Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 97–109

УДК 517.5

О. Ф. Герус

(Житомирський державний університет імені Івана Франка, Житомир)

ogerus@zu.edu.ua

Оцінка модуля неперервності межових значень кватерніонного інтеграла типу Коші

It is proved an upper estimate for the modulus of continuity of boundary values of a quaternionic Cauchy-type integral.

Доведено верхню оцінку модуля неперервності межових значень кватерніонного інтеграла типу Коші.

1. Вступ. А. Зигмунд [1] вперше довів оцінку модуля неперервності тригонометрично спряженої функції на прямій, що рівносильна оцінці модуля неперервності сингулярного інтеграла Коші на колі. З цієї оцінки, зокрема, випливає теорема Племеля-Привалова про інваріантність класів Гьольдера відносно сингулярного інтеграла Коші. Оцінка А. Зигмунда узагальнювалась на більш широкі класи кривих у роботах Л. Г. Магнарадзе [2, 3], А. А. Бабаєва та В. В. Салаєва [4, 5, 6], П. М. Тамразова [7, 8], О. Ф. Геруса [9, 10, 11], Т. С. Салімова [12], Є. М. Динькіна [13]. Зокрема, з'ясувалось, що найбільш широким класом кривих (див. [6, 9]), для яких вона має такий же вигляд, як і на колі, є клас регулярних кривих (у яких міра частини кривої, що потрапляє в круг, не перевищує сталої, помноженої на радіус круга). На більш загальних кривих (див. [6, 9, 10, 12, 13, 11]) мажоранта погіршується і починає залежати ще і від кривої.

В роботі [14] розглянуто узагальнення інтеграла типу Коші в теорії так званих α-гіперголоморфних функцій, які діють з простору

$\mathbb{R}^2$, наділеного певною структурою кватерніонного множення, у алгебру комплексних кватерніонів. Доведено формули для межових значень інтеграла на замкнених кусково-ляпуновських кривих та теорему Племеля-Привалова про інваріантність класів Гьольдера для відповідного сингулярного інтеграла, через який виражаються межові значення. В роботі [15] доведені аналогічні формули на замкнених жорданових спрямлюваних кривих. В роботі [16] отримано оцінку модуля неперервності відповідного сингулярного інтеграла. В цій роботі отримано оцінку модуля неперервності межових значень кватерніонного узагальнення інтеграла типу Коші в теорії α-гіперголоморфних функцій.

2. Кватерніони. Кватерніонний інтеграл типу Коші. Позначимо через $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbb{R})$ та $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ відповідно алгебри дійсних та комплексних кватерніонів, тобто таких, що подаються у вигляді $a = \sum_{k=0}^{3} a_k \boldsymbol{i_k}$, де $\{a_k\}_{k=0}^{3} \subset \mathbb{R}$ для дійсних кватерніонів і $\{a_k\}_{k=0}^{3} \subset \mathbb{C}$ — для комплексних; $\boldsymbol{i}_0 = 1$, а $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ — уявні одиниці з правилом множення: ${\boldsymbol{i}_1}^2 = {\boldsymbol{i}_2}^2 = {\boldsymbol{i}_3}^2 = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 = -1$; комплексну уявну одиницю позначатимемо через i. $\mathbb{H}$ є некомутативною асоціативною алгеброю над полем дійсних чисел, яка не має дільників нуля. $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ є некомутативною асоціативною алгеброю над полем комплексних чисел, яка має дільники нуля. Під модулем комплексного кватерніона розумітимемо його евклідову норму $|a| = \|a\|_{\mathbb{R}^8}$.

