УДК 517.5

А. С. Сердюк (Інститут математики НАН України, Київ)

Т. А. Степанюк (Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк)

ПОРЯДКОВІ ОЦІНКИ НАЙКРАЩИХ НАБЛИЖЕНЬ І НАБЛИЖЕНЬ СУМАМИ ФУР'Є КЛАСІВ НЕСКІНЧЕННО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

We obtained order estimations for the best uniform approximation by trigonometric polynomials and approximation by Fourier sums of classes of 2π–periodic continuous functions, whose (ψ,β)–derivatives f_β^ψ belong to unit balls of spaces L_p, $1\le p<\infty$ in case at consequences $\psi(k)$ decrease to nought faster than any power function. We also established the analogical estimations in L_s–metric, $1<s\le\infty$, for classes of the summable (ψ,β)–differentiable functions, such that $\| f_\beta^\psi \|_1\le 1$.

Отримано порядкові оцінки для найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами та наближень сумами Фур'є класів 2π–періодичних неперервних функцій, таких, що їх (ψ,β)–похідні f_β^ψ належать одиничним кулям просторів L_p, $1\le p<\infty$, у випадку коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше за будь–яку степеневу функцію. Аналогічні оцінки одержано для наближень в L_s–метриці, $1<s\le\infty$, для класів сумовних (ψ,β)–диференційовних функцій, таких, що $\| f_\beta^\psi \|_1\le 1$.

Нехай C — простір 2π–періодичних неперервних функцій, у якому норма задана за допомогою рівності $\|f\|_C=\max\limits_t|f(t)|$; L_∞ — простір 2π–періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}\limits_t|f(t)|$; L_p, $1\le p<\infty$, — простір 2π–періодичних сумовних в p–му степені на $[0,2\pi)$ функцій $f(t)$, в якому норма задана формулою $\|f\|_p=\Big(\int\limits_0^{2\pi}|f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}$.

Нехай далі функція $f(x)\in L_1$, і її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx.$$

Якщо $\psi(k)$ — фіксована послідовність дійсних чисел, β — деяке дійсне число, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k(f)\cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k(f)\sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то функцію φ називають (див., наприклад, [1, с. 132]) (ψ,β)-похідною функції $f(x)$ і позначають $f_\beta^\psi(x)$.

Множину функцій $f(x)$, у яких існує (ψ,β)-похідна позначають через L_β^ψ, а підмножину неперервних функцій із L_β^ψ — через C_β^ψ.

Якщо $f \in L_\beta^\psi$, і водночас $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N} \subseteq L_1$, то кажуть, що функція f належить класу $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$. Якщо $\mathfrak{N} = B_p^0 = \{\varphi : \ ||\varphi||_p \leq 1, \ \varphi \perp 1\}$, то позначають $L_\beta^\psi B_p^0 = L_{\beta,p}^\psi$.

Як показано в [1, с. 136], якщо послідовність $\psi(k)$ монотонно прямує до нуля при $k \to \infty$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} < \infty$, то елементи f множини $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$ при будь–якому $\beta \in \mathbb{R}$ і майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ представляються згортками

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t)\varphi(t)dt, \ a_0 \in \mathbb{R}, \ \varphi \in \mathfrak{N}, \ \varphi \perp 1, \qquad (1)$$

з сумовним ядром $\Psi_\beta(t)$, ряд Фур'є якого має вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\big).$$

При цьому функція φ майже скрізь співпадає з f_β^ψ. Якщо ж $f \in C_\beta^\psi\mathfrak{N}, \ \beta \in \mathbb{R}$, то рівність (1) виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Якщо $\psi(k) = k^{-r}, \ r > 0$, то класи $L_{\beta,p}^\psi$ є відомими класами Вейля-Надя $W_{\beta,p}^r$.

Будемо вважати, що послідовності $\psi(k)$ є слідами на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ деяких додатних, неперервних, опуклих донизу функцій $\psi(t)$, $t \geq 1$, таких, що $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Множину всіх таких функцій $\psi(t)$ позначатимемо через $\mathfrak{M}$.

Згідно з [1, с. 159 – 160], кожній функції $\psi \in \mathfrak{M}$ поставимо у відповідність характеристики

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\psi(t)/2\right), \quad \mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t},$$

де ψ^{-1} — обернена до ψ функція і розглянемо множину

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \left\{\psi \in \mathfrak{M} : \quad \mu(\psi; t) \uparrow \infty, \ t \to \infty\right\}.$$

Через $\mathfrak{M}_\infty^{'}$ позначимо підмножину функцій $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, для кожної з яких величина $\eta(\psi; t) - t$ обмежена зверху, тобто існує стала $K_1 > 0$, така, що $\eta(\psi; t) - t \leq K_1, \ t \geq 1$, а через $\mathfrak{M}_\infty^{''}$ — підмножину функцій $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, для кожної з яких величина $\eta(\psi; t) - t$ обмежена знизу деяким додатним числом, тобто існує стала $K_2 > 0$, така, що $\eta(\psi; t) - t \geq K_2, \ t \geq 1$.

Типовими представниками множини $\mathfrak{M}_\infty^+$ є функції $\psi(t) = \psi_{r,\alpha}(t) = \exp(-\alpha t^r)$, $\alpha > 0$, $r > 0$. Класи L_β^ψ та C_β^ψ у цьому випадку будемо позначати через $L_\beta^{\alpha,r}$ і $C_\beta^{\alpha,r}$ відповідно. Причому, якщо $r \geq 1$, то $\psi_{r,\alpha} \in \mathfrak{M}_\infty^{'}$, а якщо $r \in (0, 1]$, то $\psi_{r,\alpha} \in \mathfrak{M}_\infty^{''}$.

Через F прийнято позначати множину функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, таких, що $\eta'(\psi, t) := \eta'(\psi, t + 0) \leq K$. Відмітимо (див., наприклад, [1, с. 165]), що $\mathfrak{M}_\infty^+ \subset F$.

Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то (див., наприклад, [2, с. 97]) множини C_β^ψ складаються з нескінченно диференційовних функцій. З іншого боку, як показано в [3, с. 1692], для кожної нескінченно диференційовної 2π–періодичної функції f можна вказати функцію ψ з множини $\mathfrak{M}_\infty^+$, таку, що $f \in C_\beta^\psi$ для довільних $\beta \in \mathbb{R}$.

Метою даної роботи є знаходження точних порядкових оцінок для величин вигляду

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_X = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_X,$$

де $S_{n-1}(f;\cdot)$ — частинні суми Фур'є порядку $n-1$, $\mathfrak{N} \subset X \subset L_1$, а також знаходження точних порядкових оцінок найкращих наближень, тобто величин вигляду

$$E_n(\mathfrak{N})_X = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_X,$$

де $\mathcal{T}_{2n-1}$ — підпростір усіх тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку не вищого за $n-1$, у наступних випадках:

1) $\mathfrak{N} = C^{\psi}_{\beta,p},\ 1 \le p < \infty,\ X = C$;

2) $\mathfrak{N} = L^{\psi}_{\beta,1},\ X = L_s,\ 1 < s \le \infty$

при $\psi \in \mathfrak{M}''_{\infty}$ і $\beta \in \mathbb{R}$.

