Збірник праць Інституту математики НАН України 2015, т. 12, № 5, 24–31

УДК 532:595

Координатні функції для реалізації проекційних методів у задачах гідродинаміки

М. Я. Барняк

Інститут математики НАН України, Київ; barnyak@imath.kiev.ua

The paper constructs a family of harmonic functions which are furthermore adopted as a functional basis of a projective method in the hydrodynamics of a limited liquid volume. To get these functions, the Whittecker representation is utilised. Exact and recurrence formulas are derived to compute the harmonic functions and their derivatives. The harmonic functions are analytical in the closed domain of definition but their analytical continuation has a jump along a ray going from the domain corner points. Employing the functional set improves the precision of the projective method and makes it possible to get extra 2-3 significant figures of the approximate solution.

В работе построена система решений уравнения Лапласа, которые используются в качестве координатных функций для чисельной реализации проекционных методов решения задач гидродинамики ограниченного объема жидкости. Для построения этих функций используется представление Уиттекера для гармонических функций. Получены явные формулы для вычисления этих функций, а также рекуррентные формулы для вычисления последовательности этих функций и их частных производных. Эти функции аналитичны в замкнутой области, а за пределами области в окрестности угловой точки на некотором луче терпят разрыв сами функции или их частные производные. Наличие именно таких особенностей в искомых решениях краевых задач в областях с угловыми точками повышает на 2-3 порядка точность приближенных решений.

* Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0112U001015.

Як відомо із робіт [1, 2, 4], коефіцієнти рівнянь руху твердого тіла із порожнинами, які частково заповнені рідиною і мають форму тіла обертання відносно вертикальної осі, визначаються на основі розв'язків наступних крайових задач:

$$L_1\psi \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{r^2}\psi=0 \ \text{ в } \ G, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=r\cos nz-z\cos nr \ \text{ на } \ L+\Gamma;$$

$$L_m\varphi \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi^m}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\varphi^m}{\partial z^2}-\frac{m^2}{r^2}\varphi^m=0 \ \text{ в } \ G, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^m}{\partial z}=\varkappa\varphi^m \ \text{ на } \ \Gamma, \ \ \frac{\partial^m}{\partial n}=0 \ \text{ на } \ L, \ \ (m=0,1,2,\ldots).$$

Тут: G — меридіальний переріз області Ω, яка заповнена рідиною в стані спокою; L і Γ — меридіальні перерізи, відповідно, твердої стінки порожнини і вільної поверхні рідини в стані спокою; n — зовнішня по відношенню до G, нормаль до L і Γ; (z, r, η) — циліндрична система координат, в якій вісь z співпадає з віссю симетрії порожнини і направлена вертикально вгору, а η —кругова координата.

Задача Неймана (1) визначає потенціал Стокса–Жуковського $\psi(r, z)$, а розв'язки задачі (2) описують власні коливання ідеальної рідини у нерухомій посудині. Точні розв'язки обох задач відомі тільки у випадку найпростіших областей, таких, наприклад, як циліндричні. Для областей більш складної геометричної форми розроблені варіаційні методи, що грунтуються на побудові функцій, які мінімізують функціонал [3]

$$K(\psi)=\int\limits_G\left[r\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2+r\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2+\frac{m^2}{r}\psi^2\right]dG-$$

$$-2\int\limits_{L+\Gamma} r(r\cos nz-z\cos nr)\,dr \tag{3}$$

для задачі (1), а також, як відомо із робіт [1, 2, 4], функціонали

$$F_m(\varphi^m)=\frac{\int\limits_G\left[r\left(\frac{\partial\varphi^m}{\partial r}\right)^2+r\left(\frac{\partial\varphi^m}{\partial z}\right)^2+\frac{m^2}{r}(\varphi^m)^2\right]dG}{\int\limits_\Gamma r(\varphi^m)^2\,dr}, \ (m=0,1,\ldots) \tag{4}$$

для задач (2) на класі функцій $\psi \in W^1_{2,r}(G)$ і $\varphi^m \in W^1_{2,r}(G)$. Тут $W^1_{2,r}(G)$ — простір Соболева функцій, які інтегровані з квадратом, разом з першими частинними похідними по області G з вагою r.

На класі функцій $\psi(r,z)$ і $\varphi^m(r,z)$, які задовольняють рівняння

$$L_1\psi = 0 \text{ в } G \text{ і } L_m\varphi^m = 0 \text{ в } G, \tag{5}$$

функціонали (3) і (4) приймають такий вигляд:

$$K(\psi) = \int\limits_{L+\Gamma} r\psi \frac{\partial\psi}{\partial n}\, dl - 2\int\limits_{L+\Gamma} r(r\cos nz - z\cos nr)\,\psi\, dl, \tag{6}$$

$$F_m(\varphi^m) = \frac{\int\limits_{L+\Gamma} r\varphi^m \dfrac{\partial\varphi^m}{\partial n}\, dl}{\int\limits_{\Gamma} r(\varphi^m)^2\, dr}. \tag{7}$$

Мінімізацію виписаних вище функціоналів традиційно проводять за допомогою методу Рітца, згідно з яким наближені розв'язки задач (1) і (2) апроксимуються скінченими сумами

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k\, w_k^m, \quad \psi = \sum_{k=1}^{N} b_k\, w_k^1,$$

де $\{w_k^m\}_{k=1}^{\infty}$ — система координатних функцій, які задовольняють рівняння (5).

