УДК 517.5

**А. С. Сердюк** (Ін-т математики НАН України, Київ)
**У. З. Грабова** (Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк)

# ОЦІНКИ РІВНОМІРНИХ НАБЛИЖЕНЬ СУМАМИ ЗИГМУНДА НА КЛАСАХ ЗГОРТОК ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

*We obtain order-exact estimates for uniform approximations by using Zygmund sums $Z_n^s$ of classes $C^{\psi}_{\beta,p}$ of $2\pi$-periodic continuous functions $f$ representable by convolutions of functions from unit balls of the space $L_p$, $1<p<\infty$, with a fixed kernels $\Psi_\beta \in L_{p'}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. In addition, we find a set of allowed values of parameters (that define the class $C^{\psi}_{\beta,p}$ and the linear method $Z_n^s$) for which Zygmund sums and Fejer sums realize the order of the best uniform approximations by trigonometric polynomials of those classes.*

*Одержано точні за порядком оцінки рівномірних наближень сумами Зигмунда $Z_n^s$ на класах $C^{\psi}_{\beta,p}$ $2\pi$-періодичних неперервних функцій $f$, які зображуються у вигляді згортки функцій, що належать одиничним кулям просторів $L_p$, $1<p<\infty$, з фіксованими твірними ядрами $\Psi_\beta \in L_{p'}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Вказано множину допустимих значень параметрів (що визначають класи $C^{\psi}_{\beta,p}$ та лінійний метод $Z_n^s$) при яких суми Зигмунда, а також суми Фейєра, забезпечують порядок найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами на вказаних класах.*

Нехай $L_p$, $1 \le p \le \infty$, — простір $2\pi$-періодичних сумовних функцій $f$ зі скінченною нормою $\|f\|_p$, де при $p \in [1,\infty)$

$$\|f\|_p = \Big( \int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}},$$

а при $p=\infty$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|;$$

$C$ — простір $2\pi$-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається рівністю $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$.

Нехай, далі, $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p < \infty$, — клас $2\pi$-періодичних функцій $f(x)$, що майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ представляються згортками

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + (\Psi_\beta * \varphi)(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t)\varphi(t)dt,\ a_0 \in \mathbb{R},\ \varphi \perp 1, \tag{1}$$

де $\|\varphi\|_p \leq 1$, а $\Psi_\beta(t)$ — сумовна на $[0, 2\pi)$ функція, ряд Фур'є якої має вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right),\ \psi(k) > 0,\ \beta \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Функцію $\varphi$ в зображенні (1), згідно з О.І. Степанцем [1, с. 132], називають $(\psi, \beta)$-похідною функції $f$ і позначають через $f_\beta^\psi$.

Якщо $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, то класи $L_{\beta,p}^\psi$ є класами Вейля-Надя і позначаються через $W_{\beta,p}^r$. При $\beta = r$, $r \in \mathbb{N}$, останні класи є відомими класами $W_p^r$.

Якщо твірне ядро $\Psi_\beta$ класу $L_{\beta,p}^\psi$, $1 \leq p \leq \infty$, задовольняє включенню $\Psi_\beta \in L_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, то $L_{\beta,p}^\psi \subset L_\infty$, а згортки виду (1) є неперервними функціями (див. твердження 3.8.1 та 3.8.2 роботи [1, с. 137, 138]). Тому клас усіх функцій $f$ виду (1), для яких $\|\varphi\|_p \leq 1$, $\Psi_\beta \in L_{p'}$ будемо позначати через $C_{\beta,p}^\psi$. Зрозуміло, що у випадку $f \in C_{\beta,p}^\psi$ рівність (1) виконується при всіх $x \in \mathbb{R}$.

Вважаючи, що послідовність $\psi(k)$, що визначає клас $C_{\beta,p}^\psi$, є слідом на множині $\mathbb{N}$ деякої неперервної функції $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geq 1$, позначимо через $\Theta_p$, $1 \leq p < \infty$, множину монотонно незростаючих функцій $\psi(t)$, для яких існує стала $\alpha > \frac{1}{p}$ така, що функція $t^\alpha\psi(t)$ майже спадає, тобто знайдеться додатна стала $K$ така, що $t_1^\alpha\psi(t_1) \leq Kt_2^\alpha\psi(t_2)$ для будь-яких $t_1 > t_2 \geq 1$. Умова $\psi \in \Theta_p$, як неважко переконатись, гарантує справедливість включення $\Psi_\beta \in L_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (див., наприклад [2, с. 657]).

Прикладами функцій $\psi$, що задовольняють умову $\psi \in \Theta_p$ є, зокрема, функції виду $\psi_1(t) = \frac{1}{t^r}$, $r > \frac{1}{p}$; $\psi_2(t) = \frac{\ln^\alpha(t+c)}{t^r}$, $r > \frac{1}{p}$, $\alpha > 0$, $c > e^{\frac{2\alpha}{r-\frac{1}{p}}} - 1$; $\psi_3(t) = \frac{1}{t^r\ln^\alpha(t+c)}$, $r > \frac{1}{p}$, $\alpha > 0$, $c > 0$; $\psi_4(t) = \frac{\ln\ln^\alpha(t+c)}{t^r}$, $r > \frac{1}{p}$, $\alpha > 0$, $c > e^{\frac{2\alpha}{r-\frac{1}{p}}} - 1$.

Сумами Зигмунда функції $f \in L_1$ називають тригонометричні поліноми виду

$$Z_n^s(f;t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^s\right) (a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin kt), s > 0, \quad (3)$$

де $a_k(f)$ і $b_k(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції $f$. Суми Зигмунда при довільному $s > 0$ були введені А. Зигмундом [3].

При $s = 1$ суми $Z_n^s$ перетворюються у відомі суми Фейєра

$$\sigma_n(f;t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) (a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin kt), \quad (4)$$

де $a_k(f)$ і $b_k(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції $f$.

При всіх $1 \le p,\ q \le \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$ таких, що $L^\psi_{\beta,p} \subset L_q$ розглянемо величини вигляду

$$\mathcal{E}_n \left(L^\psi_{\beta,p}; Z_n^s\right)_q = \sup_{f \in L^\psi_{\beta,p}} \|f(\cdot) - Z_n^s(f;\cdot)\|_q. \quad (5)$$

В роботі досліджуються порядкові оцінки величин (5) при $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \Theta_p$, $1 < p < \infty$ і $q = \infty$. Зрозуміло, що при $\psi \in \Theta_p$, $1 < p < \infty$, $q = \infty$

$$\mathcal{E}_n \left(L^\psi_{\beta,p}; Z_n^s\right)_\infty = \mathcal{E}_n \left(C^\psi_{\beta,p}; Z_n^s\right)_C = \sup_{f \in C^\psi_{\beta,p}} \|f(\cdot) - Z_n^s(f;\cdot)\|_C. \quad (6)$$

Порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n \left(W^r_\infty; Z_n^s\right)_C$ для $r \in \mathbb{N}$ знайдено в роботі А. Зигмунда [3]. Б. Надь [4] дослідив величину $\mathcal{E}_n \left(W^r_{\beta,\infty}; Z_n^s\right)_C$ при $r > 0$, $\beta \in \mathbb{Z}$, причому для $s \le r$ ним знайдено для цих величин асимптотичні рівності, а для $s > r$ — порядкові оцінки. Згодом С.А. Теляковський [5] для $r > 0$ одержав асимптотично точні рівності для величин $\mathcal{E}_n \left(W^r_{\beta,\infty}; Z_n^s\right)_C$ при $\beta \in \mathbb{R}$, $n \to \infty$.