При $X = L_s, 1 \le s \le \infty$, величину $\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_{L_s}$ будемо позначати через $\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_s$, а величину $E_n(\mathfrak{N})_{L_s}$ — через $E_n(\mathfrak{N})_s$ відповідно.

Зробимо короткий історичний огляд дослідження оцінок величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ і $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$.

Для класів Вейля–Надя $W^r_{\beta,p}$, при довільних $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le p, s \le \infty$ точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_s$ та $E_n(W^r_{\beta,p})_s$ відомі (див., наприклад, [4, с. 47 – 49]).

У випадку $p = s = 1$ і $p = s = \infty$ відомі також асимптотичні рівності при $n \to \infty$ для величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_s$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ (див., наприклад, роботи [5 – 7]).

У випадках $p = s = 1$ і $p = s = \infty$ встановлено точні значення найкращих наближень $E_n(W^r_{\beta,p})_s$ при усіх $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$ (див. роботи [8 – 13]). При $r \in \mathbb{N}$ і $\beta = r$ в роботі [14] встановлено точні значення величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,2})_\infty$.

На класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ у випадку, коли $\psi(k)k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}}$ незростають і $\psi \in B$, де B — множина незростаючих при $t \ge 1$ додатних функцій $\psi(t)$, для кожної з яких можна вказати додатну сталу K таку, що $\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \le K$, $\ t \ge 1$, було знайдено у роботі [15] при довільних $1 < p, s < \infty$.

При $p = s = 2$ в [15] також розв'язано задачу про точні значення величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ за умови $\sup\limits_{k\ge n}\psi(k) < \infty$.

Зазначимо також, що при $p = 2$ і $s = \infty$ або $p = 1$ і $s = 2$ точні значення величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_s$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, за умови збіжності ряду

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^2(k)$, знайдено у роботах [16] і [17].

В [18] встановлено точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ при $1 \leq p < \infty$, $s = \infty$, а також при $p = 1$ і $1 < s \leq \infty$, у випадку, коли $\psi \in B \cap \Theta_p$, де Θ_p, $1 \leq p < \infty$, — множина незростаючих функцій $\psi(t)$, для яких існує стала $\alpha > \frac{1}{p}$ така, що функція $t^{\alpha}\psi(t)$ майже спадає.

При $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$, $1 \leq p, s \leq \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$ точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ встановлено у роботі [2, с. 225] (див. також [19, с. 48]) і вони мають вигляд

$$C^{(1)}_{p,s}\psi(n) \leq E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s \leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s \leq C^{(2)}_{p,s}\psi(n), \tag{2}$$

де $C^{(1)}_{p,s}$, $C^{(2)}_{p,s}$ — додатні сталі, що залежать тільки від p і s.

В [2, с. 219] (див. також [19, с. 60]) знайдено також точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ при $\psi \in \mathfrak{M}''_{\infty}$, $1 < p, s < \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$, які мають вигляд

$$C^{(3)}_{p,s}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\alpha} \leq E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s \leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s \leq C^{(4)}_{p,s}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\alpha}, \tag{3}$$

де $C^{(3)}_{p,s}$, $C^{(4)}_{p,s}$ — додатні сталі, що залежать тільки від p і s, а $\alpha = p^{-1} - s^{-1}$, якщо $p < s$, і $\alpha = 0$, якщо $p \geq s$.

Оцінка зверху в співвідношенні (3) є справедливою і у випадку $p = 1$, за умови $p < s < \infty$ (див. [2, с. 224]).

У випадках $p = s = 1$, $p = s = \infty$, $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$ і $\beta \in \mathbb{R}$ в [20] встановлено асимптотичні рівності для величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_s$ і $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$. Крім того, в [21] при $p = s = \infty$ та $p = s = 1$ отримано точні значення величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_s$ і $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$, $\beta \in \mathbb{R}$, за умови, що функція $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$ має наступні властивості: 1) $\Delta^2\psi(k) := \psi(k) - 2\psi(k+1) + \psi(k+2) \geq 0$, $\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} \leq \rho$, $0 < \rho < 1$, $k = n, n+1, ...$; 2) $\frac{\Delta^2\psi(n)}{\psi(n)} > \frac{(1+3\rho)\rho^{2n}}{(1-\rho)\sqrt{1-2\rho^{2n}}}$.

В [22] для $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, за умови, що починаючи з деякого $t_0 \geq 1$ $\eta(t) - t > 1$, встановлено точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_s$, $\beta \in \mathbb{R}$, при $1 < p < \infty$, $s = \infty$, які мають вигляд:

$$C^{(1)}_{\psi,p}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}} \leq \mathcal{E}_n\Big(C^{\psi}_{\beta,p}\Big)_C \leq C^{(2)}_{\psi,p}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}},\ n \in \mathbb{N},$$

де $C^{(1)}_{\psi,p}$, $C^{(2)}_{\psi,p}$ — додатні сталі, що залежать від ψ і p.

В даній роботі встановлено точні порядкові оцінки величин $E_n\big(C^{\psi}_{\beta,p}\big)_C$, $E_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s$ і $\mathcal{E}_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s$ для довільних $1\le p<\infty$, $1<s\le\infty$ і $\beta\in\mathbb{R}$, у випадку, коли $\psi\in\mathfrak{M}^+_\infty$, $\eta(t)-t\ge a>2$, $\mu(t)\ge b>2$. При цьому константи в порядкових оцінках записуються через параметри задачі в явному вигляді. З врахуванням цієї обставини, отримані оцінки доповнюють згадані вище результати робіт [2, с. 219] (див. також [19, с. 60]), а з іншого доповнюють та уточнюють результати роботи [22].

Перейдемо до викладу основних результатів.