Нехай $\alpha \in \mathbb{C}$, $z := x\boldsymbol{i}_1 + y\boldsymbol{i}_2$, $\zeta := \xi\boldsymbol{i}_1 + \eta\boldsymbol{i}_2$ — дійсні кватерніони, які містяться в евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, наділеному додатковою структурою кватерніонного множення, $H_n^{(p)}$ — функції Ганкеля роду $p \in \{1;2\}$ і порядку $n \in \{0;1;2\}$ (див. [17]). Позначимо:

$$\mathcal{E}_\alpha(z) := \begin{cases} (-1)^p \dfrac{i}{4} H_0^{(p)}(\alpha|z|) & \text{при } \alpha \neq 0, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln|z| & \text{при } \alpha = 0, \end{cases}$$

де

$$p = \begin{cases} 1 & \text{при } Im(\alpha) > 0 \text{ або } \alpha > 0, \\ 2 & \text{при } Im(\alpha) < 0 \text{ або } \alpha < 0. \end{cases}$$

Відомо (див., напр., [18]), що функція $\mathcal{E}_\alpha$ є фундаментальним розв'язком оператора Гельмгольца $\Delta_{\alpha^2} := \Delta_{\mathbb{R}^2} + M^{\alpha^2}$, де $\Delta_{\mathbb{R}^2} = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$, M^a — оператор множення на $a \in \mathbb{C}$.

Кватерніонним ядром Коші K_α називається фундаментальний розв'язок оператора ${}_\alpha\partial := \partial_1 \circ M^{\boldsymbol{i}_1} + \partial_2 \circ M^{\boldsymbol{i}_2} + M^\alpha$ подібно до того, як класичне ядро Коші є фундаментальним розв'язком оператора Коші-Рімана $\overline{\partial} := \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$. Завдяки факторизації оператора Гельмгольца (див. [19], [15])

$$\Delta_{\alpha^2} = -{}_\alpha\partial \circ {}_{-\alpha}\partial$$

маємо

$$K_\alpha(z) = -{}_{-\alpha}\partial[\mathcal{E}_\alpha](z),$$

звідки отримуємо

$$K_\alpha(z) = \begin{cases} (-1)^p \dfrac{i\alpha}{4}\left(H_1^{(p)}(\alpha|z|)\dfrac{z}{|z|} + H_0^{(p)}(\alpha|z|)\right) & \text{при } \alpha \neq 0, \\ \dfrac{1}{2\pi z} & \text{при } \alpha = 0. \end{cases}$$

Функції Ганкеля $H_0^{(p)}(t)$, $H_1^{(p)}(t)$ розкладаються в ряди (див. [17]):

$$\begin{aligned} H_0^{(p)}(t) = \left(1 - (-1)^p \frac{2i}{\pi}(\ln\frac{t}{2} + \boldsymbol{C})\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} + \\ + \frac{2i}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+p}t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} H_1^{(p)}(t) = \left(1 - (-1)^p \frac{2i}{\pi}(\ln\frac{t}{2} + \boldsymbol{C})\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2^{2k+1}k!(k+1)!} + \\ + (-1)^p\left(\frac{2i}{\pi t} + \frac{it}{2\pi}\right) + \frac{i}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+p}t^{2k+1}}{2^{2k+1}k!(k+1)!}\left(\sum_{m=1}^{k+1}\frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

де $\boldsymbol{C}$ — стала Ейлера.

Для замкненої жорданової спрямлюваної кривої $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ і неперервної функції $f\colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ кватерніонний інтеграл типу Коші визначається формулою (див. [15])

$$\Phi_\alpha[f](z) := \int_\Gamma K_\alpha(\zeta - z)\,\sigma\, f(\zeta), \qquad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,$$

де $\sigma := d\eta\boldsymbol{i}_1 - d\xi\boldsymbol{i}_2$.

3. Межові значення кватерніонного інтеграла типу Коші.

Нехай Ω^+ — обмежена область з межею Γ,

$\Omega^- := \mathbb{C} \setminus (\Omega^+ \cup \Gamma)$. Позначимо через $\Phi_\alpha^+[f]$, $\Phi_\alpha^-[f]$ звуження інтеграла $\Phi_\alpha[f]$, відповідно, на області Ω^+, Ω^-.

