,g)^p} \leq \sum_{i=1}^{n} d_i^p v_{i,p},$$

....

$$\sup_{\substack{f\neq g,\\ \{f,g\}\subset F}}\frac{\rho\left(T^{\circ k}(f),T^{\circ k}(g)\right)^p}{\rho(f,g)^p} \leq \sum_{i=1}^{n} d_{i_1}^p...d_{i_k}^p v_{i_1\dots i_k,p}.$$

Теорема 4. *Якщо $\mathcal{F}$ замкнена, то у оператора T існує єдина нерухома точка f_T^* в $\mathcal{F}$ і для довільної $f \in \mathcal{F}$ маємо $T^{\circ k}(f) \to f_T^*,\ k \to \infty$. Ця збіжність буде мати експоненційний характер.*

Доведення. Доведення теореми випливає з узагальнення принципу Банаха про стискуючі відображення.

Перенесемо тепер визначення оператора T на функцію $f \in L_p^{\alpha,\beta}(I)$, при $0 < p < 1$. Даний простір не є метричним, бо не виконується нерівність трикутника. Але є аналогічна нерівність, що має місце: $\rho(f,g) \le C \cdot (\rho(f,h) + \rho(h,g)),\ \{f,g,h\} \subset L_p^{\alpha,\beta}(I),\ C := 2^{\frac{1}{p}-1} > 1$, $0 < p < 1$. Оскільки маємо наступні нерівності:

$$\left(\int_I \left|\alpha(f-g)_+ + \beta(f-g)_-\right|^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\int_I \left|\alpha(f-h)_+ + \beta(f-h)_- + \alpha(h-g)_+ + \beta(h-g)_-\right|^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\int_I \left(\left|\alpha(f-h)_+ + \beta(f-h)_-\right|^p + \left|\alpha(h-g)_+ + \beta(h-g)_-\right|^p\right) dx\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_I \left|\alpha(f-h)_+ + \beta(f-h)_-\right|^p dx + \int_I \left|\alpha(h-g)_+ + \beta(h-g)_-\right|^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\int_I \left|\alpha(f-h)_+ + \beta(f-h)_-\right|^p dx\right)^{1/p} +$$

$$+ 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\int_I \left|\alpha(h-g)_+ + \beta(h-g)_-\right|^p dx\right)^{1/p}.$$

Отже, аналогічно до метричного простору вводяться поняття збіжної послідовності, фундаментальної послідовності, повного простору, відображення стиску і всі інші, що використовуються [7]. Твердження 1 – 3 залишаються правильними, а їх доведення буде аналогічне наведеним вище. Враховуючи аналог нерівності трикутника, можливо встановити аналог твердження 4, скориставшись метричною теоремою про нерухомі точки, що узагальнює теорему Банаха.

Як і в [6], нехай задано пару (X, ρ), де функція $\rho\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ задовольняє стандартні аксіоми метрики, крім нерівності трикутника, замість якої виконується умова:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall \{x,y,z\} \subset X,\ \rho(x,z) + \rho(z,y) \le \delta :\ \rho(x,y) \le \varepsilon.$$

Припустимо, що (X,ρ) є повним хаусдорфовим простором (тобто для довільних двох точок простору знайдуться ρ-кулі з центрами в цих двох точках, які не перетинаються). Нехай відображення $f\colon X \longrightarrow X$ є відображенням стиску, тобто $\rho(f(x), f(y)) \leq \leq d\rho(x,y)$ для всіх $\{x,y\} \subset X$ і неспадної функції $\varphi\colon [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^{\circ n}(t) = 0$, $t \geq 0$. Тоді існує єдина нерухома точка $x_* \in X$ відображення f, причому, для всіх $x \in X:\ f^{\circ n}(x) \to x_*, n \to \infty$.

Також, можна покласти $\varphi(t) = d\,t,\ t \geq 0,\ 0 \leq d < 1$. З нерівності типу трикутника випливає вказана умова на відстань.

Отже, аналоги тверджень 1 – 4 для функцій з $L_p^{\alpha,\beta}(I)$, $0 < p < 1$ є справедливими.

3. Суперфрактальна апроксимація у просторі $L_p^{\alpha,\beta}(I)$, $1 \leq p < \infty$. У сучасній теорії фрактальних наближень важливу роль займає таке поняття як суперфрактали. Адаптуємо методи апроксимації множин, введені Майклом Барнслі до апроксимації функцій з інтегровними степенями. У статтях [8–10] математиків було здійснено перші кроки в описі алгоритму суперфрактальної інтерполяції. Дослідимо граничну поведінку послідовності нелінійних операторів у сенсі несиметричної збіжності.