Теорема 1. *Нехай $\psi\in\mathfrak{M}^+_\infty$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\le p<\infty$. Тоді для $n\in\mathbb{N}$, таких, що $\eta(n)-n\ge a>2$, $\mu(n)\ge b>2$ справедливі оцінки*

$$C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}\le E_n\Big(C^{\psi}_{\beta,p}\Big)_C\le\mathcal{E}_n\Big(C^{\psi}_{\beta,p}\Big)_C\le$$

$$\le C_{a,b}\,(2p)^{1-\frac{1}{p}}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}},\quad(4)$$

де

$$C_a=\frac{\pi}{96\,(1+\pi^2)^2}\frac{(a-1)^2(a-2)^2}{a^3(3a-4)},\qquad(5)$$

$$C_{a,b}=\frac{1}{\pi}\max\left\{\frac{2b}{b-2}+\frac{1}{a},\ 2\pi\right\}.\qquad(6)$$

Доведення теореми спиратиметься на два допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай $\gamma\in\mathbb{R}$, а $\lambda(k)$, $k=1,2,\ldots$ — деяка послідовність дійсних чисел. Тоді при будь–яких $N,M\in\mathbb{N}$ $(N<M)$ для величин $W_{N,M}(\lambda;\gamma;t)$, означених формулою*

$$W_{N,M}(\lambda;\gamma;t)=\frac{1}{M-N}\sum_{k=N}^{M-1}\sum_{j=1}^{k}\lambda(j)\cos(jt+\gamma),\qquad(7)$$

має місце рівність

$$W_{N,M}(\lambda;\gamma;t)=\sum_{k=1}^{N}\lambda(k)\cos(kt+\gamma)+$$

$$+\frac{1}{M-N}\sum_{k=N+1}^{M-1}(M-k)\,\lambda(k)\cos\left(kt+\gamma\right). \tag{8}$$

***Доведення леми* 1.** Рівність (8) випливає із наступного ланцюжка перетворень:

$$\frac{1}{M-N}\sum_{k=N}^{M-1}\sum_{j=1}^{k}\lambda(j)\cos\left(jt+\gamma\right)=$$

$$=\frac{1}{M-N}\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda(j)\cos\left(jt+\gamma\right)+...+\sum_{j=1}^{M-1}\lambda(j)\cos\left(jt+\gamma\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\lambda(k)\cos\left(kt+\gamma\right)+$$

$$+\frac{1}{M-N}\left[(M-N-1)\lambda(N+1)\cos\left((N+1)t+\gamma\right)+...+\right.$$

$$\left.+\lambda(M-1)\cos\left((M-1)t+\gamma\right)\right]=\sum_{k=1}^{N}\lambda(k)\cos\left(kt+\gamma\right)+$$

$$+\frac{1}{M-N}\sum_{k=N+1}^{M-1}(M-k)\,\lambda(k)\cos\left(kt+\gamma\right).$$

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{M}_{\infty}^{+}$, $\eta(n)-n\geq a>0$, $\mu(n)\geq b>0$. *Тоді*

1) якщо $a>1$, *то*

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)(\eta(n)-n)<[\eta(n)]-n\leq\eta(n)-n; \tag{9}$$

2) якщо $a>2$, *то*

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a}\right)(\eta(n)-n)<[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]<\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(\eta(n)-n), \tag{10}$$

де $[\alpha]$ — *ціла частина дійсного числа* α.

Доведення леми 2. Друга нерівність в (9) є очевидною. Позначивши $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$, при $\eta(n) - n \geq a > 1$ одержуємо

$$[\eta(n)] - n = \eta(n) - n - \{\eta(n)\} = (\eta(n) - n)\left(1 - \frac{\{\eta(n)\}}{\eta(n) - n}\right) >$$

$$> \left(1 - \frac{1}{a}\right)(\eta(n) - n)\,.$$

Щоб переконатись в справедливості нерівностей (10), спочатку покажемо, що при $\eta(n) - n \geq a > 0$ і $\mu(n) \geq b > 0$ має місце співвідношення

$$\frac{1}{2}\,(\eta(n) - n) \leq \eta(\eta(n)) - \eta(n) < \left(1 + \frac{1}{b}\right)(\eta(n) - n)\,. \qquad (11)$$

Дійсно, беручи до уваги означення функції $\mu(t)$, для довільної $\psi \in \mathfrak{M}$ справедлива рівність

$$\eta(t) = t\left(1 + \frac{\eta(t) - t}{t}\right) = t\left(1 + \frac{1}{\mu(t)}\right). \qquad (12)$$

Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^{+}$, то функція $\frac{1}{\mu(t)}$ монотонно прямує до нуля при $t \to \infty$. Нехай $\mu(t) \geq b > 0$. Тоді в силу (12), маємо

$$\eta'(t) = 1 + \frac{1}{\mu(t)} + t\left(\frac{1}{\mu(t)}\right)' \leq 1 + \frac{1}{\mu(t)} \leq 1 + \frac{1}{b}. \qquad (13)$$

Зазначимо також, що для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}$ (див., наприклад, [1, с. 162 – 163]

$$\eta'(t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))} \geq \frac{1}{2},\ \ t \geq 1,\ \ \eta'(t) := \eta'(t + 0). \qquad (14)$$

З (13) і (14), а також з рівності

$$\eta(\eta(t)) - \eta(t) = \int\limits_{t}^{\eta(t)} \eta'(u)du$$

випливає (11).

Використовуючи (11) при $a > 0,\ b > 0$, можемо записати:

$$[\eta(\eta(n))] - [\eta(n)] \leq \eta(\eta(n)) - \eta(n) + \{\eta(n)\} < \left(1 + \frac{1}{b}\right)(\eta(n) - n) + 1 =$$

$$= (\eta(n) - n)\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{\eta(n) - n}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(\eta(n) - n)\,,$$

а при $a > 2,\ b > 0$

$$[\eta(\eta(n))] - [\eta(n)] \geq \eta(\eta(n)) - \eta(n) - \{\eta(\eta(n))\} > \frac{1}{2}\,(\eta(n) - n) - 1 =$$

$$= (\eta(n) - n)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\eta(n) - n}\right) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a}\right)(\eta(n) - n)\,.$$

Лему доведено.

***Доведення теореми* 1.** Спочатку оцінимо зверху величину $\mathcal{E}_n\Big(C^{\psi}_{\beta,p}\Big)_C$. Згідно з інтегральним зображенням (1), для довільної функції $f \in L^{\psi}_{\beta,p},\ 1 \leq p \leq \infty$, $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, майже в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ справедлива рівність

$$f(x) - S_{n-1}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\beta,n}(x-t)\varphi(t)dt, \tag{15}$$

де

$$\|\varphi\|_p \leq 1,\ \varphi \perp 1, \tag{16}$$

$$\Psi_{\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos\big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\big). \tag{17}$$

При цьому, якщо $f \in C^{\psi}_{\beta,p},\ 1 \leq p \leq \infty$, то рівність (15) справедлива в кожній точці.

Далі нам буде потрібне таке твердження (див., наприклад, [1, с. 137 – 138]).

***Твердження* 1.** *Якщо* $h \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, $g \in L_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *то згортка*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\pi}^{\pi} h(x-t) g(t) dt$$

неперервна на всій осі, причому

$$\|f\|_C \leq \frac{1}{\pi} \|h\|_p \|g\|_{p'} . \tag{18}$$

В силу твердження 1, та формул (15) і (16)

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\psi}_{\beta,p}\big)_C \leq \frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_{p'}\|\varphi(\cdot)\|_p \leq \frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_{p'}, \tag{19}$$

де $p' = \frac{p}{p-1}$. Продовжимо оцінку правої частини (19).