Для сум Фейєра $\sigma_n(f;t)$ порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n \left(W^r_{\beta,p}; \sigma_n\right)_q$ при $\beta \in \mathbb{Z}$ і $p = q = \infty$ були знайдені С.М. Нікольським [6]; для величин $\mathcal{E}_n \left(W^r_p; \sigma_n\right)_q$ у випадках а)$1 < p,\ q < \infty$; б)$1 \le p < \infty,\ q = \infty$;

в)$p = 1,\ 1 < q < \infty$ — у роботах В.М. Тихомирова [7] та А.І. Камзолова [8]. Згодом результати [7 — 8] були доповнені у роботах М.В. Костича [9], [10], де знайдено порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n\left(W^r_{\beta,p}; Z^s_n\right)_q$, $\beta \in \mathbb{R}$ при $1 \le p < \infty$, $q = \infty$, $r > \frac{1}{p}$, а також при $p = 1$, $1 < q < \infty$, $r > 1 - \frac{1}{p}$.

На класах $C^{\psi}_{\beta,p}$ та $L^{\psi}_{\beta,p}$ оцінки наближень сумами Зигмунда в рівномірній та інтегральних метриках вивчались у роботах Д.М. Бушева [11], І.Б. Ковальської [12] та інших. В роботі [12] у випадку $1 < q \le p < \infty$ одержано, зокрема, точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n\left(L^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_q$ за умови монотонного спадання до нуля послідовності $\psi(k)$, а у випадку $1 < p < q < \infty$ — за умови $\frac{\psi(k)}{\psi(ck)} \le K < \infty$, $c > 1$, $K > 0$ і монотонного спадання до нуля послідовності $\psi(k)k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$. Якщо $p = q = 2$ в [12] знайдено точні рівності величин вигляду (5). Точні рівності для вказаних величин при $p = 2$ і $q = \infty$, а також при $p = 1$ і $q = 2$ за умови збіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^2(k)$ встановлено у роботах А.С. Сердюка та І.В. Соколенка [13], [14].

Асимптотично точні оцінки величин $\mathcal{E}_n\left(L^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_q$ при деяких досить природних обмеженнях на функції $\psi$ знайдено у роботах Д.М. Бушева [11] при $p = q = \infty$ та І.Б. Ковальської [12] при $p = q = 1$.

Поряд з величинами (6) в роботі розглядаються також найкращі рівномірні наближення класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ тригонометричними поліномами $t_{n-1}$ порядку $n - 1$, тобто величини вигляду

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{t_{n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C, \quad 1 < p < \infty. \tag{7}$$

Дослідженню порядкових рівностей для величин (7) присвячено роботу [16] (там же можна більш детально ознайомитись із наявною бібліографією щодо оцінок вказаних величин).

В даній роботі знайдено порядкові рівності для величин (6) при довільних $1 < p < \infty$, $q = \infty$ і $\psi \in \Theta_p$ і тим самим доповнено встановлені в [12] оцінки величин (5) на випадки $1 < p < \infty$, $q = \infty$, а також узагальнено результати роботи [9] на класи $C^{\psi}_{\beta,p}$, $\psi \in \Theta_p$, $\beta \in \mathbb{R}$. Крім того, в роботі встановлено множину допустимих значень параметрів (що визначають класи $C^{\psi}_{\beta,p}$, та лінійний метод $Z^s_n$) при яких суми Зигмунда, а також суми Фейєра, забезпечують порядок найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами на вказаних класах, тобто

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_C \asymp E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C.$$

Перейдемо до точних формулювань.

Будемо казати, що додатна функція $g(t)$, задана на $[1,\infty)$, належить до множини $A^+$ ( і записувати $g \in A^+$), якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що $g(t)t^{-\varepsilon}$ зростає на $[1,\infty)$. Аналогічно, якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що $g(t)t^{\varepsilon}$ спадає на $[1,\infty)$, то будемо казати, що $g$ належить до множини $A^-$ і записувати $g \in A^-$.

Через $\mathcal{Z}$ позначимо множину неперервних слабо коливних (в сенсі Зигмунда) функцій, тобто додатних функцій $g(t)$, визначених на $[1,\infty)$, таких, що при довільному $\delta > 0$ функція $g(t)t^{\delta}$ зростає, а $g(t)t^{-\delta}$ спадає, для достатньо великих $t$. При фіксованому $\rho > 1$ через $\mathcal{Z}^+_{\rho}$ позначимо підмножину монотонно зростаючих функцій $g \in \mathcal{Z}$, що задовольняють умову

$$g^{\rho}(n)\ln n = O\Big(\int\limits_1^n \frac{g^{\rho}(t)}{t}dt\Big),\ n \in \mathbb{N},$$

а через $\mathcal{Z}^-_{\rho}$ — підмножину монотонно спадних функцій $g \in \mathcal{Z}$, що задовольняють умову

$$\int\limits_1^n \frac{g^{\rho}(t)}{t}dt = O\big(g^{\rho}(n)\ln n\big),\ n \in \mathbb{N}.$$

Під записом $A(n) = O(B(n))$ розуміємо, що існує стала $K > 0$, така, що виконується нерівність $A(n) \leq K(B(n))$, де $n \in \mathbb{N}$. Запис $A(n) \asymp B(n)$ означає, що $A(n) = O(B(n))$ і одночасно $B(n) = O(A(n))$.