Успішна реалізація методу Рітца залежить від вибору системи координатних функцій.

Загальні питання відносно вибору координатних функцій і побудови розв'язків крайових задач методом Рітца розглянуті, наприклад, у роботі [3]. Система координатних функцій повинна задовольняти умови повноти в енергетичних просторах, на яких визначені функціонали (3) і (4), або (5) і (6). Бажано також, щоб координатні функції мали деякі характерні властивості шуканих розв'язків задачі.

Досвід використання енергетичних методів для побудови розв'язків крайових задач теорії руху твердого тіла з порожнинами, частково заповненими рідиною, показує, що найбільш універсальними і одночасно простими системами координатних функцій є ті, що одержані з допомогою сферичних функцій. Широке застосування ці системи знайшли при розв'язувані задач для класу однозв'язних порожнин, які мають форму тіла обертання.

Ці функції задаються наступними співвідношеннями і рекурентними формулами:

$$w_m^m(r,z) = r^m, \quad w_{m+1}^m(r,z) = z\,r^m,$$
$$(k+m+1)w_{k+1}^m(r,z) = (2k+1)zw_k^m(r,z) - (k-m)(r^2+z^2)w_{k-1}^m. \tag{8}$$

Для частинних похідних цих функцій по змінних r і z справедливі такі формули

$$r\frac{\partial w_k^m}{\partial r} = kw_k^m - (k-m)zw_{k-1}^m, \quad \frac{\partial w_k^m}{\partial z} = (k-m)w_{k-1}^m. \tag{9}$$

Функції $w_k^m(r,z)$ виявилися ефективними при чисельній реалізації методу Рітца для визначення розв'язків задачі (1) та при визначенні перших двох або трьох власних значень і власних функцій задачі (2) при невеликих відносних глибинах рідини. Застосовуючи перетворення Лапласа, одержуємо такі розв'язки рівняння (2)

$$\bar{w}_k^m(r,z) = \frac{1}{R}w_k^m\Big(\frac{r}{R^2}, \frac{z}{R^2}\Big), \text{ де } R = \sqrt{r^2+z^2}. \tag{10}$$

Функції $w_k^m(r,z)$ та $\bar{w}_k^m(r,z)$ визначені при $k \geq m$. Ці системи функцій, як відомо із [2, 4], можна подати наступним чином:

$$w_k^m(r,z) = b_{km}R^kP_k^m(\cos\theta), \bar{w}_k^m(r,z) = R^{-k-1}P_k^m(\cos\theta), \tag{11}$$

де $b_{km} = \frac{2^m m!(k-m)!}{k!}, \tan\theta = \frac{r}{z}, z = R\cos\theta, r = R\sin\theta, P_k^m(\cos\theta)-$ приєднані поліноми Лежандра, $k = m, m+1, \ldots$. Із наведених вище формул випливає, що із серед множин розв'язків (11) нема функцій степенів однорідності $-m \leq k \leq m-1$. Цю прогалину можна заповнити у такий спосіб. Легко перевірити, що функція

$$w_0^m(r,z) = \Big(\frac{2(R+z)}{r}\Big)^m$$

задовольняє рівняння (2). Це ж рівняння задовольняє і функція

$$w_{-1}^m(r,z) = \frac{1}{R}\Big(\frac{2(R+z)}{r}\Big)^m = -\frac{1}{R}w_0^m(\frac{r}{R^2}, \frac{z}{R^2}) = -\frac{1}{R}w_0^m(r,z),$$

як функція, що одержана із $w_0^m(r,z)$ шляхом застосування перетворення інверсії.

Якщо підставити функції $w_{-1}^m(r,z)$ та $w_0^m(r,z)$ в рекурентну формулу (8), починаючи з $k=0$, тоді одержимо решту функцій $w_k^m(r,z)$. Цю ж формулу можна використати для того, щоб визначити функції $w_k^m(r,z)$ для від'ємних значень індекса k. Із (8), після заміни k на $(-k-1)$, маємо:

$$(k+m+1)(r^2+z^2)w_{-k-2}^m(r,z) = (2k+1)zw_{-k-1}^m(r,z) - (k-m)w_{-k}^m. \quad (12)$$

Наведена рекурентна формула є наслідком співвідношення

$$w_{-k-1}^m(r,z) = -\frac{1}{R}w_k^m\left(\frac{r}{R^2}, \frac{z}{R^2}\right). \quad (13)$$

Функції $w_k^m(r,z)$ при від'ємних значеннях індекса k мають степеневу особливість при $R=0$, а тому, при використані їх в якості координатних функцій, потрібно вибирати початок координат за межею області G. При побудові розв'язків задачі (8) у випадку глибоких порожнин, коли вертикальний розмір порожнини значно перевищує радіус вільної поверхні рідини, доцільно вибирати саме такі координатні функції.

