Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, Т.10, №1, 283-295

УДК 517.5

Р. В. Товкач (Східноєвропейський нац. університет)

ПРО ЗБІЖНІСТЬ В СЕРЕДНЬОМУ РЯДІВ ТЕЙЛОРА І ЛОРАНА

Для аналітичних в області $\Delta = D\bigcup D_\infty$ функцій знайдено умови, виражені через коефіцієнти Лорана, необхідні для збіжності в середньому її ряду Лорана. Для функцій, аналітичних у крузі D, отримано необхідні і достатні умови збіжності в середньому ряду Тейлора, виражені через коефіцієнти ряду Тейлора, а також обмеженості в метриці простору L_1 частинних сум ряду Тейлора.

Нехай L_1 — простір 2π - періодичних інтегровних за Лебегом функцій $f(x)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_1 = \|f(x)\|_{L_1} = \int_0^{2\pi} |f(x)|dx < \infty$$

і нехай тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (1)$$

є рядом Фур'є функції $f \in L_1$, тобто

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt,$$

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt.$$

Через $\tilde{f}(x)$ позначимо функцію, спряжену з $f(x)$. Її ряд Фур'є буде мати вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-b_k \cos kx + a_k \sin kx). \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-b_k \cos kx + a_k \sin kx). \tag{3}$$

Якщо функція $f(x)$ — парна, то її рядом Фур'є буде ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \tag{4}$$

а рядом Фур'є непарної функції буде

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. \tag{5}$$

Послідовність $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ називатимемо нуль-послідовністю, якщо $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

С.А. Теляковський [8] для нуль-послідовностей $\{a_k\}$, які задовольняють умову

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| + \sum_{i=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{[\frac{i}{2}]} \frac{\Delta a_{i-k} - \Delta a_{i+k}}{k} \right| < \infty, \tag{6}$$

$$\Delta a_k = a_k - a_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

встановив, що ряд (4) є рядом Фур'є своєї суми. Якщо ж нуль-послідовність $\{b_k\}$ задовольняє умову (6), то ряд (5) буде рядом Фур'є тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} < \infty. \tag{7}$$

Умови (6) і (7) називають умовами Боаса–Теляковського інтегровності тригонометричних рядів. Множини нуль-послідовностей, які задовольняють умови (6) і (7), позначатимемо через $B - T$.

Покладемо $a_{-n} = a_n,\ b_0 = 0,\ b_{-n} = b_n\ (n > 0)$ і позначимо

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n). \tag{8}$$

Отже
$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Тоді ряди (1) і (3) матимуть вигляд
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \tag{9}$$

$$-i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} k c_k e^{ikx}. \tag{10}$$

а
$$S_n(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

$$\tilde{S}_n(f;x) = -i \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{sign} k c_k e^{ikx}.$$

– частинні суми рядів (9) і (10).

Через C будемо надалі позначати абсолютні додатні сталі, можливо, не одні й ті самі, в різних формулах.

Нехай функція $f(z)$ аналітична в області $\Delta := D \bigcup D_\infty$, де область $D = \{z : \ |z| < 1\}$, а область $D_\infty = \{z : |z| > 1\}$, $f(\infty) = 0$.

Тоді
$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z \in D, \\ \\ f_2(z) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k}, \ z \in D_\infty, \end{cases} \tag{11}$$

і ряди $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, $z \in D$, $-\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k}$, $z \in D_\infty$, є рядами Тейлора функцій f_1 і f_2.

Розглянемо клас CS аналітичних в області Δ функцій із нормою
$$\|f\|_1^* = \lim_{r \to 1} \left\| f(re^{it}) - f(\frac{1}{r} e^{it}) \right\|_1 < \infty. \tag{12}$$

За теоремою Г.Ц. Тумаркіна [9] такий клас CS збігається з класом функцій, які аналітичні в області Δ і зображаються інтегралом типу Коші-Стільтьєса

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}d\psi(\theta)}{e^{i\theta}-z}. \tag{13}$$

Згідно з теоремою В.І. Смірнова [5, с. 94] на колі $|z|=1$ існують граничні значення функцій f_1 і f_2. Такі функції належать до класу H_p, $0<p<1$. Отже вони мають граничні значення по недотичних шляхах.

За теоремою братів Ріссів [5, с. 96] умова

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{in\theta}d\sigma(\theta)=0, \qquad n=1,2,\dots$$

означає, що міра σ є абсолютно неперервною відносно міри Лебега, тобто існує така сумовна функція $g(e^{in\theta})$: $g(e^{in\theta})d\theta = d\sigma(\theta)$. Отже, за теоремою Г.М. Фіхтенгольца [5, с. 97]) інтеграл типу Коші-Стільтьєса (13) перероджується в інтеграл Коші і зображає функцію з класу H_1.