Застосувавши до функції $\Psi_{\beta,n}(t)$ перетворення Абеля, при довільному $n \in \mathbb{N}$ одержимо

$$\Psi_{\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} (\psi(k) - \psi(k+1)) D_{k,\beta}(t) - \psi(n) D_{n-1,\beta}(t), \tag{20}$$

де

$$D_{k,\beta}(t) = \frac{1}{2} \cos \frac{\beta\pi}{2} + \sum_{j=1}^{k} \cos\left(jt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

і врахувавши відомі формули (див., наприклад, [2, с. 40, 42])

$$D_{k,0}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{k} \cos kt = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}, \ 0 < |t| \leq \pi, \tag{21}$$

та

$$D_{k,1}(t) = \sum_{j=1}^{k} \sin kt = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}, \ 0 < |t| \leq \pi, \tag{22}$$

де $D_{k,0}$ — ядро Діріхле порядку k, а $D_{k,1}$ — спряжене ядро Діріхле порядку k, можемо записати

$$D_{k,\beta}(t) = \cos\frac{\beta\pi}{2} D_{k,0}(t) + \sin\frac{\beta\pi}{2} D_{k,1}(t) =$$

$$= \cos\frac{\beta\pi}{2}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} + \sin\frac{\beta\pi}{2}\frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\Big(\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \frac{\beta\pi}{2}\Big) + \sin\frac{\beta\pi}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}, \ 0 < |t| \le \pi. \tag{23}$$

Оскільки

$$\sin\frac{t}{2} \ge \frac{t}{\pi}, \quad 0 \le t \le \pi, \tag{24}$$

то з (23) одержимо

$$|D_{k,\beta}(t)| \le \frac{\pi}{|t|}, \ 0 < |t| \le \pi. \tag{25}$$

З формули (20), з врахуванням (25), випливає, що при $0 < |t| \le \pi$

$$|\Psi_{\beta,n}(t)| \le 2\pi\psi(n)\frac{1}{|t|}. \tag{26}$$

З іншого боку, згідно з (17), для довільних $t \in \mathbb{R}$

$$|\Psi_{\beta,n}(t)| \le \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) \le \psi(n) + \int\limits_{n}^{\infty}\psi(u)du. \tag{27}$$

Для оцінки інтеграла в правій частині формули (27) скористаємось наступним твердженням роботи [23, с. 500].

Твердження 2. *Якщо функція $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^{+}$, то для довільного $m \in \mathbb{N}$, такого, що $\mu(\psi, m) > 2$ виконується умова*

$$\int\limits_{m}^{\infty}\psi(u)du \le \frac{2}{1-\frac{2}{\mu(m)}}\psi(m)(\eta(m) - m). \tag{28}$$

Якщо $\mu(\psi, n) \ge b > 2$, то з нерівності (28), маємо

$$\int\limits_{n}^{\infty}\psi(u)du \le \frac{2b}{b-2}\psi(n)(\eta(n) - n). \tag{29}$$

Отже, із (27), враховуючи (29), для $n \in \mathbb{N}$ таких, що $\eta(n)-n \geq a > 0$, отримуємо

$$|\Psi_{\beta,n}(t)| \leq \left(\frac{2b}{b-2}+\frac{1}{a}\right)\psi(n)(\eta(n)-n), \ a>0, \ b>2, \tag{30}$$

для довільних $t \in \mathbb{R}$.

Поклавши $C_{a,b} = \frac{1}{\pi}\max\{\frac{2b}{b-2}+\frac{1}{a}, \ 2\pi\}$ і використавши нерівності (26), (30), отримуємо при $1 < p < \infty$

$$\frac{1}{\pi}\|\Psi_{\beta,n}(t)\|_{p'} \leq$$

$$\leq C_{a,b}\psi(n)\left(\int\limits_{|t|\leq\frac{1}{\eta(n)-n}}(\eta(n)-n)^{p'}dt+\int\limits_{\frac{1}{\eta(n)-n}\leq|t|\leq\pi}\frac{dt}{|t|^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq$$

$$\leq C_{a,b}\psi(n)\,(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}\,2^{\frac{1}{p'}}\left(1+\frac{1}{p'-1}\left(1-\frac{\pi^{1-p'}}{(\eta(n)-n)^{p'-1}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} <$$

$$< C_{a,b}2^{\frac{1}{p'}}\left(1+\frac{1}{p'-1}\right)^{\frac{1}{p'}}\psi(n)\,(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= C_{a,b}2^{\frac{1}{p'}}p^{\frac{1}{p'}}\psi(n)\,(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}, \quad a>0, \ b>2, \tag{31}$$

а при $p=1$ (тоді $p'=\infty$)

$$\frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_{p'} \leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{2b}{b-2}+\frac{1}{a}\right)\psi(n)(\eta(n)-n) \leq$$

$$\leq C_{a,b}\psi(n)(\eta(n)-n), \ a>0, \ b>2. \tag{32}$$

Співставивши (31) і (32) з (19), приходимо до нерівності

$$\mathcal{E}_n\Big(C^{\psi}_{\beta,p}\Big)_C \leq C_{a,b}(2p)^{1-\frac{1}{p}}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}$$

при $1 \leq p < \infty$, $a>0, \ b>2$.

Для завершення доведення теореми 1, враховуючи очевидну нерівність

$$E_n\Big(C^{\psi}_{\beta,p}\Big)_C \le \mathcal{E}_n\Big(C^{\psi}_{\beta,p}\Big)_C,$$

достатньо показати, що за умов $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$ і $\eta(n) - n \ge$ $\ge a > 2$, $\mu(n) \ge b > 2$, знайдеться функція $f^* \in C^{\psi}_{\beta,p}$, така, що

$$E_n(f^*)_C = \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f^*(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C \ge$$

$$\ge C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}},\ 1 \le p \le \infty, \tag{33}$$

де стала C_a визначена формулою (5).

Розглянемо при заданому $n \in \mathbb{N}$ функцію

$$f_p(t) = f_p(\psi;n;t) = \frac{(a-1)(a-2)}{2\,(1+\pi^2)\,a(3a-4)}\frac{1}{(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}}}\times$$

$$\times\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right),\ a > 2, \tag{34}$$

де функції $W_{N,M}(\lambda;\gamma;t)$ означені формулою (7).