Різноманітні розв'язки рівнянь (5) можна побудувати на основі представлення Уітекера для гармонічних функцій [6], яке зводиться в роботі [7] до наступного твердження: розв'язки рівнянь (5) визначаються, як дійсна та уявна частини функції

$$\varphi(r,z) = \int_0^\pi f(iz + r_0 + r\cos t)\,\cos mt\,dt, \quad (14)$$

де $f(u)$ — двічі неперервно диференційована функція комплексної змінної u, $r_0 > 0$ — віддаль від кутової точки області G до осі симетрії порожнини.

Для зручності введемо позначення $u = iz + r_0$. Тоді сформульоване вище твердження звучатиме так. Функція

$$\psi^m(r,u) = \int_0^\pi f(u + r\cos t)\,\cos mt\,dt, \quad (15)$$

задовольняє рівняння

$$L_m\psi^m \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi^m}{\partial r}\right) - \frac{\partial^2\psi^m}{\partial u^2} - \frac{m^2}{r^2}\psi^m = 0 \ \text{ в } \ G. \quad (16)$$

Вважаючи, що в формулі (15) функція $f(u + r\cos t)$ рівна $ln(u + r\cos t)(u + r\cos t)^k$, позначимо такі функції:

$$v_k^m(r,u) = \frac{2^m}{\pi}\int\limits_0^\pi ln(u + r\cos t)(u + r\cos t)^k \cos mt\, dt, \qquad (17)$$

$$s_k^m(r,u) = \frac{2^m}{\pi}\int\limits_0^\pi (u + r\cos t)^k \cos mt\, dt. \qquad (18)$$

Як випливає із інтегральних зображень цих функцій, для частинних похідних від цих функцій по змінних u та r мають місце наступні рекурентні формули:

$$\frac{\partial s_k^m}{\partial u} = ks_{k-1}^m, \quad r\frac{\partial s_k^m}{\partial r} = ks_k^m - uks_{k-1}^m, \qquad (19)$$

$$\frac{\partial v_k^m}{\partial u} = kv_{k-1}^m + s_{k-1}^m, \quad r\frac{\partial v_k^m}{\partial r} = kv_k^m - kuv_{k-1}^m + s_k^m - us_{k-1}^m. \qquad (20)$$

Диференціюючи одержані співвідношення по r і u, на основі тих самих співвідношень, одержуємо рекурентні співвідношення для других похідних від цих функцій, а після підстановки їх в рівняння (16), яке задовольняють+ функції $v_k^m(r,u)$ і $s_k^m(r,u)$, одержуємо наступні рекурентні формули:

$$(k^2 - m^2)s_k^m - uk(2k-1)s_{k-1}^m + (u^2 - r^2)k(k-1)s_{k-2}^m = 0, \qquad (21)$$

$$(k^2 - m^2)v_k^m - uk(2k-1)v_{k-1}^m + (u^2 - r^2)k(k-1)v_{k-2}^m + 2ks_k^m -$$
$$-u(4k-1)s_{k-1}^m + (u^2 + r^2)(2k-1)s_{k-2}^2 = 0. \qquad (22)$$

Використовуючи формулу (21), рекурентну формулу (22) можна спростити і записати в такому вигляді

$$[(k+2)^2 - m^2]v_{k+2}^m - u(k+2)(2k+3)v_{k+1}^m + (u^2 - r^2)(k+2)(k+1)v_k^m +$$
$$+\frac{m^2(2k+3) - (k+2)^2}{(k+1)(k+2)}s_{k+2}^m + \frac{k+2}{k+1}s_{k+1}^m = 0. \qquad (23)$$

Визначимо декілька перших функцій $s_k^m(r,u)$ і $v_k^m(r,u)$.

$$v_0^0(r,u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi ln(u + r\cos t)dt = ln\Big(\frac{\sqrt{u^2 - r^2} + u}{2}\Big), \qquad (24)$$

$$v_0^m(r,u) = -\frac{1}{m}\Big(2\frac{\sqrt{u^2-r^2}-u}{r}\Big)^m \text{ для } m \geq 1, \tag{25}$$

$$s_{-1}^m(r,u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-r^2}}\Big(2\frac{\sqrt{u^2-r^2}-u}{r}\Big)^m \text{ для } m \geq 0. \tag{26}$$