Нехай задано відрізок $I = [a,b] \subset \mathbb{R},\ \Omega = \{1,...,m\}^{\infty}$.

a. Набір точок $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ таких, що $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, тобто таких, що утворюють розбиття відрізка I. Позначимо $I_i = = [x_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{1,\ldots,n-1}$, $I_n = [x_{n-1}, x_n]$. Очевидно, що $I_i \subset I$, $i = \overline{1,\ldots,n}$; $\bigcup_{i=1}^{n} I_n = I$; $I_{i_1} \cap I_{i_2} = \varnothing,\ 1 \leq i_1 \neq i_2 \leq n$.

b. Набори точок $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\mu_i\}_{i=1}^{n}$ таких, що $a \leq \lambda_i < \mu_i \leq b$. Позначимо $I_i{}' = [\lambda_i, \mu_i)$ або $(\lambda_i, \mu_i]$, $i = \overline{1,\ldots,n-1}$; $\overline{I_n{}' = [\lambda_n, \mu_n]}$.

c. Набір $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ бієкцій $\varphi_i\colon I_i{}' \longrightarrow I_i$, $i = \overline{1,\ldots,n}$, що будуть гомеоморфізмами.

d. Набір $\{\psi_{ij}\}_{i=1}^{n}$ відображень $\psi_{ij}\colon\ I_i{}' \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1,\ldots,n}$, що задовольняють умову Ліпшиця за другою змінною, а саме

$$|\psi_{ij}(x,y) - \psi_{ij}(x,y')| \leq \delta_{ij}\,|y - y'|\,,\ x \in I_i{}',\ y, y' \in \mathbb{R},\ \delta_{ij} > 0,$$

$$\int\limits_{I_i{}'} |\psi_{ij}(x,y)|^p dx < +\infty,\ y \in \mathbb{R}.$$

Позначимо $\tilde{\delta}_i := \max\limits_{1 \leq j \leq m} \delta_{ij}$.

Суперфрактальні оператори $T_k\colon \Omega \times L_p^{\alpha,\beta}(I) \longrightarrow L_p^{\alpha,\beta}(I)$, $k \geq 1$, $1 \leq p < +\infty$, та суперфрактальну функцію $T_\infty = g_j^*\colon \Omega \longrightarrow L_p^{\alpha,\beta}(I)\,,\ 1 \leq p < +\infty$, задамо наступним чином:

$$(T_k(j,f))(x) = T_k(j,f,x) := \psi_{i^1 j_1}(\varphi_{i^1}^{-1}(x), \psi_{i^2 j_2}(\varphi_{i^2}^{-1}\circ$$

$$\circ\varphi_{i^1}^{-1}(x), ...\psi_{i^k j_k}(\varphi_{i^k}^{-1}\circ ...\circ \varphi_{i^1}^{-1}, f\circ \varphi_{i^k}^{-1}\circ ...\circ \varphi_{i^1}^{-1}(x))...)),$$

$$i^1 = i^1\left(x\right) : x \in I_{i^1},\ i^2 = i^2\left(x\right) : \varphi_{i^1}^{-1}\left(x\right) \in I_{i^2},\ i^3 = i^3\left(x\right) : \varphi_{i^2}^{-1}\circ$$

$$\circ\varphi_{i^1}^{-1}\left(x\right) \in I_{i^3}, \dots,$$

$$g_j^*\left(x\right) := \lim_{k\to\infty}\left(T_k\left(j,f\right)\right)\left(x\right),\ j \in \Omega,\ f \in L_p^{\alpha,\beta}\left(I\right),\ 1 \leq p < +\infty,\ x \in I.$$

Зауважимо, що $T_k\left(j,f,x\right)$ залежить лише від k перших компонент j. Вважатимемо, що $\left(T_0\left(j,f\right)\right)\left(x\right) = T_0\left(j,f,x\right) := f\left(x\right)$.

Розглянемо для фіксованого $j \in \Omega$ граничну поведінку суперфрактальних операторів $T_k\left(j,\cdot\right) : L_p^{\alpha,\beta}\left(I\right) \longrightarrow L_p^{\alpha,\beta}\left(I\right),\ k \geq 1$, у просторі $L_p^{\alpha,\beta}\left(I\right)$, $1 \leq p < +\infty$.