Покажемо, що функція $f_p(\cdot)$ належить класу $C^{\psi}_{\beta,p}, 1 \le p \le \infty$. Для цього досить переконатись у виконанні нерівності

$$\left\|\left(f_p(\cdot)\right)^{\psi}_{\beta}\right\|_p \le 1,\ 1 \le p \le \infty. \tag{35}$$

З цією метою спочатку виконаємо певні перетворення правої частини рівності (34). Двічі використавши рівність (8), можемо записати

$$W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t) = \sum_{k=1}^{[\eta(n)]}\psi(k)\cos kt+$$

$$+\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1}\left([\eta(\eta(n))]-k\right)\psi(k)\cos kt-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\psi(k)\cos kt - \frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1}\left([\eta(n)]-k\right)\psi(k)\cos kt =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]} \psi(k)\cos kt - \frac{1}{[\eta(n)]-n} \sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1} ([\eta(n)]-k)\,\psi(k)\cos kt +$$

$$+ \frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]} \sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1} ([\eta(\eta(n))]-k)\,\psi(k)\cos kt =$$

$$= \frac{1}{[\eta(n)]-n} \sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1} (k-n)\psi(k)\cos kt + \psi([\eta(n)])\cos([\eta(n)]t) +$$

$$+ \frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]} \sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1} ([\eta(\eta(n))]-k)\,\psi(k)\cos kt. \qquad (36)$$

Зауважимо, що оскільки $W_{N,M}(\lambda;\gamma;t)$ є тригонометричним поліномом порядку M, то згідно з означенням (ψ,β)–похідної, можна вважати, що $(W_{N,M}(\lambda;\gamma;t))^{\psi}_{\beta}$ також є тригонометричним поліномом порядку M. Враховуючи це зауваження, із співвідношення (36) для довільних $\psi \in \mathfrak{M}$, $\beta \in \mathbb{R}$, знаходимо

$$\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^{\psi}_{\beta} =$$

$$= \frac{1}{[\eta(n)]-n} \sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1} (k-n)\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \cos\left([\eta(n)]t + \frac{\beta\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]} \sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1} ([\eta(\eta(n))]-k)\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right). \qquad (37)$$

Лема 3. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, $\eta(n)-n \geq a$, $\mu(n) \geq b$, β — довільне дійсне число. Тоді*
1) якщо $a>0$, $b>0$, то

$$\left|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^{\psi}_{\beta}\right| \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}\right)(\eta(n)-n), \ \ t \in \mathbb{R}; \qquad (38)$$

2) якщо $a > 2$, $b > 0$, то

$$\left|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_{\beta}^{\psi}\right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{a}{a-1} + \frac{2a}{a-2}\right)\frac{\pi^2}{t^2}\frac{1}{\eta(n)-n}, \quad 0 < |t| \leq \pi. \tag{39}$$

***Доведення леми* 3.** Спочатку доведемо (38). З рівності (37), випливає, що

$$\left|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_{\beta}^{\psi}\right| \leq \frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1}(k-n)+$$

$$+1 + \frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1}([\eta(\eta(n))]-k) = \frac{[\eta(n)]-n-1}{2} + 1+$$

$$+\frac{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]-1}{2} = \frac{1}{2}\left(([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]) + ([\eta(n)]-n)\right). \tag{40}$$

Застосувавши до оцінки правої частини (40) лему 2, приходимо до нерівності (38).

Перейдемо до доведення нерівності (39). В силу означення (ψ,β)–похідної для довільної $\psi \in \mathfrak{M}$ одержуємо

$$\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_{\beta}^{\psi} =$$

$$= \left(\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]}^{[\eta(\eta(n))]-1}\sum_{j=1}^{k}\psi(j)\cos jt\right)_{\beta}^{\psi} -$$

$$-\left(\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1}\sum_{j=1}^{k}\psi(j)\cos jt\right)_{\beta}^{\psi} =$$

$$= \frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]}^{[\eta(\eta(n))]-1}\sum_{j=1}^{k}\cos\left(jt + \frac{\beta\pi}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1}\sum_{j=1}^{k}\cos\left(jt+\frac{\beta\pi}{2}\right). \qquad (41)$$

Із (41), використовуючи рівність (23) та формулу

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sin(x+ky)=\sin\left(x+\frac{N-1}{2}y\right)\sin\frac{Ny}{2}\operatorname{cosec}\frac{y}{2},$$

(див., наприклад, [24, с. 43]), отримуємо

$$\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_{\beta}^{\psi}=$$

$$=\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]}^{[\eta(\eta(n))]-1}D_{k,-\beta}(t)-\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1}D_{k,-\beta}(t)=$$

$$=\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]}^{[\eta(\eta(n))]-1}\frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\sin\frac{\beta\pi}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}-$$

$$-\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1}\frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\sin\frac{\beta\pi}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]}^{[\eta(\eta(n))]-1}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}\left(\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\left(\sin\left(\frac{[\eta(\eta(n))]}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{[\eta(\eta(n))]}{2}t-\right.\right.$$

$$\left.-\sin\left(\frac{[\eta(n)]}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{[\eta(n)]}{2}t\right)-$$

$$-\frac{1}{[\eta(n)]-n}\left(\sin\left(\frac{[\eta(n)]}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{[\eta(n)]}{2}t-\right.$$

$$-\sin\left(\frac{n}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{n}{2}t\bigg)\bigg). \tag{42}$$

Із (42), беручи до уваги нерівність (24), знаходимо

$$\left|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^{\psi}_{\beta}\right|\leq$$

$$\leq\frac{\pi^2}{t^2}\left(\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}+\frac{1}{[\eta(n)]-n}\right),\quad 0<|t|\leq\pi. \tag{43}$$

Звідси нерівність (39) є наслідком (43) та оцінок (9) і (10) леми 2.

Лему доведено.

Повертаючись до доведення нерівності (35), нагадаємо, що для функції (ψ,β)–похідної функції $f_p(t)$, визначеної за формулою (34), має місце рівність

$$(f_p(t))^{\psi}_{\beta}=\frac{(a-1)(a-2)}{2\left(1+\pi^2\right)a(3a-4)}\frac{1}{(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}}}\times$$

$$\times\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^{\psi}_{\beta}. \tag{44}$$

Оцінимо $\left\|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^{\psi}_{\beta}\right\|_p$, $1\leq p\leq\infty$.