Теорема 1. ([15]) *Нехай Γ — замкнена жорданова спрямлювана крива, $f\colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ — неперервна функція і нехай інтеграл*

$$\Psi_\alpha[f](t) := \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_{t,\delta}} |K_\alpha(\zeta - t)|\,|\sigma|\,|f(\zeta) - f(t)|, \qquad t \in \Gamma,$$

де $\Gamma_{t,\delta} := \{\zeta \in \Gamma : |\zeta - t| \leqslant \delta\}$, існує рівномірно відносно $t \in \Gamma$. Тоді існує інтеграл

$$F_\alpha[f](t) := \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_{t,\delta}} K_\alpha(\zeta - t)\,\sigma\,(f(\zeta) - f(t)), \qquad t \in \Gamma;$$

крім того, функції $\Phi_\alpha^\pm[f]$ неперервно продовжуються відповідно на замикання $\overline{\Omega^+}$, $\overline{\Omega^-}$ і справедливі наступні формули:

$$\Phi_\alpha^+[f](t) = (I_\alpha(t) + 1)f(t) + F_\alpha[f](t), \quad t \in \Gamma, \tag{3}$$

$$\Phi_\alpha^-[f](t) = I_\alpha(t)f(t) + F_\alpha[f](t), \quad t \in \Gamma, \tag{4}$$

де

$$I_\alpha(t) := -\alpha \iint\limits_{\Omega^+} K_\alpha(\zeta - t)\,d\xi d\eta.$$

В роботі [16] доведено верхню оцінку модуля неперервності сингулярного інтеграла $F_\alpha[f]$ в термінах модуля неперервності підінтегральної функції f та метричної характеристики кривої. Метою цієї роботи є отримання подібних оцінок для межових значень $\Phi_\alpha^+[f]$, $\Phi_\alpha^-[f]$. Як видно з формул (3), (4), головну трудність тут складає оцінка модуля неперервності інтеграла I_α.

Нехай $\delta > 0$, $\omega_\Gamma(f, \delta) := \sup\limits_{\substack{|z_1 - z_2| \leqslant \delta \\ \{z_1; z_2\} \subset \Gamma}} |f(z_1) - f(z_2)|$ — модуль неперервності функції f на Γ,

$$\Omega_\Gamma(f, a, b) := \begin{cases} \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} \dfrac{\omega_\Gamma(f, t)}{t} & \text{при } 0 < a \leqslant b, \\[2ex] \Omega_\Gamma(f, b, b) & \text{при } 0 < b < a, \end{cases}$$

$\Gamma_{z,\delta} := \{\zeta{\in}\Gamma : |\zeta - z| \leqslant \delta\}$, $\theta_z(\delta) := \operatorname{mes}\Gamma_{z,\delta}$ — криволінійна міра Лебега множини $\Gamma_{z,\delta}$ (див. [6]),

$$\Theta(z,\delta) := \frac{\delta^2}{\theta_z(4\delta) - \theta_z(\delta)}\,.$$

Надалі позначатимемо через $c\,(\cdot), c\,(\cdot,\cdot), c\,(\cdot,\cdot,\cdot)$ додатні сталі (можливо різні), які залежать лише від аргументів у дужках. Символом c без аргументів позначатимемо абсолютні сталі.

Теорема 2. *Нехай функція* $f\colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *задовольняє умови*

$$\sup_{z\in\Gamma}\int\limits_0^d \Omega_\Gamma(f,\Theta(z,x),x)\,dx < +\infty,$$

$$\sup_{z\in\Gamma}\int\limits_0^d |\ln x|\,\omega_\Gamma(f,x)\,d\theta_z(x) < +\infty.$$

Тоді функції $\Phi^{\pm}_\alpha[f]$ *неперервно продовжуються відповідно на замикання* $\overline{\Omega^+}$, $\overline{\Omega^-}$ *і для* $\delta \in \left(0, \min\left\{\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}}; \frac{d}{3}\right\}\right]$ *справедливі оцінки*

$$\begin{aligned}\omega_\Gamma(\Phi^{\pm}_\alpha[f],\delta) \leqslant{} & c\sup_{z\in\Gamma}\int\limits_0^{2d} \Omega_\Gamma(f,\Theta(z,x),x)\frac{dx}{1+\dfrac{x}{\delta}} + \\ & + c(\alpha)\sup_{z\in\Gamma}\int\limits_0^d \frac{|\ln x|\,\omega_\Gamma(f,x)}{1+\dfrac{\omega_\Gamma(f,x)}{\omega_\Gamma(f,4\delta)}}\,d\theta_z(x) + \\ & + c(\alpha)\,\delta\left(\sup_{z\in\Gamma}\int\limits_{3\delta}^d \frac{\omega_\Gamma(f,x)}{x}\,d\theta_z(x) + \ln\frac{d}{3\delta}\right),\end{aligned} \tag{5}$$

де d *— діаметр кривої* Γ.