Під збіжністю в середньому будемо розуміти

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f(e^{it})-S_n(f;e^{it})\right\|_1^*=0. \tag{14}$$

Відомо (див. [12], [11]), що для $\forall f\in H_1(D)$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\|f-S_n(f)\|_1=0.$$

Ф. Рісс (див. [1, с. 599]) побудував приклад такої функції $f^*(z)$, аналітичної в області $D=\{z:\ |z|<1\}$, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|f^*-S_n(f^*)\|_1=B>0.$$

Таким чином частинна сума $S_n(f^*;z)$ її ряду Тейлора не збігається в середньому до функції $f^*(z)$. Є ряд робіт (див. [10], [6], [7]), де достатні умови збіжності в середньому рядів Тейлора дано в інших термінах.

Ця робота присвячена розв'язанню такої задачі: що можна сказати про поведінку коефіцієнтів c_k, c_{-k}, якщо відомо, що виконується рівність (14). Інакше кажучи, потрібно знайти необхідні умови на послідовність c_k коефіцієнтів для збіжності за нормою рядів Тейлора компонент $f_1,\ f_2$ функції f.

Основним результатом є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай функція $f \in CS$ і має місце (11). Тоді для того, щоб виконувалося співвідношення (14), необхідно, щоб*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{|c_{n+k}| + |c_{-n-k}|}{k} = 0. \tag{15}$$

Доведення. Зафіксуємо $r \in (0,1)$. Маємо:

$$F_r(e^{it}) := f(re^{it}) - f\left(\frac{e^{it}}{r}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{ikt},\ t \in [0, 2\pi]. \tag{16}$$

Розглянемо суму Валле Пуссена ряду в правій частині (16)

$$v_{2n}^{n}(F_r; e^{it}) = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} S_k(F_r; e^{it}) = c_0 + \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k^{(n)} r^k (c_k e^{it} + c_{-k} e^{-ikt}),$$

де

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 1, 2, \ldots, n, \\ \dfrac{2n-k+1}{n}, & k = n+1, n+2, \ldots, 2n. \end{cases}$$

Для будь-якої сумовної 2π-періодичної функції суми Валле Пуссена v_{2n}^{n} її ряду Фур'є збігаються в середньому. Дійсно, якщо $\tau_n^*(e^{i\theta})$ – тригонометричний поліном порядку n, що найкраще наближає функцію $F_r(e^{it})$ в метриці L_1, то

$$\|F_r - v_{2n}^{n}(F_r)\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F_r(e^{it}) - v_{2n}^{n}(F_r; e^{it})| dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|F_r(e^{it})-\tau_n^*(e^{it})|dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|v_{2n}^n(F_r-\tau_n^*;e^{it})|dt\leq$$

$$\leq C\int\limits_0^{2\pi}|(F_r(e^{it})-\tau_n^*(e^{it})|dt(1+||v_{2n}^n||_{L\to L})\to 0,\quad n\to\infty,$$

бо, як відомо, $||v_{2n}^n||_{L\to L}\leq C$.

Оскільки

$$v_{2n}^n(F_r;e^{it})-S_n(F_r;e^{it})=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n}r^k(c_ke^{ikt}+c_{-k}e^{-ikt}),$$

то при $n\to\infty$

$$\|F_r-S_n(F_r)\|_1=\|(v_{2n}^n(F_r)-S_n(F_r))-(F_r-v_{2n}^n(F_r))\|_1=$$

$$=\|v_{2n}^n(F_r)-S_n(F_r)\|_1+o(1)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n}r^k(c_ke^{ikt}+c_{-k}e^{-ikt})\right|dt+o(1). \tag{17}$$

Оцінимо останній інтеграл знизу.

Різниця між сумою Валле Пуссена й частинною сумою спряженого ряду функції

$$\widetilde{F}_r(e^{it})=-i\sum_{k=-\infty}^{\infty}\operatorname{sign}kr^{|k|}c_ke^{ikx}$$

матиме вигляд

$$\widetilde{v}_{2n}^n(F_r;e^{it})-\widetilde{S}_n(F_r;e^{it})=v_{2n}^n(\widetilde{F}_r;e^{it})-S_n(\widetilde{F}_r;e^{it})=$$

$$=-i\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n}r^k(c_ke^{ikt}-c_{-k}e^{-ikt}).$$

Позначимо через $T_{2n}(e^{it})$ тригонометричний поліном порядку $2n$ виду

$$T_{2n}(e^{it}) := \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}),$$

тоді

$$\widetilde{T}_{2n}(e^{it}) := -i \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} r^k (c_k e^{ikt} - c_{-k} e^{-ikt}).$$