**Теорема 1.** *Нехай $1 < p < \infty$, $s > 0$ і $g_{s,p}(t) := \psi(t)t^{s+\frac{1}{p}}$. Тоді*

*1. Якщо $\psi \in \Theta_p$ і $g_{s,p} \in A^+$, то для довільних $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_C = O\big(\psi(n) n^{\frac{1}{p}}\big). \tag{8}$$

*2. Якщо $g_{s,p} \in \mathcal{Z}$, то для довільних $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_C = O\left(\frac{1}{n^s}\left(\int\limits_1^n \frac{\big(\psi(t) t^{s+\frac{1}{p}}\big)^{p'}}{t} dt\right)^{\frac{1}{p'}}\right), \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{9}$$

*3. Якщо $g_{s,p} \in A^-$, то для довільних $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_C = O\Big(\frac{1}{n^s}\Big). \tag{10}$$

***Доведення.*** Оскільки оператор

$$Z^s_n : f(t) \to Z^s_n(f,t)$$

є лінійним поліноміальним оператором, інваріантним відносно зсувів

$$Z^s_n(f_h, t) = Z^s_n(f, t+h), \ f_h(t) = f(t+h), \ h \in \mathbb{R},$$

і норма в $C$, та класи $C^{\psi}_{\beta,p}$ також інваріантні відносно зсувів, тобто

$$\|f_h(t)\|_C = \|f(t)\|_C; \ f(t) \in C^{\psi}_{\beta,p} \Rightarrow f_h(t) \in C^{\psi}_{\beta,p},$$

то

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_C = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,p}} |f(0) - Z^s_n(f;0)|.$$

В силу формул (1) і (3) для довільної $f \in C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $s > 0$

$$f(0) - Z^s_n(f;0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{n^s}\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)k^s \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \Psi_{-\beta,n}(t)\right)\varphi(t)dt, \tag{11}$$

де $\Psi_{-\beta,n}(t) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)$, $\quad \|\varphi\|_p \le 1$, $n \in \mathbb{N}$.

З нерівності Гельдера та нерівності трикутника випливає, що при $1 \le p < \infty$

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_C \le \frac{1}{\pi}\left\|\frac{1}{n^s}\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)k^s\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)+\Psi_{-\beta,n}(t)\right\|_{p'} \le$$

$$\le \frac{1}{\pi n^s}\left\|\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)k^s\cos\!\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right\|_{p'}+\frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{-\beta,n}(t)\big\|_{p'},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1. \quad (12)$$

Знайдемо оцінку зверху величини $\|\Psi_{-\beta,n}(\cdot)\|_{p'}$. Для цього, застосувавши до функції $\Psi_{-\beta,n}(t)$ перетворення Абеля, одержимо

$$\Psi_{-\beta,n}(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\big(\psi(k)-\psi(k+1)\big)D_{k,\beta}(t)-\psi(n)D_{n-1,\beta}(t), \qquad (13)$$

де

$$D_{k,\beta}(t)=\frac{1}{2}\cos\frac{\beta\pi}{2}+\sum_{\nu=1}^{k}\cos\left(\nu t+\frac{\beta\pi}{2}\right)=$$

$$=\cos\frac{\beta\pi}{2}\left(\frac{\sin\frac{2k+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\right)-\sin\frac{\beta\pi}{2}\left(\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\frac{2k+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\right).$$

Відомо (див., наприклад, [15, с. 89]), що

$$|D_{k,\beta}(t)|=O(k),\quad |D_{k,\beta}(t)|=O\Big(\frac{1}{|t|}\Big),\ 0<|t|\le\pi. \qquad (14)$$

Тому

$$\big\|D_{k,\beta}(t)\big\|^{p'}_{p'}=\int_{-\pi}^{\pi}|D_{k,\beta}(t)|^{p'}dt=O\left(\int\limits_{0\le|t|\le\frac{1}{k}}k^{p'}dt+\int\limits_{\frac{1}{k}\le|t|\le\pi}\frac{dt}{|t|^{p'}}\right)=O(k^{p'-1}).$$

З останньої рівності маємо при $1\le p<\infty$, $k\in\mathbb{N}$ і $\beta\in\mathbb{R}$

$$\|D_{k,\beta}(t)\|_{p'}=O(k^{1-\frac{1}{p'}})=O(k^{\frac{1}{p}}). \qquad (15)$$

З (13) та (15) одержуємо

$$\|\Psi_{-\beta,n}(\cdot)\|_{p'}=O\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\big(\psi(k)-\psi(k+1)\big)k^{\frac{1}{p}}\big)+\psi(n)n^{\frac{1}{p}}\Big), 1\le p<\infty. \quad (16)$$

Далі, для оцінки суми $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\big(\psi(k)-\psi(k+1)\big)k^{\frac{1}{p}}$ буде корисним наступне твердження роботи [16].

**Лема 1.** *Нехай $r\in(0,1]$, а $\psi(k)>0$, монотонно незростає і для неї знайдеться $\varepsilon>0$ таке, що послідовність $k^{r+\varepsilon}\psi(k)$ майже спадає. Тоді існує стала $K$, залежна від $\psi$ і $r$ така, що для довільних $n\in\mathbb{N}$*

$$\psi(n)n^r\le\sum_{k=n}^{\infty}\big(\psi(k)-\psi(k+1)\big)k^r\le K\psi(n)n^r. \quad (17)$$

Оскільки $\psi\in\Theta_p$, то, застосовуючи лему 1 при $r=\frac{1}{p}$, із (16) отримуємо оцінку

$$\|\Psi_{-\beta,n}(\cdot)\|_{p'}=O(\psi(n)n^{\frac{1}{p}}),\ 1\le p<\infty. \quad (18)$$

Перейдемо до оцінки величини

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)k^s\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\Big\|_{p'}. \quad (19)$$

Застосувавши до функції $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\psi(k)k^s\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)$ перетворення Абеля, одержуємо

$$\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)k^s\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n-2}\Big(\psi(k)k^s-\psi(k+1)(k+1)^s\Big)D_{k,\beta}(t)+$$

$$+\psi(n-1)(n-1)^sD_{n-1,\beta}(t)-\frac{1}{2}\cos\frac{\beta\pi}{2}.$$

Тоді, враховуючи (15), маємо

$$\left\|\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)k^s\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right\|_{p'}=O(1)+$$

$$+O\left(\sum_{k=1}^{n-2}\left|\psi(k)k^s-\psi(k+1)(k+1)^s\right|k^{\frac{1}{p}}\right)+O\Big(\psi(n-1)(n-1)^{s+\frac{1}{p}}\Big). \quad (20)$$

Покажемо, що якщо $g_{s,p}\in A^+$, то

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)k^s\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\Big\|_{p'}=O\big(\psi(n)n^{s+\frac{1}{p}}\big),\ 1\le p<\infty. \quad (21)$$

З нерівності трикутника випливає

$$\sum_{k=1}^{n-2}\left|\psi(k)k^s-\psi(k+1)(k+1)^s\right|k^{\frac{1}{p}}\le\sum_{k=1}^{n-2}\left|\psi(k)k^{s+\frac{1}{p}}-\psi(k+1)(k+1)^{s+\frac{1}{p}}\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-2}\left|\psi(k+1)(k+1)^{s+\frac{1}{p}}-\psi(k+1)(k+1)^s k^{\frac{1}{p}}\right|. \quad (22)$$

