Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 142–146

УДК 512.53

Я. В. Заціха

(Інститут математики НАН України, Київ, Україна)

zaciha@mail.ru

Про число піднапівгруп напівгруп малого порядку

We describe subsemigroups of the semigroups of order $n = 3$, indicate (up to isomorphism and duality) the number of such semigroups with given number of their subsemigroups.

Описано піднапівгрупи напівгруп порядку $n = 3$ і як наслідок вказано, з точністю до ізоморфізму та дуальності, число таких напівгруп із заданим числом їх власних піднапівгруп.

1. Вступ. Групам малих порядків присвячено багато робіт. Напівгрупи малих порядків вивчені не в такій мірі, і це пов'язано з тим, що число напівгруп конкретного порядку набагато більше, ніж груп (наприклад, число напівгрупп порядків 5, 6, 7 дорівнює відповідно 1160, 15973, 836021). Зауважимо, що під описом ми маємо на увазі опис з точністю до ізоморфізму та дуальності. Напівгрупи, що розглядаються з такою точністю, називаються різними.

Напівгрупи порядку $n < 4$ описані ще в 1955 році (див. [1]). Напівгрупи із 2-х елементів a і b вичерпуються чотирма наступними напівгрупами:

$$1)\ a^2 = b^2 = ab = ba = a; \qquad 2)\ a^2 = ab = ba = a,\ b^2 = b;$$
$$3)\ a^2 = ab = a,\ b^2 = ba = b; \quad 4)\ a^2 = b^2 = a,\ ab = ba = b.$$

Кожна із них має власну піднапівгрупу, що породжується елементом a, а для напівгруп 2) і 3) ще й елемент b породжує власну піднапівгрупу.

У цій статті ми розглядаємо подібну задачу для напівгруп третього порядку.

2. Попередні відомості. У цьому параграфі ми у вигляді таблиць Келі випишемо повний список попарно різних напівгруп 3-го порядку в такому вигляді (і в такій же послідовності), як в [2]:

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

3. Формулювання теореми. Нагадаємо, що дуальною до напівгрупи S називається напівгрупа з множенням $x \circ y = yx$. Ми розглядаємо напівгрупи з точністю до ізоморфізму та дуальності, а піднапівгрупи фіксованої напівгрупи з точністю до збігу. Піднапівгрупу будемо називати власною, якщо вона не збігається із самою напівгрупою.

У цій статті доведена наступна теорема.

Теорема 1. *Загальне число напівгруп третього порядку, що мають задане число власних піднапівгруп, визначається наступною таблицею:*

Число піднапівгруп	1	2	3	4	5	6
Число напівгруп	1	1	3	7	2	4

При доведенні теореми, зокрема, вказуються всі власні піднапівгрупи напівгруп третього порядку.

4. Доведення теореми. Випишемо для кожної із напівгруп, що вказані в параграфі 2, всі піднапівгрупи, що породжуються одним чи двома елементами. При цьому всі випадки нумеруються природним чином.

$$1)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$$

$$3)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array} \qquad 4)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$$

$$5)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array} \qquad 6)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$$

$$7)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array} \qquad 8)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$$

$$9)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array} \qquad 10)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$$

$$11)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array} \qquad 12)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$$

$$13)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array} \qquad 14)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$$

$$15)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array} \qquad 16)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$$

$$17)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array} \qquad 18)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$$

Отже, власні піднапівгрупи порядку 1 має напівгрупа 18, порядку 2 — напівгрупа 2, порядку 3 — напівгрупи 1, 15, 17, порядку 4 — напівгрупи 3 – 6, 9, 12, 16, порядку 5 — напівгрупи 7, 8, порядку 6 — напівгрупи 10, 11, 13, 14. Напівгруп з більшим числом власних піднапівгруп немає.

Легко бачити, що звідси випливає твердження теореми.

Автор висловлює щиру подяку професору В. М. Бондаренку за корисні поради.

Література

[1] *Forsythe G. E.* SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4 // Proc. Amer. Math. Soc. — 1955. — **6**. — P. 443 – 447.

[2] *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова / Серія 1. Фізико-математичні науки /. — 2013. — №14. — С. 62 – 67.