Доведення. Оцінимо $\omega_\Gamma(I_\alpha,\delta)$. Для цього, використовуючи розкладання в ряди функцій Ганкеля (1), (2), розглянемо подання

$$I_\alpha(t) = \sum_{q=1}^{5} I^{(q)}_\alpha(t),$$

де

$$I_\alpha^{(1)}(t) := \iint\limits_{\Omega^+} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,p} \frac{(-1)^{k+1}\alpha^{2k+2}}{2^{2k+2}(k!)^2} |\zeta - t|^{2k} d\xi\, d\eta,$$

$$a_{k,p} := \begin{cases} (-1)^p i + \frac{2}{\pi}\left(\boldsymbol{C} + \ln\frac{\alpha}{2}\right) & \text{при} \quad k = 0, \\ (-1)^p i + \frac{2}{\pi}\left(\boldsymbol{C} + \ln\frac{\alpha}{2} + \sum\limits_{m=1}^{k} \frac{1}{m}\right) & \text{при} \quad k > 0, \end{cases}$$

$$I_\alpha^{(2)}(t) := \iint\limits_{\Omega^+} \sum_{k=0}^{\infty} b_{k,p} \frac{(-1)^{k+1}\alpha^{2k+3}}{2^{2k+3}k!(k+1)!} |\zeta - t|^{2k}(\zeta - t) d\xi\, d\eta,$$

$$b_{k,p} := \begin{cases} (-1)^p i + \frac{2}{\pi}\left(\boldsymbol{C} - \frac{1}{2} + \ln\frac{\alpha}{2}\right) & \text{при} \quad k = 0, \\ (-1)^p i + \frac{2}{\pi}\left(\boldsymbol{C} - \frac{1}{2(k+1)} - \sum\limits_{m=1}^{k} \frac{1}{m} + \ln\frac{\alpha}{2}\right) & \text{при} \quad k > 0, \end{cases}$$

$$I_\alpha^{(3)}(t) := \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega^+} \ln|\zeta - t| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\alpha^{2k+2}|\zeta - t|^{2k}}{2^{2k+1}(k!)^2} d\xi\, d\eta,$$

$$I_\alpha^{(4)}(t) := \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega^+} \ln|\zeta - t| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\alpha^{2k+3}|\zeta - t|^{2k}(\zeta - t)}{2^{2k+2}k!(k+1)!} d\xi\, d\eta,$$

$$I_\alpha^{(5)}(t) := -\frac{\alpha}{2\pi} \iint\limits_{\Omega^+} \frac{1}{\zeta - t} d\xi\, d\eta.$$

Нехай $\{t_1; t_2\} \subset \Gamma$, $h := |t_1 - t_2| \leqslant \delta$. Тоді

$$\left| I_\alpha^{(1)}(t_1) - I_\alpha^{(1)}(t_2) \right| \leqslant \left| \iint\limits_{\Omega^+_{t_1,3h}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,p} \frac{\alpha^{2k+2}}{2^{2k+2}(k!)^2} |\zeta - t_1|^{2k} d\xi\, d\eta \right| +$$

$$+ \left| \iint\limits_{\Omega^+_{t_1,3h}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,p} \frac{\alpha^{2k+2}}{2^{2k+2}(k!)^2} |\zeta - t_2|^{2k} d\xi\, d\eta \right| +$$

$$+ \left| \iint\limits_{\Omega^+ \setminus \Omega^+_{t_1,3h}} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,p} \frac{\alpha^{2k+2}}{2^{2k+2}(k!)^2} \left(|\zeta - t_1|^{2k} - |\zeta - t_2|^{2k}\right) d\xi\, d\eta \right| =:$$

$$=: M_1 + M_2 + M_3.$$

$$M_1 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k,p}| \frac{|\alpha|^{2k+2}}{2^{2k+2}(k!)^2} \iint\limits_{\Omega^+_{t_1,3h}} |\zeta - t_1|^{2k} d\xi\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \pi \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k,p}| \frac{|\alpha|^{2k+2} 3^{2k+2}}{2^{2k+2}(k!)^2(k+1)} h^{2k+2} \leqslant c(\alpha)\delta^2.$$