Далі, використовуючи монотонне зростання функції $g_{s,p}$ з множини $A^+$, отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n-2}\left|\psi(k)k^s-\psi(k+1)(k+1)^s\right|k^{\frac{1}{p}}<\sum_{k=1}^{n-2}\big(\psi(k+1)(k+1)^{s+\frac{1}{p}}-\psi(k)k^{s+\frac{1}{p}}\big)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-2}\psi(k+1)(k+1)^s\big((k+1)^{\frac{1}{p}}-k^{\frac{1}{p}}\big)<\psi(n-1)(n-1)^{s+\frac{1}{p}}+$$

$$+\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n-2}\psi(k+1)(k+1)^s k^{\frac{1}{p}-1}=$$

$$=O\left(\psi(n)n^{s+\frac{1}{p}}+\sum_{k=1}^{n-2}\psi(k+1)(k+1)^{s+\frac{1}{p}-1}\big(1+\frac{1}{k}\big)^{\frac{1}{p'}}\right)=$$

$$=O\left(\psi(n)n^{s+\frac{1}{p}}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{\psi(k)k^{s+\frac{1}{p}}}{k}\right)=$$

$$=O\left(\psi(n)n^{s+\frac{1}{p}}+\int_1^{n-1}\frac{\psi(t)t^{s+\frac{1}{p}}}{t}dt\right)=O\big(\psi(n)n^{s+\frac{1}{p}}\big). \quad (23)$$

Об'єднавши (20) і (23), одержуємо (21). Із (12), (18) і (21) при $\psi \in \Theta_p$ і $g_{s,p} \in A^+$ випливає (8).

Далі покажемо, що при виконанні умови $g_{s,p} \in A^-$ для величини (19) виконується оцінка

$$\left\| \sum_{k=1}^{n-1} \psi(k) k^s \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_{p'} = O(1), \ 1 \le p < \infty. \tag{24}$$

В силу (22) і монотоного спадання функції $g_{s,p} \in A^-$ отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n-2} \Big| \psi(k)k^s - \psi(k+1)(k+1)^s \Big| k^{\frac{1}{p}} < \psi(1) + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n-2} \psi(k+1)(k+1)^s k^{\frac{1}{p}-1} =$$

$$= O\left(1 + \sum_{k=1}^{n-2} \psi(k+1)(k+1)^{s+\frac{1}{p}-1} \big(1 + \frac{1}{k}\big)^{\frac{1}{p'}} \right) =$$

$$= O\left(1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\psi(k)k^{s+\frac{1}{p}}}{k} \right) = O\left(1 + \int_1^{n-1} \frac{\psi(t)t^{s+\frac{1}{p}}}{t} dt \right) = O(1). \tag{25}$$

З (20) та (25) одержуємо (24). Очевидно, що умова $g_{s,p} \in A^-$ забезпечує включення $\psi \in \Theta_p$. Об'єднавши (12), (18) і (24) за умови $g_{s,p} \in A^-$, отримуємо оцінку (10).

Для оцінки величини (19) у випадку, коли $g_{s,p} \in \mathcal{Z}$, нам буде корисним наступне твердження.

**Лема 2.** *Нехай* $0 < r < 1$ *і* $g_{s,p} \in \mathcal{Z}$. *Тоді для довільних* $x \in (0, \pi]$ *і* $N \in \mathbb{N}$ *мають місце нерівності*

$$\left| \sum_{k=1}^{N} \frac{g(k)}{k^r} \sin kx \right| \le C_{g,r}\, g\Big(\frac{1}{x}\Big) x^{r-1}, \tag{26}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{N} \frac{g(k)}{k^r} \cos kx \right| \le \widetilde{C}_{g,r}\, g\Big(\frac{1}{x}\Big) x^{r-1}, \tag{27}$$

*в яких* $C_{g,r}$, $\widetilde{C}_{g,r}$ *— додатні величини, що залежать лише від* $g$ *та* $r$.

***Доведення.*** Покажемо справедливість лише нерівності (26), оскільки (27) доводиться аналогічно.

Представимо функцію $S^{(N)}_{g,r}(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{g(k)}{k^r} \sin kx$ у вигляді

$$S^{(N)}_{g,r}(x) = S_{g,r}(x) - \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{g(k)}{k^r} \sin kx, \tag{28}$$

де $S_{g,r}(x)$ — сума ряду

$$S_{g,r}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g(k)}{k^r} \sin kx. \tag{29}$$

Функція $S_{g,r}$ є неперервною на $(0,\pi]$, а її частинні суми $S^{(N)}_{g,r}$ рівномірно збігаються до $S_{g,r}$ на будь-якому сегменті $[\varepsilon,\pi]$, де $0<\varepsilon<\pi$ (див., наприклад, [15, с. 6]). Крім того, згідно з теоремою (5.2.6) роботи [15, с. 300], при $x \to +0$ має місце асимптотична рівність

$$S_{g,r}(x) = g\Big(\frac{1}{x}\Big) x^{r-1}\Big(\Gamma(1-r)\cos\frac{\pi r}{2} + o(1)\Big),\ 0<r<1, \tag{30}$$

в якій $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера. З (30) випливає, що

$$|S_{g,r}(x)| \le C^{(1)}_{g,r} g\Big(\frac{1}{x}\Big) x^{r-1},\ 0<x\le\pi, \tag{31}$$

$C^{(1)}_{g,r}$ — залежить лише від $g$ та $r$.

Через $\Theta^{(1)}_{g,r}$, $r \in (0,1)$, позначимо значення аргументу функції $g(t)t^{-\frac{r}{2}}$ таке, що при $t \in [\Theta^{(1)}_{g,r}, \infty)$ функція $g(t)t^{-\frac{r}{2}}$ монотонно спадає, а через $\Theta^{(2)}_{g,r}$ — значення аргументу функції $g(t)t^{\frac{1-r}{2}}$ таке, що для довільного $\tau \ge \Theta^{(2)}_{g,r}$

$$\max_{t\in[1,\tau]} g(t)t^{\frac{1-r}{2}} = g(\tau)\tau^{\frac{1-r}{2}},$$

(оскільки $g \in \mathcal{Z}$, то $\Theta^{(i)}_{g,r}$, $i=1,2$, існують для довільного $r\in(0,1)$). Покладемо $M = M(g,r) = \max\big\{1, \pi\Theta^{(1)}_{g,r}, \pi\Theta^{(2)}_{g,r}\big\}$. Тоді для довільного $x \in (0,\pi]$

$$\max_{t\in[\frac{M}{x},\infty]} g(t)t^{-\frac{r}{2}} = g\Big(\frac{M}{x}\Big)\Big(\frac{x}{M}\Big)^{\frac{r}{2}}, \tag{32}$$

$$\max_{t\in[1,\frac{M}{x}]} g(t)t^{\frac{1-r}{2}} = g\Big(\frac{M}{x}\Big)\Big(\frac{M}{x}\Big)^{\frac{1-r}{2}}. \tag{33}$$

Доведемо справедливість нерівності (26) при $N > \frac{M}{x}$. Застосовуючи перетворення Абеля і враховуючи (32), а також нерівність (5.2.27) роботи [15, с. 306], згідно з якою

$$\sum_{\nu=1}^{N} \nu^{-\gamma}\sin\nu x \le C_r x^{\gamma-1},\ N\in\mathbb{N},\ \gamma\in(0,1),$$