Позначимо

$$\varphi_{i_k}^{-1}\left(I_{i_k} \cap \varphi_{i_{k-1}}^{-1}\left(I_{i_k-1} \cap ...\varphi_{i_2}^{-1}\left(I_{i_2} \cap \varphi_{i_1}^{-1}\left(I_{i_1}\right)\right)...\right)\right) =: {I'}_{i_1...i_k} = {I'}_i,$$

$$i := (i_1, ..., i_k) \in \{1, ..., n\}^k.$$

Нехай $R_k := \Big\{\{r_1, ..., r_s\} \,|\, \{r_1, ..., r_s\} \subset \{1, ..., n\}^k, r_1 \neq ...r_s, s \geq 1\Big\}$ — множина невпорядкованих наборів з $\{1, ..., n\}^k$; $J_{r_1,...,r_s} := := cl\left({I'}_{r_1} \cap {I'}_{r_s} \backslash \bigcup_{i \in \{1,...,n\}^k \backslash \{r_1,...,r_s\}} {I'}_i\right)$ — відрізок чи об'єднання відрізків (при $|J_{r_1,...,r_s}| > 0$), $\{r_1, ..., r_s\} \in R_k$, де $cl\left(J\right)$ — замикання J. Маємо: $|J_{r_1,...,r_s} \cap J_{{r_1}',...,{r_s}'}| = 0,\ \{r_1, ..., r_s\} \neq \{{r_1}', ..., {r_s}'\}$.

Теорема 5. *Припустимо, що виконуються умови* a – d *та такий числовий ряд збігається:* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_p^{(k)} :=$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \max_{\substack{r_1,...,r_s \in R_k:\\ |J_{r_1,...,r_s}|>0}} \max_{x \in J_{r_1,...,r_s}} \sum_{\substack{i \in 1,...,n^k:\\ {I'}_i \supset J_{r_1,...,r_s}}} {\tilde{\delta}_{i_1}...\tilde{\delta}_{i_k}}^p \cdot \left|(\varphi_{i_1}\circ ...\circ \varphi_{i_k})'(x)\right|^{1/p} < +\infty. \tag{1}$$

Тоді оператори $T_k\colon \Omega \times L_p^{\alpha,\beta}(I) \longrightarrow L_p^{\alpha,\beta}(I)$, $k \geq 1$, $1 \leq p < +\infty$ *визначаються коректно, тобто* $T_k(j,f)$ *не залежить від вибору представника у класі еквівалентності* $f \in L_p^{\alpha,\beta}(I)$ *та* $T_k\left(j, L_p^{\alpha,\beta}(I)\right) \subset \subset L_p^{\alpha,\beta}(I)$, $j \in \Omega$.

Оператор $T_\infty = \Omega \to L_p^{\alpha,\beta}(I)$, $1 \leq p < +\infty$ *визначений коректно, тобто границя* $g_j^*(x)$ *існує в сенсі простору* $L_p^{\alpha,\beta}(I)$ *для всіх* $j \in \Omega$ *та не залежить від* $f \in L_p^{\alpha,\beta}(I)$.

Оператор $T_k(j,\cdot)$ *діє у просторі* $L_p^{\alpha,\beta}(I)$ *неперервно.*

Функція g_j^* *задовольняє рівність* $T_k\left(j, g^*_{S^k j}\right) = g_j^*$, $j \in \Omega$, $k \geq 1$.

Доведення. Якщо $f = g$ в $L_p^{\alpha,\beta}(I)$, то $T_k(j,f) = T_k(j,g)$ в $L_p^{\alpha,\beta}(I)$. Дійсно,

$$\rho(T_1(j,f), T_2(j,g))^p \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \max_{I'_i} |\varphi'_i| \cdot d_{ij}^p \int_{I'_i} \left|\alpha(f-g)_+ + \beta(f-g)_-\right|^p dx = 0,\ d_{ij} > 0,$$

тобто, $T_1(j,f) = T_1(j,g)$ в $L_p^{\alpha,\beta}(I)$. Враховуючи, що має місце подання

$$T_{k+q}(j,f,x) = T_k\left(j, T_q\left(S^k j, f, \cdot\right), x\right),$$

де $S\colon \Omega \longrightarrow \Omega$ — зсув, $S(j_1, j_2, ...) = (j_2, j_3, ...)$, тоді, $T_2(j,f) = = T_2(j,g), \ldots, T_k(j,f) = T_k(j,g)$ в $L_p^{\alpha,\beta}(I)$.