Далі розглянемо вираз

$$T'_{2n}(e^{it}) + i\widetilde{T}'_{2n}(e^{it}).$$

Очевидно, що

$$T'_{2n}(e^{it}) + i\widetilde{T}'_{2n}(e^{it}) = i \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} r^k (kc_k e^{ikt} - kc_{-k} e^{-ikt}) +$$

$$+i \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} r^k (kc_k e^{ikt} + kc_{-k} e^{-ikt}) = 2i \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} r^k kc_k e^{ikt}.$$

Тому

$$2 \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} r^k kc_k e^{ikt} \right\|_1 \le \left\| T'_{2n}(e^{it}) \right\|_1 + \left\| \widetilde{T}'_{2n}(e^{it}) \right\|_1 .$$

Застосуємо до правої частини останнього співвідношення нерівності Бернштейна [4, с. 23]. При цьому будемо мати

$$\left\| T'_{2n}(e^{it}) \right\|_1 + \left\| \widetilde{T}'_{2n}(e^{it}) \right\|_1 \le 4n \left\| T_{2n}(e^{it}) \right\|_1 .$$

Тобто

$$2 \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k kc_k e^{ikt} \right\|_1 \le$$

$$\leq 4n\left\|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n+1}r^k(c_ke^{ikt}+c_{-k}e^{-ikt})\right\|_1. \qquad (18)$$

Аналогічно, на основі рівності

$$-2i\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n+1}r^kkc_{-k}e^{-ikt}=v_{2n}^{n}{}'(F_r;e^{it})-S_n'(F_r;e^{it})-$$

$$-i(\widetilde{v}_{2n}^{n}{}'(F_r;e^{it})-\widetilde{S}_n'(F_r;e^{it})) =: T_{2n}'(e^{it})-i\widetilde{T}_{2n}'(e^{it}),$$

отримуємо

$$2\left\|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n+1}r^kkc_{-k}e^{-ikt}\right\|_1\leq\left\|T_{2n}'(e^{it})\right\|_1+\left\|\widetilde{T}_{2n}'(e^{it})\right\|_1.$$

Застосовуючи нерівності Бернштейна [4, с. 23] до правої частини останнього співвідношення, знайдемо

$$2\left\|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n+1}r^kkc_{-k}e^{-ikt}\right\|_1\leq$$

$$\leq 4n\left\|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n+1}r^k(c_ke^{ikt}+c_{-k}e^{-ikt})\right\|_1. \qquad (19)$$

Застосовуючи до многочлена

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n+1}r^kkc_kz^k$$

нерівність Харді [3, с. 454], матимемо

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k k c_k e^{ikt} \right\|_1 = \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k k c_k e^{i(k-n)t} \right\|_1 =$$

$$= \left\| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n-\nu+1}{n+1} r^{n+\nu} (n+\nu) c_{n+\nu} e^{i\nu t} \right\|_1 \geq$$

$$\geq C \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n-\nu+1) r^{n+\nu} (n+\nu) |c_{n+\nu}|}{(n+1)\nu} \geq$$

$$\geq Cn \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|c_{n+\nu}|}{\nu} r^{n+\nu} - C \sum_{\nu=1}^{n} |c_{n+\nu}| r^{n+\nu} = Cn \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|c_{n+\nu}|}{\nu} r^{n+\nu} + n\, o(1), \quad (20)$$

оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |c_{n+\nu}| r^{n+\nu} = 0.$$

Зі співвідношень (18) і (20) випливає, що

$$2n \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) \right\|_1 \geq$$

$$\geq Cn \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|c_{n+k}|}{k} r^{n+k} + n\, o(1). \quad (21)$$

Аналогічно до того, як було одержано нерівність (20), із формули (19) знаходимо

$$2n \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) \right\|_1 \geq$$

$$\geq \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k k c_{-k} e^{-i(k-n)t} \right\|_1 =$$

$$= \left\| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n-\nu+1}{n+1} r^{n+\nu} (n+\nu) c_{-n-\nu} e^{i\nu t} \right\|_1 \geq$$

$$\geq C \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n-\nu+1) r^{n+\nu} (n+\nu) |c_{-n-\nu}|}{(n+1)\nu} \geq$$

$$\geq Cn \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|c_{-n-\nu}|}{\nu} r^{n+\nu} + no(1). \tag{22}$$

Ліві частини співвідношень (21) і (22) однакові, тому, додаючи їх, отримаємо

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) \right\|_1 \geq$$

$$\geq C \sum_{k=1}^{n} \frac{|c_{n+k}| + |c_{-n-k}|}{k} r^{n+k} + o(1). \tag{23}$$

Отже

$$\left\| f(e^{it}) - S_n(f; e^{it}) \right\|_1^* = \lim_{r\to 1} \left\| v_{2n}^n (F_r; e^{it}) - S_n(F_r) \right\|_1 + o(1) =$$

$$= \lim_{r\to 1} \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) \right\|_1 \geq$$

$$\geq C \lim_{r\to 1} \sum_{k=1}^{n} \frac{|c_{n+k}| + |c_{-n-k}|}{k} r^{n+k} + o(1) =$$

$$= C \sum_{k=1}^{n} \frac{|c_{n+k}| + |c_{-n-k}|}{k} + o(1).$$

З останньої нерівності випливає твердження теореми 1.