$C_r$ — залежить лише від $r$, одержимо

$$\Big|\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{g(k)\sin kx}{k^r}\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{k=N+1}^{\infty}\bigg(\frac{g(k)}{k^{\frac{r}{2}}} - \frac{g(k+1)}{(k+1)^{\frac{r}{2}}}\bigg)\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\sin\nu x}{\nu^{\frac{r}{2}}} - \frac{g(N+1)}{(N+1)^{\frac{r}{2}}}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\sin\nu x}{\nu^{\frac{r}{2}}}\Big| \le$$

$$\le 2\frac{g(N+1)}{(N+1)^{\frac{r}{2}}}\sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\sin\nu x}{\nu^{\frac{r}{2}}}\Big| \le 2C_r\max_{N\in\mathbb{N}}\frac{g(N+1)}{(N+1)^{\frac{r}{2}}}x^{\frac{r}{2}-1} \le$$

$$\le 2C_r g\Big(\frac{M}{x}\Big)\Big(\frac{x}{M}\Big)^{\frac{r}{2}}x^{\frac{r}{2}-1} = C^{(2)}_{g,r}g\Big(\frac{M}{x}\Big)x^{r-1},\ r\in(0,1]. \tag{34}$$

Оскільки $g\in\mathcal{Z}$, то (див., наприклад, [15, с. 299])

$$g(Mt) = g(t) + o\big(g(t)\big),\ t\ge 1,\ M>0,$$

а, отже,

$$\widetilde{C}_{M,g} \le g(Mt) \le C_{M,g}g(t),\ t\ge 1,\ M>0, \tag{35}$$

де $\widetilde{C}_{M,g}$, $C_{M,g}$ — залежать лише від $g$ та $M$.

В силу (34) та (35) одержуємо

$$\Big|\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{g(k)\sin kx}{k^r}\Big| \le C^{(3)}_{g,r}g\Big(\frac{1}{x}\Big)x^{r-1}. \tag{36}$$

Із (28), (31) та (36) випливає, що при $N > \frac{M}{x}$

$$\left|S_{g,r}^{(N)}(x)\right| \le \left|S_{g,r}(x)\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{g(k)}{k^r} \sin kx\right| \le$$

$$\le C_{g,r}^{(1)} g\Big(\frac{1}{x}\Big) x^{r-1} + C_{g,r}^{(3)} g\Big(\frac{1}{x}\Big) x^{r-1} = C_{g,r}^{(4)} g\Big(\frac{1}{x}\Big) x^{r-1}. \qquad (37)$$

Переконаємось у справедливості нерівності (26) при $N \le \frac{M}{x}$. Очевидно, що

$$\left|S_{g,r}^{(N)}(x)\right| \le \sum_{k=1}^{N} \frac{g(k)}{k^r} = \sum_{k=1}^{N} \frac{g(k) k^{\frac{1-r}{2}}}{k^{\frac{1+r}{2}}}. \qquad (38)$$

Оскільки при $N \le \frac{M}{x}$ для $k = \overline{1, N}$ виконується (33), то з урахуванням (35) і (38)

$$\left|S_{g,r}^{(N)}(x)\right| \le g\Big(\frac{M}{x}\Big) \Big(\frac{M}{x}\Big)^{\frac{1-r}{2}} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{\frac{1+r}{2}}} <$$

$$< C_r^{(1)} g\Big(\frac{M}{x}\Big) \Big(\frac{M}{x}\Big)^{1-r} = C_{g,r}^{(5)} g\Big(\frac{1}{x}\Big) x^{r-1}. \qquad (39)$$

Поєднуючи (37) та (39), одержимо нерівність (26). Лему 2 доведено.

За виконання умови $g_{s,p} \in \mathcal{Z}$, має місце оцінка

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{g_{s,p}(k)}{k^r} = O\Big(N^{1-r} g_{s,p}(N)\Big), \ r \in [0,1), \ x \in \mathbb{R}, \qquad (40)$$

яка випливає з асимптотичної рівності (див., 15, с. 299])

$$\sum_{k=1}^{N} g_{s,p}(k) k^{\alpha} \sim \frac{N^{1+\alpha}}{1+\alpha} g_{s,p}(N), \ \alpha > -1, \qquad (41)$$

при $\alpha = -r$ (запис $A(n) \sim B(n)$ означає виконання граничного співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A(n)}{B(n)} = 1$).

Покажемо, що при $1 < p < \infty$ і $g_{s,p} \in \mathcal{Z}$, має місце оцінка

$$\left\| \sum_{k=1}^{n-1} \psi(k) k^s \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_{p'} = O\left( \int_1^n \frac{(\psi(\tau)\tau^{s+\frac{1}{p}})^{p'}}{\tau} d\tau \right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{42}$$

Враховуючи нерівності (26), (27) та (40), при $1 < p < \infty$ одержимо

$$\left\| \sum_{k=1}^{n-1} \psi(k) k^s \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_{p'} =$$

$$= O\left( \left( \int_{0 \le \tau \le \frac{1}{n}} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\psi(k) k^{s+\frac{1}{p}}}{k^{\frac{1}{p}}} \right)^{p'} d\tau + \int_{\frac{1}{n} \le \tau \le \pi} \left( \frac{\psi\left(\frac{1}{\tau}\right) \tau^{\frac{1}{p}-1}}{\tau^{s+\frac{1}{p}}} \right)^{p'} d\tau \right)^{\frac{1}{p'}} \right) =$$

$$= O\left( \left( \left(\psi(n) n^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'} \left(n^{1-\frac{1}{p}}\right)^{p'} n^{-1} + \int_{\frac{1}{\pi} \le \tau \le n} \left( \frac{\psi(\tau)\tau^{s+\frac{1}{p}}}{\tau^{\frac{1}{p}-1}} \right)^{p'} \frac{d\tau}{\tau^2} \right)^{\frac{1}{p'}} \right) =$$

$$= O\left( \left(\psi(n) n^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'} + \int_{\frac{1}{\pi} \le \tau \le n} \left( \frac{\psi(\tau)\tau^{s+\frac{1}{p}}}{\tau^{-\frac{1}{p'}}} \cdot \frac{1}{\tau^{\frac{2}{p'}}} \right)^{p'} d\tau \right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= O\left( \left(\psi(n) n^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'} + \int_1^n \frac{(\psi(\tau)\tau^{s+\frac{1}{p}})^{p'}}{\tau} d\tau \right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= O\left( g_{s,p}^{p'}(n) + \int_1^n \frac{g_{s,p}^{p'}(\tau)}{\tau} d\tau \right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{43}$$

Зауважимо, що якщо $g_{s,p} \in \mathcal{Z}$, то $g_{s,p}^{p'} \in \mathcal{Z}$. Оскільки $g_{s,p}^{p'} \in \mathcal{Z}$, то має місце оцінка (див., наприклад, [15, с. 302])

$$g_{s,p}^{p'}(n) = O\Big( \int_1^n \frac{g_{s,p}^{p'}(t)}{t} dt \Big), \ n \in \mathbb{N}. \tag{44}$$

Із (43) і (44) випливає (42).