Аналогічно оцінюється M_2. Для $\zeta \in \Omega^+ \setminus \Omega^+_{t_1,3h}$ виконується нерівність $|\zeta - t_2| \leqslant \frac{4}{3}|\zeta - t_1|$. Тому

$$M_3 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k,p}| \frac{|\alpha|^{2k+2}}{2^{2k+2}(k!)^2} \times$$

$$\times \iint\limits_{\Omega^+ \setminus \Omega^+_{t_1,3h}} \big||\zeta - t_1| - |\zeta - t_2|\big| \sum_{m=0}^{2k-1} |\zeta - t_1|^{2k-1-m} |\zeta - t_2|^m d\xi\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant h \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k,p}| \frac{2^{2k-2}\, |\alpha|^{2k+2}}{3^{2k+1}(k!)^2} \iint\limits_{\Omega^+ \setminus \Omega^+_{t_1,3h}} |\zeta - t_1|^{2k-1} d\xi\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant h \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k,p}| \frac{2^{2k-2}\, |\alpha|^{2k+2}}{3^{2k+1}(k!)^2} \frac{2\pi}{2k+1} d^{2k+1} \leqslant c(\alpha, d)\delta.$$

Таким чином,

$$\omega_\Gamma\big(I_\alpha^{(1)}, \delta\big) \leqslant c(\alpha, d)\delta. \tag{6}$$

$$\left|I_\alpha^{(2)}(t_1) - I_\alpha^{(2)}(t_2)\right| \leqslant \left| \iint\limits_{\Omega^+_{t_1,3h}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{k,p}\alpha^{2k+3}}{2^{2k+3}k!(k+1)!} |\zeta - t_1|^{2k} (\zeta - t_1) d\xi\, d\eta \right| +$$

$$+ \left| \iint\limits_{\Omega^+_{t_1,3h}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{k,p}\alpha^{2k+3}}{2^{2k+3}k!(k+1)!} |\zeta - t_2|^{2k} (\zeta - t_2) d\xi\, d\eta \right| +$$

$$+ \left| \iint\limits_{\Omega^+ \setminus \Omega^+_{t_1,3h}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{k,p}\alpha^{2k+3}}{2^{2k+3}k!(k+1)!} \times \right.$$

$$\left. \times \left(|\zeta - t_1|^{2k}(\zeta - t_1) - |\zeta - t_2|^{2k}(\zeta - t_2)\right) d\xi\, d\eta \right| =: M_4 + M_5 + M_6.$$

$$M_4 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |b_{k,p}| \frac{|\alpha|^{2k+3}}{2^{2k+3} k!(k+1)!} \iint\limits_{\Omega^+_{t_1,3h}} |\zeta - t_1|^{2k+1} d\xi\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |b_{k,p}| \frac{|\alpha|^{2k+3}(3h)^{2k+3}}{2^{2k+3}(k!)(k+1)!(2k+3)} \leqslant c(\alpha)\delta^3.$$

Аналогічно оцінюється M_5.

$$M_6 \leqslant \iint\limits_{\Omega^+\setminus\Omega^+_{t_1,3h}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_{k,p}|\,|\alpha|^{2k+3}}{2^{2k+3} k!(k+1)!} \left| |\zeta - t_1|^{2k} - |\zeta - t_2|^{2k} \right| |\zeta - t_1| d\xi\, d\eta +$$

$$+ \iint\limits_{\Omega^+\setminus\Omega^+_{t_1,3h}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_{k,p}|\,|\alpha|^{2k+3}}{2^{2k+3} k!(k+1)!} |\zeta - t_2|^{2k} |t_2 - t_1| d\xi\, d\eta =: M_7 + M_8.$$