При $1\leq p<\infty$ з (38) випливає оцінка

$$\int\limits_{|t|\leq\frac{1}{\eta(n)-n}}\left|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^{\psi}_{\beta}\right|^p dt\leq$$

$$\leq\int\limits_{|t|\leq\frac{1}{\eta(n)-n}}\left(1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\right)^p(\eta(n)-n)^p dt=$$

$$=2\left(1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\right)^p(\eta(n)-n)^{p-1}, \tag{45}$$

а з нерівності (39) — оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{\eta(n)-n}\leq|t|\leq\pi}\left|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^{\psi}_{\beta}\right|^p dt\leq$$

$$\leq \left(\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2}\right)^{p}\pi^{2p}\frac{1}{(\eta(n)-n)^{p}}\int\limits_{\frac{1}{\eta(n)-n}\leq|t|\leq\pi}\frac{1}{t^{2p}}dt=$$

$$=\left(\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2}\right)^{p}\pi^{2p}(\eta(n)-n)^{p-1}\frac{2}{2p-1}\left(1-\frac{\pi^{1-2p}}{(\eta(n)-n)^{2p-1}}\right)<$$

$$<2\pi^{2p}\left(\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2}\right)^{p}(\eta(n)-n)^{p-1}. \tag{46}$$

Об'єднуючи (45) – (46), та враховуючи очевидну нерівність

$$\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2}>1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b},\ a>2,\ b>2, \tag{47}$$

маємо при $1\leq p<\infty$

$$\left\|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_{\beta}^{\psi}\right\|_{p}\leq$$

$$\leq\left(\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2}\right)2^{\frac{1}{p}}\left(1+\pi^{2p}\right)^{\frac{1}{p}}(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq 2\left(\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2}\right)\left(1+\pi^{2}\right)(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}}=$$

$$=\frac{2\left(1+\pi^{2}\right)a(3a-4)}{(a-1)(a-2)}(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}}. \tag{48}$$

При $p=\infty$ з (38), враховуючи (47), маємо

$$\left\|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_{\beta}^{\psi}\right\|_{\infty}\leq$$

$$\leq\left(1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\right)(\eta(n)-n)<\frac{a(3a-4)}{(a-1)(a-2)}(\eta(n)-n). \tag{49}$$

З (44), беручи до уваги (48) та (49), приходимо до нерівності (35). Отже, $f_p\in C_{\beta,p}^{\psi}$, при всіх $1\leq p\leq\infty$ і $\beta\in\mathbb{R}$.

Тепер покладемо $f^*(\cdot)=f_p(\cdot)$ і доведемо (33). Оскільки для будь–якого тригонометричного полінома $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right)t_{n-1}(t)dt=0, \tag{50}$$

то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(f_p(t) - t_{n-1}(t)\big) \big(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\big)\, dt =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_p(t) \big(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\big)\, dt =$$

$$= \frac{(a-1)(a-2)}{2\,(1+\pi^2)\,a(3a-4)} \frac{1}{(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}}} \times$$

$$\times \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\big) \times$$

$$\times \big(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\big)\, dt. \tag{51}$$

Проведемо перетворення інтеграла в правій частині (51). Застосовуючи рівність (8) до функцій $W_{N,M}(\lambda;\gamma;t)$ при $\lambda(k) = 1$, $\gamma = 0$, $N = n$, $M = [\eta(n)]$, а також при $\lambda(k) = 1$, $\gamma = 0$, $N = [\eta(n)]$, $M = [\eta(\eta(n))]$, і діючи так само, як і при доведенні співвідношення (36), легко показати, що

$$W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t) =$$

$$= \frac{1}{[\eta(n)]-n} \sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1} (k-n)\cos kt + \cos([\eta(n)]t) +$$

$$+ \frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]} \sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1} ([\eta(\eta(n))]-k)\cos kt. \tag{52}$$

Використовуючи рівності (36) і (52), отримуємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\big) \times$$

$$\times\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right)dt=$$

$$=\frac{\pi}{([\eta(n)]-n)^2}\sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1}\psi(k)(k-n)^2+\pi\psi([\eta(n)])+$$

$$+\frac{\pi}{([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])^2}\sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1}\psi(k)\left([\eta(\eta(n))]-k\right)^2=:\Sigma_1. \qquad (53)$$

Оскільки $\psi(t)$ спадає, то, з урахування означення характеристики $\eta(t)$

$$\Sigma_1>\pi\psi(\eta(\eta(n)))\left(\frac{1}{([\eta(n)]-n)^2}\sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1}(k-n)^2+1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])^2}\sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1}\left([\eta(\eta(n))]-k\right)^2\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}\psi(n)\left(\frac{1}{([\eta(n)]-n)^2}\sum_{k=1}^{[\eta(n)]-n-1}k^2+1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])^2}\sum_{k=1}^{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]-1}k^2\right)=:\frac{\pi}{4}\psi(n)\Sigma_2. \qquad (54)$$

Використовуючи формулу (див., наприклад, [24, с. 15])

$$\sum_{k=1}^{M}k^2=\frac{M(M+1)(2M+1)}{6},\quad M\in\mathbb{N},$$

при $M=[\eta(n)]-n-1$ та $M=[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]-1$, одержуємо

$$\Sigma_2=\frac{([\eta(n)]-n-1)([\eta(n)]-n)(2[\eta(n)]-2n-1)}{6([\eta(n)]-n)^2}+1+$$

$$+\frac{([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]-1)([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])(2[\eta(\eta(n))]-2[\eta(n)]-1)}{6([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])^2}=$$

$$= \frac{([\eta(n)] - n - 1)(2[\eta(n)] - 2n - 1)}{6([\eta(n)] - n)} + 1 +$$

$$+ \frac{([\eta(\eta(n))] - [\eta(n)] - 1)(2[\eta(\eta(n))] - 2[\eta(n)] - 1)}{6([\eta(\eta(n))] - [\eta(n)])} =$$

$$= \frac{1}{6}\Bigg(2([\eta(n)] - n) + 2([\eta(\eta(n))] - [\eta(n)]) + \frac{1}{[\eta(n)] - n} +$$

$$+ \frac{1}{[\eta(\eta(n))] - [\eta(n)]}\Bigg). \qquad (55)$$

Але, згідно з нерівностями (9) і (10), при $a > 2$, маємо

$$\frac{1}{6}\Bigg(2([\eta(n)] - n) + 2([\eta(\eta(n))] - [\eta(n)]) + \frac{1}{[\eta(n)] - n} +$$

$$+ \frac{1}{[\eta(\eta(n))] - [\eta(n)]}\Bigg) > \frac{3a - 4}{6a}(\eta(n) - n),$$

і тому

$$\Sigma_2 > \frac{3a - 4}{6a}(\eta(n) - n). \qquad (56)$$

Із (51), об'єднуючи формули (52) – (56), отримуємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(f_p(t) - t_{n-1}(t)\big)\big(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\big)\,dt \geq$$

$$\geq \frac{\pi(a-1)(a-2)}{48\,(1+\pi^2)\,a^2}\psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}. \qquad (57)$$

З іншого боку, зауваживши, що виходячи з (7), і згідно з означенням (ψ, β)–похідної при $\beta = 0$

$$W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t) =$$

$$= \big(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\big)_0^{\psi}, \qquad (58)$$

та використовуючи (48) і нерівність Гельдера (18), отримуємо

$$\int_{-\pi}^{\pi}\big(f_p(t)-t_{n-1}(t)\big)\big(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\big)\,dt\leq$$

$$\leq\|f_p(t)-t_{n-1}(t)\|_\infty\left\|\big(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\big)\right\|_1\leq$$

$$\leq\frac{2\left(1+\pi^2\right)a(3a-4)}{(a-1)(a-2)}\|f_p(t)-t_{n-1}(t)\|_\infty. \tag{59}$$

З (57) і (59) випливає, що для довільного $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$

$$\|f_p(t)-t_{n-1}(t)\|_\infty\geq\frac{\pi(a-1)^2(a-2)^2}{96\left(1+\pi^2\right)^2a^3(3a-4)}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорему 1 доведено.