Неважко переконатись, що умова $g_{s,p} \in \mathcal{Z}$ при $s > 0$ і $1 < p < \infty$ забезпечує включення $\psi \in \Theta_p$. Тому з (12), (18) та (42) при $1 < p < \infty$ і $g_{s,p} \in \mathcal{Z}$ отримуємо (9). Теорему 1 доведено.

**Теорема 2.** *Нехай* $1 < p < \infty$, $s > 0$, $g_{s,p}(t) := \psi(t)t^{s+\frac{1}{p}}$. *Тоді*

*1. Якщо* $\psi \in \Theta_p$ *і* $g_{s,p} \in A^+$, *то для довільних* $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_C \asymp E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \psi(n)n^{\frac{1}{p}}. \qquad (45)$$

*2. Якщо* $g_{s,p} \in \mathcal{Z}^+_{p'}$ *або* $g_{s,p} \in \mathcal{Z}^-_{p'}$ *і* $\int\limits_1^n \frac{g^{p'}_{s,p}(t)}{t}dt \neq O(1)$, *то для довільних* $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_C \asymp \frac{1}{n^s}\left(\int\limits_1^n \frac{\left(\psi(t)t^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'}}{t}dt\right)^{\frac{1}{p'}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \qquad (46)$$

*3. Якщо* $g_{s,p} \in A^-$ *або* $g_{s,p} \in \mathcal{Z}^-_{p'}$ *і* $\int\limits_1^n \frac{g^{p'}_{s,p}(t)}{t}dt = O(1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *то для довільних* $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_C \asymp \frac{1}{n^s}. \qquad (47)$$

***Доведення.*** Оцінки зверху у (45) – (47) випливають із співвідношень (8) – (10) теореми 1. Встановимо необхідні оцінки знизу величин $\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_C$.

Позначимо через $B$ множину монотонно незростаючих додатних функцій $\psi(t)$, заданих на $[1, \infty)$, для кожної з яких існує стала $K > 0$, така, що

$$\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \leq K, \ t \geq 1. \qquad (48)$$

У роботі [16, с. 4] при $1 < p < \infty$ і $\psi \in B \cap \Theta_p$ встановлено оцінку знизу для $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$:

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \geq K_{\psi,p}\psi(n)n^{\frac{1}{p}}, \ n \in \mathbb{N}, \ \beta \in \mathbb{R}, \qquad (49)$$

де $K_{\psi,p}$ — додатні величини, що можуть залежати лише від $\psi$ та $p$. Оскільки

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \le \mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_C, \ n \in \mathbb{N}, \tag{50}$$

то з нерівностей (49), (50) та оцінки (8) випливає порядкова рівність (45), якщо буде доведена імплікація

$$g_{s,p} \in A^+ \Rightarrow \psi \in B, \ s > 0, \ 1 < p < \infty. \tag{51}$$

Якшо $g_{s,p} \in A^+$, то існує $\varepsilon > 0$ і монотонно неспадна на $[1,\infty)$ функція $\varphi$ така, що $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{t^{s+\frac{1}{p}-\varepsilon}}$, звідки

$$\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} = \frac{\varphi(t)}{\varphi(2t)} 2^{s+\frac{1}{p}-\varepsilon} \le 2^{s+\frac{1}{p}-\varepsilon} = K,$$

і, отже, $\psi \in B$.

Втім, оцінку знизу величини $\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_C$ при $1 < p < \infty$, $\psi \in \Theta_p$ та $g_{s,p} \in A^+$ можна одержати також, якщо розглянути функцію $f_1(t) = (\Psi_\beta * \varphi_1)(t)$, де

$$\varphi_1(t) = \frac{a_1}{n^{\frac{1}{p'}}} \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

$a_1$ — додатний параметр, значення якого буде вказано пізніше. В силу (15) маємо

$$\|\varphi_1\|_p = \frac{a_1}{n^{\frac{1}{p'}}} \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_p \le \frac{a_1 K_1 n^{\frac{1}{p'}}}{n^{\frac{1}{p'}}} = a_1 K_1, 1 < p < \infty. \tag{52}$$

При $a_1 = (K_1)^{-1}$ з (52) одержимо нерівність $\|\varphi_1\|_p \le 1$, а, отже, включення $f_1 \in C^{\psi}_{\beta,p}$.

Як випливає з формули (1.9) з монографії [15, с. 65], для $f_1$ має місце рівність

$$f_1(t) = \frac{a_1}{n^{\frac{1}{p'}}} \sum_{k=1}^{n-1} \psi(k) \cos kt.$$

Тоді для функції $f_1(t)$ справедлива оцінка

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p};Z^s_n\right)_C \geq \left|f_1(0)-Z^s_n(f_1,0)\right| = \frac{a_1}{n^{s+\frac{1}{p'}}}\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)k^s \geq$$

$$\geq \frac{a_2\psi(n)}{n^{s+\frac{1}{p'}}}\sum_{k=1}^{n-1}k^s \geq K_2\psi(n)n^{\frac{1}{p}}. \qquad (53)$$

Доведемо оцінку знизу величини $\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p};Z^s_n\right)_C$ при $1<p<\infty$ і $g_{s,p}\in\mathcal{Z}^+_{p'}$. Для цього розглянемо функцію

$$\varphi_2(\tau)=\frac{a_2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{\left(\psi(k)k^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'}}{k}\right)^{\frac{1}{p}}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left(\psi(k)k^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'-1}}{k^{\frac{1}{p'}}}\cos\left(k\tau+\frac{\beta\pi}{2}\right), a_2>0. \quad (54)$$

Покладемо

$$f_2(\tau)=(\Psi_\beta*\varphi_2)(\tau)=$$

$$=\frac{a_2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{\left(\psi(k)k^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'}}{k}\right)^{\frac{1}{p}}}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\psi^{p'}(k)(k^{s+\frac{1}{p}})^{p'-1}}{k^{\frac{1}{p'}}}\cos k\tau\right),$$

і покажемо, що при відповідному підборі параметра $a_2$ виконуватиметься включення $f_2\in C^{\psi}_{\beta,p}$.