Як було зауважено вище, після заміни змінної $u = iz + r_0$ дійсна та уявна частини функції $v_k^m(iz+r_0, r)$ задовольняють рівняння (5). Вибираючи систему координат таким чином, щоб точка з координатами $(r_0, 0)$ співпадала з кутовою точкою області, ми наділяємо ці функції потрібними властивостями. Зауважимо при цьому, що всі функції $s_k^m(r,u)$ при $0 \leq k \leq m-1$ рівні тотожньому нулю. Згідно з рекурентними формулами (21) і (22) визначаємо значення функцій $s_k^m(r,u)$ і $v_k^m(r,u)$ та їх похідних, починаючи з $k=1$, і до $k=m-1$. Визначити значення функції $v_m^m(r,u)$ по цих формулах не вдається, оскільки коефіцієнт при $v_m^m(r,u)$ рівний нулю.

Функцію $v_m^m(r,u)$ визначимо в такий спосіб:

$$\begin{aligned}
v_k^m(r,u) &= \frac{2^m}{\pi}\int_0^\pi ln(u+r\cos(t))(u+r\cos(t))^k\cos(mt)dt = \\
&= \frac{2^m u}{\pi}\int_0^\pi ln(u+r\cos(t))(u+r\cos(t))^{k-1}\cos(mt)dt + \\
&+\frac{2^m r}{\pi}\int_0^\pi ln(u+r\cos(t))(u+r\cos(t))^{k-1}\cos(t)\cos(mt)dt = \\
&= \frac{2^{m-1} r}{\pi}\int_0^\pi ln(u+r\cos(t))(u+r\cos(t))^{k-1}(\cos((m-1)t) + \\
&+\frac{2^{m-1} r}{4\pi}\int_0^\pi ln(u+r\cos(t))(u+r\cos(t))^{k-1})\cos((m+1)t) + \\
&= uv_{k-1}^m(r,u) = uv_{k-1}^m(r,u) + rv_{k-1}^{m-1}(r,u) + \frac{r}{4}v_{k-1}^{m+1}(r,u).
\end{aligned} \tag{27}$$

Вважаємо, що $k = m$, тоді

$$v_m^m(r,u) = uv_{m-1}^m(r,u) + rv_{m-1}^{m-1}(r,u) + \frac{r}{4}v_{m-1}^{m+1}(r,u). \tag{28}$$

За допомогою одержаної рекурентної формули визначимо функцію $v_1^1(r,u)$. Для цієї мети випишемо згідно з (25) такі функції:

$$v_0^1(r,u) = -2\frac{\sqrt{u^2-r^2}-u}{r},\ v_0^2(r,u) = -2\left(\frac{\sqrt{u^2-r^2}-u}{r}\right)^2. \tag{29}$$

Далі, у відповідності до формули (28), отримуємо

$$\begin{aligned} v_1^1(r,u) &= uv_0^1(r,u) + rv_0^0(r,u) + \frac{r}{4}v_0^2(r,u) = \\ &= rln\left(\frac{\sqrt{u^2-r^2}+u}{2}\right) + \frac{r}{2} - u\frac{\sqrt{u^2-r^2}-u}{r}. \end{aligned} \quad (30)$$

Тепер на основі функцій $v_0^1(r,u)$ і $v_1^1(r,u)$ та рекурентної формули (23) можна побудувати довільну функцію $v_k^1(r,u)$, а за допомогою формул (19) і (20) визначити частинні похідні від цих функцій. Аналогічно можна обчислювати значення функцій $v_k^m(r,u)$ для довільних значень m і k, використовуючи виведені вище рекурентні співвідношення (23), (27) і (28). Як показують обчислення функції $v_k^m(r,u)$, а точніше їх дійсна та уявна частини або їх похідні, терплять розрив в околі точки з координатами $(r = r_0, z = 0)$. Завдяки тому, що саме такий характер поведінки мають розв'язки задач ((1) і 2), включення в число координатних функцій $v_k^m(r,u)$ дозволяє збільшити точність наближених розв'язків на 2-3 порядки.

[1] *Моисеев Н. Н., Петров А. А.* Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. — М.: ВЦ АН СССР, 1966. — 269 с.

[2] *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы расчета присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. — К.: Наук. думка, 1969. — 250 с.

[3] *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970. — 512 с.

[4] *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. — К.: Наук. думка, 1984. — 232 с.

[5] *Барняк М. Я.* Побудова розв'язків крайових задач для рівняння Лапласа в областях з кутовими точками // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — **4**, 1. — С. 71–92.

[6] *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 832 с.

[7] *Барняк М. Я.* Побудова розв'язків крайових задач для рівняння Лапласа в областях обертання з ребристою межею // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, 5. — С. 579–595.