Крім того,

$$\left(\int_{I'_i} |\alpha\psi_{ij;+}(x, f(x)) + \beta\psi_{ij;-}(x, f(x))|^p dx\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\int_{I'_i} |\alpha\psi_{ij;+}(x,y) + \beta\psi_{ij;-}(x,y)|^p dx\right)^{1/p} +$$

$$+\delta_{ij}\left(\int_{I'_i} |\alpha\psi_{ij;+}(f(x),y) + \beta\psi_{ij;-}(f(x),y)|^p dx\right)^{1/p} <$$

$$< +\infty,\ f \in L_p^{\alpha,\beta}(I),$$

тоді,

$$\int_I \left|\alpha(T_1(j,f,x))_+ + \beta(T_1(j,f,x))_-\right|^p dx \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \max_{I'_i} |\varphi'_i| \cdot \int_{I'_i} |\alpha\psi_{ij;+}(x, f(x)) + \beta\psi_{ij;-}(x, f(x))|^p dx < +\infty,$$

тобто,

$$T_1\left(j, L_p^{\alpha,\beta}(I)\right) \subset L_p^{\alpha,\beta}(I).$$

Враховуючи,

$$T_{k+q}(j, f, x) = T_k\left(j, T_q\left(S^k j, f, \cdot\right), x\right),$$

$$T_k\left(j, L_p^{\alpha,\beta}(I)(I)\right) \subset T_{k-1}\left(j, L_p^{\alpha,\beta}(I)(I)\right) \subset \ldots \subset L_p^{\alpha,\beta}(I),$$

$$\rho(T_k(j,f), T_k(j,g))^p \leq$$

$$\int_I (\delta_{i^1(x),j_1} \ldots \delta_{i^k(x),j_k})^p \cdot |\alpha f - g)_+ + \beta(f-g)_-|^p \circ \varphi^{-1}_{i^k(x)} \circ \ldots \circ \varphi^{-1}_{i^1(x)}(x) dx =$$

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n: \\ |I'_i| > 0}} ((\delta_{i_1 j_1} \ldots \delta_{i_k j_k})^p \int_{I'_i} |\alpha(f-g)_+ + \beta(f-g)_-|^p |(\varphi_{i_1} \circ \ldots \circ \varphi_{i_k})'| dx) =$$

$$\sum_{\Upsilon} ((\delta_{i_1 j_1} \ldots \delta_{i_k j_k})^p \sum_{\Psi} \int_{J_{r_1,\ldots,r_s}} |\alpha(f-g)_+ + \beta(f-g)_-|^p |(\varphi_{i_1} \circ \ldots \circ \varphi_{i_k})'| dx) =$$

$$\sum_{\Psi} \int_{J_{r_1,\ldots,r_s}} (\sum_{\Upsilon} (\delta_{i_1 j_1} \ldots \delta_{i_k j_k})^p |(\varphi_{i_1} \circ \ldots \circ \varphi_{i_k})'|) |\alpha(f-g)_+ + \beta(f-g)_-|^p dx \leq$$

$$\leq \max_{\Psi} \max_{x \in J_{r_1,\ldots,r_s}} \sum_{\Upsilon} (\delta_{i_1 j_1} \ldots \delta_{i_k j_k})^p \cdot |(\varphi_{i_1} \circ \ldots \circ \varphi_{i_k})'|^p \cdot$$

$$\cdot \sum_{\Psi} \int_{J_{r_1,\ldots,r_s}} |\alpha(f-g)_+ + \beta(f-g)_-|^p dx \leq \left(\delta_p^{(k)}\right)^p \cdot \rho(f,g)^p, \tag{2}$$

де $\Psi = \{(r_1, \ldots, r_s) \in R_k : J_{r_1,\ldots,r_s} \subset I'_i, |J_{r_1,\ldots,r_s}| > 0\}$, $\Upsilon = \{i \in 1, \ldots, n^k : |I'_i| > 0\}$.