Застосувавши перетворення Абеля до суми

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left(\psi(k)k^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'-1}}{k^{\frac{1}{p'}}}\cos\left(k\tau+\frac{\beta\pi}{2}\right),$$

одержимо

$$\left\|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left(\psi(k)k^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'-1}}{k^{\frac{1}{p'}}}\cos\left(k\tau+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right\|_p=$$

$$=\left\|\sum_{k=1}^{n-2}\left(\left(\psi(k)k^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'-1}-\left(\psi(k+1)(k+1)^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'-1}\right)\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\cos\left(\nu\tau+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\nu^{\frac{1}{p'}}}+\right.$$

$$+\left(\psi(n-1)(n-1)^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'-1}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\cos\left(\nu\tau+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\nu^{\frac{1}{p'}}}\Bigg\|_p\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n-2}\left|\left(\psi(k)k^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'-1}-\left(\psi(k+1)(k+1)^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'-1}\right|\Bigg\|\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\cos\left(\nu\tau+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\nu^{\frac{1}{p'}}}\Bigg\|_p+$$

$$+\left(\psi(n-1)(n-1)^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'-1}\Bigg\|\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\cos\left(\nu\tau+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\nu^{\frac{1}{p'}}}\Bigg\|_p. \qquad (55)$$

Оскільки (див., наприклад, [15, с. 306])

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos k\tau}{k^{\frac{1}{p}}}\right|=\begin{cases}O\left(n^{1-\frac{1}{p}}\right), & p>1,\ \tau\in\mathbb{R},\\ O\left(|\tau|^{\frac{1}{p}-1}\right), & 0<|\tau|\leq\pi,\ p>1,\end{cases}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k\tau}{k^{\frac{1}{p}}}\right|=\begin{cases}O\left(n^{1-\frac{1}{p}}\right), & p>1,\ \tau\in\mathbb{R},\\ O\left(|\tau|^{\frac{1}{p}-1}\right), & 0<|\tau|\leq\pi,\ p>1,\end{cases}$$

то при $1<p<\infty$, $n\in\mathbb{N}$ і $\beta\in\mathbb{R}$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{k^{\frac{1}{p'}}}\right\|_p\leq\widetilde{K}_p^{(1)}\ln^{\frac{1}{p}}n, \qquad (56)$$

де $\widetilde{K}_p^{(1)}$ — стала, що залежать лише від $p$. З урахуванням оцінок (54) — (56) будемо мати

$$\|\varphi_2(\tau)\|_p\leq\frac{a_2\widetilde{K}_p^{(1)}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{\left(\psi(k)k^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'}}{k}\right)^{\frac{1}{p}}}\times$$

$$\times\Big(\sum_{k=1}^{n-2}|(\psi(k)k^{s+\frac{1}{p}})^{p'-1}-(\psi(k+1)(k+1)^{s+\frac{1}{p}})^{p'-1}|\ln^{\frac{1}{p}}k+$$

$$+(\psi(n-1)(n-1)^{s+\frac{1}{p}})^{p'-1}\ln^{\frac{1}{p}}(n-1)\Big). \qquad (57)$$

В силу монотонного неспадання функції $g_{s,p}$ із множини $\mathcal{Z}_{p'}^{+}$, одержимо

$$\sum_{k=1}^{n-2}\left|\left(\psi(k)k^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'-1}-\left(\psi(k+1)(k+1)^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'-1}\right|\ln^{\frac{1}{p}}k\leq$$

$$\leq\left(\psi(n)n^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'-1}\ln^{\frac{1}{p}}n. \qquad (58)$$

Із (57) і (58) випливає, що за умови $g_{s,p}\in\mathcal{Z}_{p'}^{+}$

$$\|\varphi_2(\tau)\|_p\leq\frac{a_2\widetilde{K}_p^{(1)}g_{s,p}^{p'-1}(n)\ln^{\frac{1}{p}}n}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{g^{p'}(k)}{k}\right)^{\frac{1}{p}}}\leq$$

$$\leq\left(\frac{a_2^p\widetilde{K}_p^{(2)}g^{p'}(n)\ln n}{\int\limits_1^n\frac{g^{p'}(t)}{t}dt}\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(a_2^p\widetilde{K}_p^{(3)}\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (59)$$

Вибравши параметр $a_2=(\widetilde{K}_p^{(3)})^{-\frac{1}{p}}$, одержимо нерівність $\|\varphi_2\|_p\leq 1$, а разом із нею включення $f_2\in C_{\beta,p}^{\psi}$. Для функції $f_2$ має місце оцінка

$$\mathcal{E}_n\left(C_{\beta,p}^{\psi};Z_n^s\right)_C\geq|f_2(0)-Z_n^s(f_2;0)|=$$

$$=\frac{a_2}{n^s\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{\left(\psi(k)k^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'}}{k}\right)^{\frac{1}{p}}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left(\psi(k)k^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'}}{k}=$$

$$=\frac{a_2}{n^s}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left(\psi(k)k^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'}}{k}\right)^{\frac{1}{p'}}\geq\frac{\widetilde{K}_p^{(4)}}{n^s}\left(\int\limits_1^n\frac{\left(\psi(\tau)\tau^{s+\frac{1}{p}}\right)^{p'}}{\tau}d\tau\right)^{\frac{1}{p'}}. \qquad (60)$$

В силу (9) і (60) порядкова оцінка (46) доведена за умови $g_{s,p}\in\mathcal{Z}_{p'}^{+}$.

Покажемо, що ця ж оцінка має місце і у випадку $g_{s,p} \in \mathcal{Z}^-_{p'}$ і $\int\limits_1^n \frac{g^{p'}_{s,p}(t)}{t}dt \neq O(1)$. Розглянемо функцію

$$\varphi_3(t) = \frac{a_3}{\ln^{\frac{1}{p}} n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{k^{\frac{1}{p'}}}, \; a_3 > 0,$$

і покладемо

$$f_3(t) = (\varphi_3 * \Psi_\beta)(t) = \frac{a_3}{\ln^{\frac{1}{p}} n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\psi(k)}{k^{\frac{1}{p'}}} \cos kt.$$

Покажемо, що параметр $a_3$ можна підібрати так, щоб $f_3 \in C^\psi_{\beta,p}$. Дійсно, в силу (56) при $1 < p < \infty$

$$\|\varphi_3\|_p = \frac{a_3}{\ln^{\frac{1}{p}} n} \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{k^{\frac{1}{p'}}} \right\|_p \leq \frac{a_3 \widetilde{K}^{(1)}_p \ln^{\frac{1}{p}} n}{\ln^{\frac{1}{p}} n} = a_3 \widetilde{K}^{(1)}_p,$$

і тому при $a_3 = (\widetilde{K}^{(1)}_p)^{-1}$, одержимо нерівність $\|\varphi_3\|_p \leq 1$, а разом з нею і включення $f_3 \in C^\psi_{\beta,p}$.

Для $f_3$ за умови $g_{s,p} \in \mathcal{Z}^-_{p'}$ має місце оцінка

$$\mathcal{E}_n\left(C^\psi_{\beta,p}; Z^s_n\right)_C \geq |f_3(0) - Z^s_n(f_3;0)| = \frac{a_3}{n^s \ln^{\frac{1}{p}} n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\psi(k) k^{s+\frac{1}{p}}}{k} =$$

$$= \frac{a_3}{n^s \ln^{\frac{1}{p}} n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g_{s,p}(k)}{k} \geq \frac{a_3 g_{s,p}(n)}{n^s \ln^{\frac{1}{p}} n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{\widetilde{K}^{(5)}_p g_{s,p}(n) \ln^{\frac{1}{p'}} n}{n^s} =$$

$$= \frac{\widetilde{K}^{(5)}_p \left(g^{p'}_{s,p}(n) \ln n\right)^{\frac{1}{p'}}}{n^s} \geq \frac{\widetilde{K}^{(6)}_p}{n^s} \int\limits_1^n \left(\frac{g^{p'}_{s,p}(t)}{t} dt\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{61}$$

Із (9) та (61) одержуємо порядкову рівність (46) при $1 < p < \infty$ та $g_{s,p} \in \mathcal{Z}^-_{p'}$ і $\int\limits_1^n \frac{g^{p'}_{s,p}(t)}{t}dt \neq O(1)$.