Аналогічно оцінці M_3, отримуємо $M_7 \leqslant c(\alpha, d)\delta$, а також

$$M_8 \leqslant h \sum_{k=1}^{\infty} |b_{k,p}| \frac{2^{2k-3}\,|\alpha|^{2k+3}}{3^{2k} k!(k+1)!} \iint\limits_{\Omega^+\setminus\Omega^+_{t_1,3h}} |\zeta - t_1|^{2k} d\xi\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant h \sum_{k=1}^{\infty} |b_{k,p}| \frac{2^{2k-3}\,|\alpha|^{2k+3}}{3^{2k} k!(k+1)!} \frac{\pi}{k+1} d^{2k+2} \leqslant c(\alpha, d)\delta.$$

Тому $M_6 \leqslant c(\alpha, d)\delta$ і, отже,

$$\omega_\Gamma\left(I^{(2)}_\alpha, \delta\right) \leqslant c(\alpha, d)\delta. \tag{7}$$

$$\left|I_\alpha^{(3)}(t_1) - I_\alpha^{(3)}(t_2)\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\left|\iint\limits_{\Omega^+_{t_1,3h}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+2}}{2^{2k+1}(k!)^2}|\zeta - t_1|^{2k}\ln|\zeta - t_1| d\xi\, d\eta\right| +$$

$$+\frac{1}{\pi}\left|\iint\limits_{\Omega^+_{t_1,3h}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+2}}{2^{2k+1}(k!)^2}|\zeta - t_2|^{2k}\ln|\zeta - t_2| d\xi\, d\eta\right| +$$

$$+\frac{1}{\pi}\left|\iint\limits_{\Omega^+\setminus\Omega^+_{t_1,3h}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+2}}{2^{2k+1}(k!)^2} \times\right.$$

$$\left.\times\ \big(|\zeta - t_1|^{2k}\ln|\zeta - t_1| - |\zeta - t_2|^{2k}\ln|\zeta - t_2|\big)\, d\xi\, d\eta\right| =: M_9 + M_{10} + M_{11}.$$

При $\delta < \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}}$ маємо

$$M_9 \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2k+2}}{2^{2k+1}(k!)^2} \iint\limits_{\Omega^+_{t_1,3h}} |\zeta - t_1|^{2k}|\ln|\zeta - t_1|| d\xi\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2k+2}3^{2k+2}}{2^{2k}(k!)^2(k+1)} h^{2k+2}\ln\frac{1}{3h} \leqslant c(\alpha)\delta^2\ln\frac{1}{3\delta} \leqslant c(\alpha)\delta.$$

Аналогічно оцінюється M_{10}.

$$M_{11} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2k+2}}{2^{2k+1}(k!)^2} \iint\limits_{\Omega^+\setminus\Omega^+_{t_1,3h}} |\ln|\zeta - t_1||\,||\zeta - t_1| - |\zeta - t_2|| \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{2k-1} |\zeta - t_1|^{2k-1-m}|\zeta - t_2|^m d\xi\, d\eta +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2k+2}}{2^{2k+1}(k!)^2} \iint\limits_{\Omega^+\setminus\Omega^+_{t_1,3h}} |\zeta - t_2|^{2k}\left|\ln|\zeta - t_1| - \ln|\zeta - t_2|\right| d\xi\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant h\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}\,|\alpha|^{2k+2}}{3^{2k-1}(k!)^2}\iint\limits_{\Omega^+\setminus\Omega^+_{t_1,3h}}|\zeta-t_1|^{2k-1}|\ln|\zeta-t_1||d\xi\,d\eta+$$

$$+\,h\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2k+2}2^{2k-2}}{3^{2k-1}(k!)^2}\iint\limits_{\Omega^+\setminus\Omega^+_{t_1,3h}}|\zeta-t_1|^{2k-1}d\xi\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant h\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\,|\alpha|^{2k+2}}{3^{2k-1}(k!)^2}\frac{\pi}{2k+1}\left(\frac{1}{2k+1}+d^{2k+1}(\ln d+1)\right)\leqslant c(\alpha,d)\delta.$$