Якщо функції ψ з множини $\mathfrak{M}_\infty^+$ задовольняють умову

$$\lim_{t\to\infty}(\eta(\psi,t)-t)=\infty, \tag{60}$$

то умови теореми 1 виконуються для всіх номерів n, починаючи з деякого номера n_0.

Важливим прикладом функцій $\psi(t)$ з множини $\mathfrak{M}_\infty^+$, які задовольняють умову (60) є функції

$$\psi_{r,\alpha}(t)=\exp(-\alpha t^r),\ \alpha>0,\ r\in(0,1). \tag{61}$$

Для них $\eta(\psi_{r,\alpha};n)=\left(\alpha^{-1}\ln 2+n^r\right)^{\frac{1}{r}}$. Тоді, використавши узагальнену нерівність Бернуллі

$$(1+x)^\rho\geq 1+\rho x,\ x>-1,\ \rho\in(-\infty,0]\cup[1,\infty),$$

отримуємо

$$\eta(\psi_{r,\alpha};n)-n=n\left(\left(1+\frac{\ln 2}{\alpha n^r}\right)^{\frac{1}{r}}-1\right)\geq\frac{\ln 2}{\alpha r}n^{1-r},\ n\in\mathbb{N}. \tag{62}$$

З формули (62) випливає, що для всіх номерів $n \geq 1 + \left(\frac{2r\alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{1-r}}$ виконується нерівність

$$\eta(\psi_{r,\alpha}; n) - n \geq a > 2$$

при

$$a = a(\alpha, r) = \frac{\ln 2}{\alpha r}\left(1 + \left(\frac{2r\alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{1-r}}\right)^{1-r}. \tag{63}$$

В силу (63)

$$\mu(\psi_{r,\alpha}; n) = \frac{n}{\eta(\psi_{r,\alpha}; n) - n} = \frac{1}{\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r} + 1\right)^{\frac{1}{r}} - 1}$$

і, як неважко переконатись, для всіх $n \geq 1 + 2\left(\frac{\ln 2}{\alpha(3^r - 2^r)}\right)^{\frac{1}{r}}$ виконується нерівність

$$\mu(\psi_{r,\alpha}; n) \geq b > 2,$$

де

$$b = b(r, \alpha) = \left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha}\left(1 + 2\left(\frac{\ln 2}{\alpha\left(3^r - 2^r\right)}\right)^{\frac{1}{r}}\right)^{-r} + 1\right)^{\frac{1}{r}} - 1\right)^{-1}. \tag{64}$$

З наведених вище міркувань випливає, що до класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, породжених послідовностями $\psi_{r,\alpha}(t)$ вигляду (61) можна застосувати теорему 1, в умові якої параметри a і b визначаються формулами (63) і (64) відповідно. В результаті одержимо наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $\psi_{r,\alpha}(t) = \exp\left(-\alpha t^r\right)$, $r \in (0,1)$, $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді для всіх* $n \in \mathbb{N}$, *таких, що*

$$n \geq 1 + \max\left\{\left(\frac{2r\alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{1-r}}, 2\left(\frac{\ln 2}{\alpha\left(3^r - 2^r\right)}\right)^{\frac{1}{r}}\right\},$$

справедливі оцінки

$$C_a \exp\left(-\alpha n^r\right) n^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r} + 1\right)^{\frac{1}{r}} - 1\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq E_n\Big(C^{\alpha,r}_{\beta,p}\Big)_C \leq \mathcal{E}_n\big(C^{\alpha,r}_{\beta,p}\big)_C \leq$$

$$\leq C_{a,b}\,(2p)^{1-\frac{1}{p}} \exp\left(-\alpha n^r\right) n^{\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r}+1\right)^{\frac{1}{r}}-1\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (65)$$

де величини C_a і $C_{a,b}$ означаються формулами (5) і (6) при $a = a(\alpha, r)$, $b = b(\alpha, r)$, що задані за допомогою рівностей (63) і (64) відповідно.

Зазначимо також, що оскільки

$$\eta(\psi_{r,\alpha}; n) - n = n\left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r}+1\right)^{\frac{1}{r}}-1\right) \asymp n^{1-r},\ r \in (0,1],\ \alpha > 0,$$

то з (65) випливають порядкові рівності

$$\mathcal{E}_n\Big(C^{\alpha,r}_{\beta,p}\Big)_C \asymp E_n\Big(C^{\alpha,r}_{\beta,p}\Big)_C \asymp \exp\left(-\alpha n^r\right) n^{\frac{1-r}{p}},\ 1 \leq p < \infty, \quad (66)$$

де для додатних послідовностей $A(n)$ і $B(n)$ запис $A(n) \asymp B(n)$ означає, що існують додатні сталі K_1 і K_2 такі, що $K_1 B(n) \leq A(n) \leq K_2 B(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Зазначимо, що для величини $\mathcal{E}_n\Big(C^{\alpha,r}_{\beta,p}\Big)_C$ порядкові оцінки (66) знайдені в [22].

В наступній теоремі встановимо порядкові оцінки величин $E_n\big(L^{\psi}_{\beta,p}\big)_s$ і $\mathcal{E}_n\big(L^{\psi}_{\beta,p}\big)_s$ у випадку $p = 1$, $1 < s \leq \infty$.

Теорема 2. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}(\eta(\psi,t)-t) = \infty$, $1 < s \leq \infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'} = 1$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$, таких, що $\eta(n) - n \geq a > 2$, $\mu(n) \geq b > 2$ справедливі оцінки*

$$C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}} \leq E_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s \leq \mathcal{E}_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s \leq$$

$$\leq C_{a,b}\ (2s')^{\frac{1}{s}}\,\psi(n)\,(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}}, \quad (67)$$

де величини C_a і $C_{a,b}$ означаються формулами (5) і (6) відповідно.

Доведення. Використовуючи інтегральне зображення (15) та нерівність Юнга (див., наприклад, [1, с. 293]), при $1 \leq s \leq \infty$ можемо записати

$$\mathcal{E}_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s \leq \frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_s \|\varphi(\cdot)\|_1 \leq \frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_s. \quad (68)$$

Але, із співвідношень (31) і (32) за умов теореми 2 випливає нерівність

$$\frac{1}{\pi}\|\Psi_{\beta,n}(t)\|_s \leq C_{a,b}(2s')^{\frac{1}{s}}\psi(n)\,(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s}}, 1<s\leq\infty, \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1. \quad (69)$$

Отже, об'єднуючи (68) і (69), одержуємо оцінку зверху для величини $\mathcal{E}_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s$ в співвідношенні (67).