Отже, оператор $T_k(j, \cdot)$ у просторі $L_p^{\alpha,\beta}(I)$ задовольняє умову Ліпшиця і є неперервним. Тоді

$$\rho(T_{k+q}(j,f), T_k(j,f)) \leq \sum_{l=k}^{k+q-1} \rho(T_{l+1}(j,f), T_l(j,f)) =$$

$$= \sum_{l=k}^{k+q-1} \rho\left(T_l\left(j, T_1\left(S^l j, f\right)\right), T_l(j,f)\right) \leq$$

$$\leq \sum_{l=k}^{\infty} \delta_p^{(l)} \rho\left(T_1\left(S^l j, f\right), f\right) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{l=k}^{\infty} \delta_p^{(l)}\right) \max_{1 \leq j_1 \leq m} \rho\left(T_1\left(j, f\right), f\right) \to 0,\ k \to \infty, \tag{3}$$

за умовою (1). Отже, послідовність функцій $T_k(j, f),\ k \geq 1$, фундаментальна в $L_p^{\alpha,\beta}(I)$ і тому має границю. З (2) випливає за умовою (1):

$$\rho\left(T_k\left(j, f\right), T_k\left(j, g\right)\right) \leq \delta_p^{(k)} \rho\left(f, g\right) \to 0,\ k \to \infty.$$

Отже, границя не залежить від f та її можна позначити через g_j^*.

Для доведення тотожності потрібно перейти у рівності $T_{k+q}\left(j, f, x\right) = T_k\left(j, T_q\left(S^k j, f, \cdot\right), x\right)$ до границі в просторі $L_p^{\alpha,\beta}(I)$ при $q \to \infty$, що можна зробити в силу неперервності оператора $T_k\left(j, \cdot\right)$ в $L_p^{\alpha,\beta}(I)$.

Теорема 6. (Аналог теореми про коллаж) *Припустимо, що виконуються умови* a – d *та наступний числовий ряд збігається:* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_p^{(k)} :=$

$$:= \sum_{k=1}^{\infty} \max_{\substack{r_1,\dots,r_s \in R_k: \\ |J_{r_1,\dots,r_s}| > 0}} \max_{x \in J_{r_1,\dots,r_s}} \sum_{\substack{i \in 1,\dots,n^k: \\ I_i' \supset J_{r_1,\dots,r_s}}} \tilde{\delta}_{i_1} \dots \tilde{\delta}_{i_k}{}^{p} \cdot \left|\left(\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_k}\right)'(x)\right|^{1/p} < +\infty.$$

Тоді виконуються наступні нерівності:

1) $\forall f \in L_p^{\alpha,\beta}(I),\ j \in \Omega,$

$$\rho\left(f, g_j^*\right) \leq \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_p^{(k)}\right) \max_{1 \leq j_1 \leq m} \rho\left(T_1\left(j, f\right), f\right).$$

2) $\forall f \in L_p^{\alpha,\beta}(I),\ j \in \Omega,\ k \geq 1,$

$$\rho\left(T_k\left(j, f\right), g_j^*\right) \leq \left(\sum_{l=k}^{\infty} \delta_p^{(l)}\right) \max_{1 \leq j_1 \leq m} \rho\left(T_1\left(j, f\right), f\right).$$

Доведення. Твердження 2) випливає з (3) при $q \to \infty$.
1) отримуємо з нерівності 2) при $k = 0$.

Література

[1] *Barnsley M. F.* Fractal Everywhere. — Academic Press, Inc., 1988.

[2] *Barnsley M. F.* Fractal functions and interpolation // Contr. Approx. — 1986. — 2(1). — P. 303 – 329.

[3] *Barnsley M. F., Harrington A. N.* The calculus of fractal interpolation functions // J.Approx. Theory. 1989. — 57. — P. 14 – 34.

[4] *Бабенко В.Ф.* Несимметрические приближения в пространствах суммируемых функций // Укр. мат. журн. – 1982. — **34**, №4. — С. 409 – 416.

[5] *Мітін Д. Ю., Назаренко М. О.* Фрактальна апроксимація в просторах C і L_p та її застосування в задачах кодування зображень // Зб. праць інституту математики НАН України. — 2005. — **2**, №2. — С. 161 – 175.

[6] *Jachymski J., Matkowski J., Swiatkowski T.* Nonlinear contactions on semimetric spaces // J. of applied analysis. — 1995. — **1**, No. 2. — P. 125 – 134.

[7] *Мітін Д. Ю., Назаренко М. О.* Фрактальна апроксимація у просторах $L_p, 0 < p < 1$ // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка / Математика. Механіка /. — 2008. — № 19 - 20. — С. 4 – 7.

[8] *Kapoor G. P., Prasad S.A.* Super fractal interpolation functions // arXiv preprint / arXiv:1201.3491 [math.DS] /. — 2012.

[9] *Kapoor G. P., Prasad S.A.* Convergence of cubic spline super fractal interpolation functions. // arXiv preprint / arXiv:1201.3997 [math.DS] /. — 2012.

[10] *Мітін Д. Ю.* Суперфрактальна апроксимація функцій // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, №9. — С. 1280 – 1285.