Отже,

$$\omega_\Gamma\left(I_\alpha^{(3)},\delta\right)\leqslant c(\alpha,d)\delta. \tag{8}$$

Міркуючи як і при оцінюванні модулів неперервності інтегралів $I_\alpha^{(2)}$, $I_\alpha^{(3)}$, при $\delta<\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}}$ отримуємо

$$\omega_\Gamma\left(I_\alpha^{(4)},\delta\right)\leqslant c(\alpha,d)\delta. \tag{9}$$

$$\frac{2\pi}{\alpha}\left|I_\alpha^{(5)}(t_1)-I_\alpha^{(5)}(t_2)\right|\leqslant\left|\iint\limits_{\Omega^+_{t_1,3\delta}}\frac{1}{\zeta-t_1}d\xi\,d\eta\right|+\left|\iint\limits_{\Omega^+_{t_1,3\delta}}\frac{1}{\zeta-t_2}d\xi\,d\eta\right|+$$

$$+\left|\iint\limits_{\Omega^+\setminus\Omega^+_{t_1,3\delta}}\frac{t_2-t_1}{(\zeta-t_1)(\zeta-t_2)}d\xi\,d\eta\right|=:M_{12}+M_{13}+M_{14}.$$

$$M_{12}\leqslant\iint\limits_{\Omega^+_{t_1,3\delta}}\frac{1}{|\zeta-t_1|}d\xi\,d\eta\leqslant 6\pi\delta,$$

$$M_{13}\leqslant\iint\limits_{\Omega^+_{t_1,3\delta}}\frac{1}{|\zeta-t_2|}d\xi\,d\eta\leqslant 8\pi\delta.$$

$$M_{14}\leqslant|t_2-t_1|\iint\limits_{\Omega^+\setminus\Omega^+_{t_1,3\delta}}\frac{1}{|\zeta-t_1||\zeta-t_2|}d\xi\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3}{2}|t_2-t_1|\iint\limits_{\Omega^+\setminus\Omega^+_{t_1,3\delta}}\frac{1}{|\zeta-t_1|^2}d\xi\,d\eta\leqslant 3\pi\delta\ln\frac{d}{3\delta}.$$

Тому

$$\omega_\Gamma(I_\alpha^{(5)},\delta) \leqslant \alpha\delta(7+\frac{3}{2}\ln\frac{d}{3\delta}). \tag{10}$$

Враховуючи рівності (3), (4), з оцінок (6), (7), (8), (9), (10) та оцінки (7) роботи [16] простими міркуваннями випливає нерівність (5). Теорема доведена.

Означення 1. Замкнена жорданова спрямлювана крива Γ називається регулярною або K-регулярною, якщо існує така додатна стала K, що для всіх $z \in \Gamma$ і всіх $\delta > 0$ виконується умова $\theta_z(\delta) \leqslant K\delta$.

Наслідок 1. *Нехай Γ — K-регулярна крива і функція $f\colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ задовольняє умову*

$$\int\limits_0^d \frac{\omega_\Gamma(f,x)}{x}\,dx < \infty.$$

Тоді функції $\Phi_\alpha^{\pm}[f]$ неперервно продовжуються відповідно на замикання $\overline{\Omega^+}$, $\overline{\Omega^-}$ і для $\delta \in \left(0, \min\left\{\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}}; \frac{d}{3}\right\}\right]$ справедливі оцінки

$$\omega_\Gamma(\Phi_\alpha^{\pm}[f],\delta) \leqslant c(K,d,\alpha)\int\limits_0^{2d} \frac{\omega_\Gamma(f,x)}{x\left(1+\dfrac{x}{\delta}\right)}dx + c(\alpha)\delta\ln\frac{d}{3\delta}. \tag{11}$$

Доведення є дослівним повторенням доведення наслідка 1 роботи [16].

Позначимо

$$H_\mu(\Gamma) := \{f\colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C}) : \omega_\Gamma(f,\delta) = O(\delta^\mu),\ \delta \to 0\}.$$

З попереднього наслідка очевидним чином випливає наступне твердження, відоме як теорема типу Племеля-Привалова (у випадку, коли Γ — кусково-ляпуновська крива, див. [14]).