Як випливає з теореми (2.2.1) роботи [1, с. 92], метод $Z_n^s$ насичений з порядком насичення $n^{-s}$, а це означає, що величина $\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_C$ не може спадати до нуля швидше, ніж $n^{-s}$, тобто має місце оцінка

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_C \geq \frac{K_3}{n^s}. \tag{62}$$

Утім, в справедливості нерівності (62) можна преконатись безпосередньо, розглянувши функцію

$$f_4(t) = \frac{\psi(1)}{(2\pi)^{\frac{1}{p}}}\cos t.$$

Легко бачити, що для довільного $\beta \in \mathbb{R}$ і $1 \leq p < \infty$, $f_4 \in C^{\psi}_{\beta,p}$ і

$$Z^s_n(f_4, t) = \big(1 - \frac{1}{n^s}\big)\Big(\frac{\psi(1)}{(2\pi)^{\frac{1}{p}}}\cos t\Big).$$

Тому

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_C \geq \big|f_4(0) - Z^s_n(f_4, 0)\big| = \frac{\psi(1)}{(2\pi)^{\frac{1}{p}} n^s} = \frac{K_3}{n^s}. \tag{63}$$

З нерівності (62) та оцінок (9), (10) випливає, що для довільного $\beta \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ за умови $g_{s,p} \in \mathcal{Z}^-_{p'}$ і $\int\limits_1^n \frac{g^{p'}_{s,p}(t)}{t}dt = O(1)$ або $g_{s,p} \in A^-$ виконується порядкова рівність (47).

Теорему 2 доведено.

Зауважимо, що при $1 < p < \infty$, $s > 0$ у випадку, коли $g_{s,p}$ — рівномірно обмежена зверху і знизу монотонна функція, як випливає з (46), для довільних $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$ виконується порядкова рівність

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_n\right)_C \asymp \frac{\ln^{1-\frac{1}{p}} n}{n^s}. \tag{64}$$

Як зазначалось вище, при $s = 1$ суми Зигмунда $Z^s_n$ співпадають із сумами Фейєра $\sigma_n$. Тому із теореми 2 випливає наступне твердження.

**Наслідок 1.** *Нехай* $1 < p < \infty$, $g_p(t) := \psi(t)t^{1+\frac{1}{p}}$. *Тоді*

*1. Якщо $\psi \in \Theta_p$ і $g_p \in A^+$, то для довільних $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p};\sigma_n\right)_C \asymp E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \psi(n)n^{\frac{1}{p}}. \tag{65}$$

*2. Якщо $g_p \in \mathcal{Z}^+_{p'}$ або $g_p \in \mathcal{Z}^-_{p'}$ і $\int\limits_1^n \frac{g_p^{p'}(t)}{t}dt \neq O(1)$, то для довільних $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p};\sigma_n\right)_C \asymp \frac{1}{n}\left(\int\limits_1^n \frac{\left(\psi(t)t^{1+\frac{1}{p}}\right)^{p'}}{t}dt\right)^{\frac{1}{p'}}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1. \tag{66}$$

*3. Якщо $g_p \in A^-$ або $g_p \in \mathcal{Z}^-_{p'}$ і $\int\limits_1^n \frac{g_p^{p'}(t)}{t}dt = O(1)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, то для довільних $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,p};\sigma_n\right)_C \asymp \frac{1}{n}. \tag{67}$$

При $\psi(k)=k^{-r}$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $r > \frac{1}{p}$ з рівностей (45), (47) та (64) одержуємо твердження.

**Наслідок 2.** *Нехай $1<p<\infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $s>0$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$\mathcal{E}_n\left(W^r_{\beta,p};Z^s_n\right)_C \asymp \begin{cases} n^{-r+\frac{1}{p}}, & \frac{1}{p}<r<s+\frac{1}{p}; \\ \frac{\ln^{1-\frac{1}{p}} n}{n^s}, & r=s+\frac{1}{p}; \\ n^{-s}, & r>s+\frac{1}{p}. \end{cases} \tag{68}$$

Оцінки (68) було отримано в роботі [9].


1. *Степанец А.И.* Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — **40**. — Ч. I. — 427 с.
2. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961. — **I**. — 936 с.
3. *Zygmund A.* Smooth Functions // Duke Math. J. — 1945. — **12**. — P. 47 – 76.
4. *Nagy B.* Sur une classe générale de procèdès de sommation pour les sèries de Fourier // Hung. Acta Math. — 1948. — **1**, №3. — P. 14 – 62.
5. *Теляковский С.А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1961. — **62**. — С. 61 – 97.

6. *Никольский С.М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Труды МИАН СССР. — 1945. — **15**. — С. 1 – 76.

7. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 307 с.

8. *Камзолов А.И.* О равномерном приближении классов функций $\widetilde{W}_p^\alpha(M)$ линейными положительными полиномиальными операторами // Весн. МГУ. — 1976. — №5. — С. 13 – 25.

9. *Костич М.В.* Наближення функцій з класів Вейля-Надя середніми Зигмунда // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, №5. — С. 735 – 739.

10. *Костич М.В.* Про наближення в метриці $L_q$ функцій з класів Вейля-Надя сумами Зигмунда // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, №2. — С. 268 – 270.

11. *Бушев Д.Н.* Приближение классов непрерывных периодических функций суммами Зигмунда. — Киев, 1984. — 64 с. — (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 84.56).

12. *Ковальская И.Б.* Оценки верхних граней уклонений в метрике $L_p$ // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, №5. — С. 668 – 670.

13. *Сердюк А.С., Соколенко І.В.* Рівномірні наближення класів $(\psi,\overline{\beta})$-диференційовних функцій лінійними методами // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2011. — **8**, №1. — С. 181 – 189.

14. *Serdyuk A.S., Sokolenko I.V.* Approximation by linear methods of classes of $(\psi,\overline{\beta})$-differentiable functions // Arxiv preprint, arXiv: 1303.1300, 2013 — 8p.

15. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. В 2 т. — М.: Мир, 1965. — **I**. — 616 с.

16. *Serdyuk A.S., Grabova U.Z.* Order estimation of the best approximations and of the approximations by Fourier sums of classes of $(\psi,\beta)$-differentiable functions // Arxiv preprint, arXiv: 1301.7620, 2013 — 14 p.