Щоб одержати в теоремі 2 оцінку знизу для величини $E_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s$, $1<s\leq\infty$, розглянемо функцію $f_p(t)$, визначену формулою (34) при $p=1$, тобто функцію

$$f_1(t)=f_1(n,\psi,t)=\frac{(a-1)(a-2)}{2\,(1+\pi^2)\,a(3a-4)}\times$$
$$\times\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right).$$

Зауваживши, що згідно з (48) $f_1\in L^{\psi}_{\beta,1}$, покажемо, що

$$E_n(f_1)_s\geq C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}},\ 1\leq s\leq\infty. \quad (70)$$

З нерівностей (18), (48), (49) та рівності (58), для будь-якого $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$, маємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f_1(t)-t_{n-1}(t)\big)\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right)dt\leq$$
$$\leq\|f_1(t)-t_{n-1}(t)\|_s\left\|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right)\right\|_{s'}=$$
$$=\|f_1(t)-t_{n-1}(t)\|_s\left\|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^{\psi}_{0}\right\|_{s'}\leq$$
$$\leq\frac{2\left(1+\pi^2\right)a(3a-4)}{(a-1)(a-2)}(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{s'}}\|f_1(t)-t_{n-1}(t)\|_s. \quad (71)$$

Зі співвідношень (57) і (71) випливає, що для будь-якого $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$

$$\|f_1(t)-t_{n-1}(t)\|_s\geq\frac{\pi}{96\,(1+\pi^2)^2}\frac{(a-1)^2(a-2)^2}{a^3(3a-4)}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}}=$$

$$= C_{a,b}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}},$$

звідки слідує (70). Теорему 2 доведено.

Наслідок 2. *Нехай* $\psi_{r,\alpha}(t) = \exp(-\alpha t^r)$, $r\in(0,1)$, $\alpha>0$, $1<s\le\infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді для всіх* $n\in\mathbb{N}$, *таких, що*

$$n\ge 1+\max\left\{\left(\frac{2r\alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{1-r}}, 2\left(\frac{\ln 2}{\alpha\,(3^r-2^r)}\right)^{\frac{1}{r}}\right\},$$

справедливі оцінки

$$C_a\exp(-\alpha n^r)\,n^{\frac{1}{s'}}\left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r}+1\right)^{\frac{1}{r}}-1\right)^{\frac{1}{s'}}\le$$

$$\le E_n\left(L^{\alpha,r}_{\beta,1}\right)_s\le \mathcal{E}_n\left(L^{\alpha,r}_{\beta,1}\right)_s\le$$

$$\le C_{a,b}\,(2s')^{\frac{1}{s}}\exp(-\alpha n^r)\,n^{\frac{1}{s'}}\left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r}+1\right)^{\frac{1}{r}}-1\right)^{\frac{1}{s'}},$$

де величини C_a *і* $C_{a,b}$ *означаються формулами (5) і (6) при* $a=a(\alpha,r)$, $b=b(\alpha,r)$ *із (63) і (64) відповідно.*

Для $\mathcal{E}_n\left(L^{\alpha,r}_{\beta,1}\right)_s$, $E_n\left(L^{\alpha,r}_{\beta,1}\right)_s$, $r\in(0,1]$, $\alpha>0$, $1<s\le\infty$, аналогічно до (66) можна записати

$$\mathcal{E}_n\left(L^{\alpha,r}_{\beta,1}\right)_s\asymp E_n\left(L^{\alpha,r}_{\beta,1}\right)_s\asymp\exp(-\alpha n^r)\,n^{\frac{1-r}{s'}},\quad n\in\mathbb{N}.$$

1. *Степанец А.И.* Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — **40**. — Ч. I. — 427 с.
2. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.
3. *Степанец А.И., Сердюк А.С., Шидлич А.Л.* Классификация бесконечно дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, №12. — С. 1686 – 1708.
4. *Temlyakov V.N.* Approximation of Periodic Function. — Nova Science Publi–chers, Inc., 1993. — 419 p.

5. *Kolmogoroff A.* Zur Grössennordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Funktionen // Ann. Math. — 1935. — **36**, №2. — P. 521 – 526.
6. *Пинкевич В.Т.* О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1940. — **4**, №6. — С. 521 – 528.
7. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — **10**, №3. — С. 207 – 256.
8. *Favard J.* Sur l'approximation des fonctions périodiques par des polynomes trigonométriques // C.R. Acad. Sci. — 1936. — **203**. — P. 1122 – 1124.
9. *Favard J.* Sur les meilleurs procédes d'approximations de certains classes de fontions par des polynomes trigonométriques // Bull. de Sci. Math. — 1937. — **61**. — P. 209 – 224, 243 – 256.
10. *Дзядык В.К.* О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s–ю производную $(0 < s < 1)$ // Изв. АН СССР, Сер. мат. — 1953. — **17**. — С. 135 – 162.
11. *Дзядык В.К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки. — 1974. — **16**, №5. — С. 691 – 701.
12. *Стечкин С.Б.* О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР, Сер. мат. — 1956. — **20**. — С. 643 – 648.
13. *Сунь Юн–шен.* О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1959. — **23**, №1. — С. 67 – 92.
14. *Бабенко В.Ф., Пичугов С.А.* О наилучшем линейном приближении некоторых классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. — 1980. — **27**, №5. — С. 683 – 689.
15. *Степанец А.И., Кушпель А.К.* Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, №4. — С. 483 – 492.
16. *Сердюк А.С., Соколенко І.В.* Рівномірні наближення класів $(\psi,\overline{\beta})$–диференційовних функцій лінійними методами // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2011. — **8**, №1. — С. 181 – 189.
17. *Сердюк А.С., Соколенко І.В.* Наближення лінійними методами класів $(\psi,\overline{\beta})$–диференційовних функцій // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2013. — **10**, №1. — С. 245 – 254.
18. *Сердюк А.С., Грабова У.З.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ,β) – диференційовних функцій // Arxiv preprint, arXiv:1301.7620, 2013. — 14 с.

19. *Степанец А.И.* Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — **40**. — Ч. II. — 468 с.

20. *Сердюк А.С.* Про один лінійний метод наближення періодичних функцій // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2004. — **1**, №1. — С. 294 – 336.

21. *Сердюк А.С.* Про найкраще наближення на класах згорток періодичних функцій // Теорія наближення та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **41**. — С. 168 – 189.

22. *Романюк В.С.* Дополнения к оценкам приближения суммами Фурье классов бесконечно дифференцируемых функций // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — 2003. — **46**. — С. 131 – 135.

23. *Сердюк А.С.* Наближення нескінченно диференційовних періодичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами // Укр. мат. журн. –– 2004. –– **56**, №4. –– С. 495 – 505.

24. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматиз, 1962. — 1100 с.