Наслідок 2. *Нехай Γ — K-регулярна крива, $0 < \mu < 1$ і $f \in H_\mu(\Gamma)$. Тоді функції $\Phi_\alpha^{\pm}[f]$ неперервно продовжуються відповідно на замикання $\overline{\Omega^+}$, $\overline{\Omega^-}$ і $\Phi_\alpha^{\pm}[f] \in H_\mu(\Gamma)$.*

Література

[1] *Zygmund A.* Sur le module de continuité de la somme de la série conjuguée de la série de Fourier // Prace Matematyczno-Fizyczne. — 1924. — **33**. — P. 125 – 132.

[2] *Магнарадзе Л. Г.* Об одном обобщении теоремы Племеля-Привалова // Сообщ. АН Груз. ССР. — 1947. — **8**, № 8. — С. 509 – 516.

[3] *Магнарадзе Л. Г.* Об одном обобщении теоремы И. И. Привалова и его применение к некоторым граничным задачам теории функций и к сингулярным интегральным уравнениям // ДАН СССР. — 1949. — **68**, № 4. — С. 657 – 660.

[4] *Бабаев А. А.* Об особом интеграле с непрерывной плотностью // Уч. зап. Азерб. ун-та. Серия физ.-мат. и хим. наук. — 1965. — № 5. — С. 11 – 28.

[5] *Бабаев А. А., Салаев В. В.* Одномерный сингулярный оператор с непрерывной плотностью по замкнутой кривой // ДАН СССР. — 1973. **209**, № 6. — С. 1257 – 1260.

[6] *Салаев В. В.* Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой // Мат. заметки. — 1976. — **19**, № 3. — С. 365 – 380.

[7] *Тамразов П. М.* Об ограниченных голоморфных функциях в комплексной области // 3-й съезд болг. матем. Резюмета на докладите III конгрес на Болгарските математици. — Ч. 1. — Варна, 1972. — С. 186 – 187.

[8] *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. — К.: Наукова думка, 1975. — 272 с.

[9] *Герус О. Ф.* Конечноразностные гладкости интегралов типа Коши // Укр. мат. журн. — 1977. — **29**, № 5. — С. 642 – 646.

[10] *Герус О. Ф.* Некоторые оценки модулей гладкости интегралов типа Коши // Укр. мат. журн. — 1978. — **30**, № 5. — С. 594 — 601.

[11] *Герус О. Ф.* Оценка модуля непрерывности интеграла типа Коши в области и на её границе // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 10. — С. 1321 – 1328.

[12] *Салимов Т. С.* Прямая оценка для сингулярного интеграла Коши по замкнутой кривой // Науч. труды МВ и ССО Азерб. ССР. Серия физ.-мат. наук. — 1979. — № 5. — С. 59 – 75.

[13] *Дынькин Е. М.* Гладкость интегралов типа Коши // Зап. науч. семин. ЛОМИ. — 1979. — **92**. — С. 115 — 133.

[14] *Gerus O., Schneider B., Shapiro M.* On boundary properties of α-hyperholomorphic functions in domains of $\mathbb{R}^2$ with the piece-wise Liapunov boundary // Progress in Analysis. Proceedings of 3rd International

ISAAC Congress. Berlin, Germany, 20 – 25 August 2001. — Volume 1. — Berlin:World Scientific, 2003. — P. 375 – 382.

[15] *Gerus O. F., Shapiro M. V.* On a Cauchy-type integral related to the Helmholtz operator in the plane // Boletin de la Sociedad Matemática Mexicana. — 2004. — **10**, № 1. — P. 63 – 82.

[16] *Герус О. Ф.* Оцінка модуля неперервності кватерніонного сингулярного інтеграла Коші // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 10. — С. 1428 – 1435.

[17] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. — 1100 с.

[18] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. — 512 с.

[19] *Rocha-Chávez R., Shapiro M. V., Tovar L. M.* On the Hilbert operator for α-hyperholomorphic function theory in $\mathbb{R}^2$ // Complex Variables Theory Appl. — 2000. — **43**, № 1. — P. 1 – 28.