У випадку, якщо $c_{-k} = 0, \ \forall\, k = 1, 2, \ldots$, тобто коли функція $f(z)$ аналітична в області $D = \{z : \ |z| < 1\}$ і ряд (11) стає рядом Тейлора функції $f(z)$, теорема 1 дає необхідну умову збіжності в середньому рядів Тейлора функцій із класу Харді H_1.

У роботі [2] доведено, що коли коефіцієнти a_k ряду (4) утворюють нуль-послідовність, яка задовольняє умову (6), то для збіжності в середньому ряду (4) необхідно і достатньо виконання співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} |a_{n+k}| = 0. \tag{24}$$

Там же встановлено, що якщо коефіцієнти b_k ряду (5) утворюють нуль-послідовність, яка задовольняє умову (6), то для збіжності в середньому ряду (5) необхідно і достатньо виконання співвідношень (6) і

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} |b_{n+k}| = 0. \tag{25}$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \tag{26}$$

Нехай $c_k = a_k - ib_k$ – коефіцієнти ряду (26) і $\{a_k\}, \{b_k\}$ – нуль-послідовності, які належать множині $B - T$, тобто задовольняють умови (6) і (7). Відділяючи дійсну і уявну частини в ряді (26) при $z = e^{ix}$, будемо мати два тригонометричні ряди

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx).$$

Оскільки коефіцієнти цих рядів належать множині $B - T$, то, згідно з результатами С.О. Теляковського [8], ці тригонометричні ряди є рядами Фур'є деяких сумовних функцій, які позначимо відповідно $g(x)$ і $\widetilde{g}(x)$. Ці функції є спряженими функціями.

Добре відомо [3, с. 453], що в цьому випадку, тобто коли $g(\cdot) \in L$ і $\widetilde{g}(\cdot) \in L$, степеневий ряд (26) є рядом Тейлора функції $f(z) \in H_1$, $z \in D$, де $f(e^{ix}) = g(x) + i\widetilde{g}(x)$.

Враховуючи співвідношення (24) і (25), а також нерівність $2|c_k| \geq |a_k| + |b_k|$, маємо наступні твердження.

Теорема 2. *Нехай $c_k = a_k - ib_k$ — коефіцієнти ряду (26) і $\{a_k\}, \{b_k\}$ — нуль-послідовності, які належать множині $B - T$, тоді ряд (26) буде рядом Тейлора функції $f(z) \in H_1,\ z \in D$, і для збіжності ряду (26) в середньому необхідно і достатньо виконання співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{|c_{n+k}|}{k} = 0. \tag{27}$$

Теорема 3. *Нехай $c_k = a_k - ib_k$ — коефіцієнти ряду (26) і $\{a_k\}, \{b_k\}$ – нуль-послідовності, які належать множині $B-T$, тоді для обмеженості частинних сум ряду (26) необхідно і достатньо виконання співвідношення*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} |c_{n+k}| \leq C. \tag{28}$$

Автор виражає щиру вдячність доктору фізико-математичних наук В.В. Савчуку за пропозицію розглянути клас функцій CS і певну допомогу при одержанні результатів.

1. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961. — 936 с.
2. *Задерей П.В.* О сходимости в среднем рядов Тейлора и Лорана // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — 2003. — **1**, № 1. — С. 307 – 314.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: в 2-х т. — М.: Мир, 1965. — **1**. — 615 с.
4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: в 2-х т. — М.: Мир, 1965. — **2**. — 537 с.
5. *Привалов И.И.* Граничные свойства аналитических функций. — М.: Наука, 1950. — 336 с.
6. *Степанец А.И.* Методы теории приближения: в 2-х ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины. — 2002. — Ч. II. — 468 с.

7. *Суетин П.К.* Ряды по многочленам Фабера. — М.: Наука, 1984. — 336 с.
8. *Теляковский С.А.* Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1964. — **28**, № 6. — С. 1209 – 1236.
9. *Тумаркин Г.Ц.* Об интегралах типа Коши-Стильтьеса // Успехи мат. наук. — 1956. — **11**, № 4. — С. 163 – 166.
10. *Шведченко С.В.* Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функцый в единичном круге, поликруге и шаре // Мат. анализ (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). — 1985. — **23**, № 3. — 124 с.
11. *Belinskii E.S.* Strong summability of Fourier series of thr periodic functions from $H^p, (0 < p \leq 1)$ // Constr. Approx. — 1996. — **12**, № 6. — P. 187 – 195.
12. *Smith B.* A strong convergence theorem for $H^1(T)$ // P. 169—173.