Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 78–96

УДК 517.5

***Волошин Г.А.***[1,2]***, Маслюченко В.К.***[1]***,***
***Маслюченко О.В.***[1,3]

[1] *(Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці)*

[2] *(Буковинський державний фінансово-економічний університет, Чернівці)*

[3] *(Instytut Matematyki, Akademia Pomorska w Slupsku, Slupsk, Polska)*

# Про беровість простору нарізно неперервних функцій

We propose three methods for proving that locally convex space $S = CC[0,1]^2$ of separately continuous functions $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ on the square $[0,1]^2$ with topology of layer-wise uniform convergence is the set of the first category, therefore, is not Baire space. The methods of $\varepsilon$-nets, function of calculation or topological games were used in this research. These approaches were generalized on spaces $CC(X \times Y)$ of separately continuous functions $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, which were topologized respectively.

Запропоновано три методи доведення того, що локально опуклий простір $S = CC[0,1]^2$ нарізно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ на квадраті $[0,1]^2$ з топологією пошарово рівномірної збіжності є множиною першої категорії, отже, не є берівським. Вони використовують $\varepsilon$-сітки, функцію обчислення чи топологічні ігри. Ці підходи узагальнено на простори $CC(X \times Y)$ нарізно неперервних функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, які відповідним чином топологізовано.

**1. Вступні зауваження.** Для топологічних просторів $X$, $Y$ і $Z$ символом $CC(X \times Y, Z)$ ми позначаємо сукупність усіх нарізно неперервних відображень $f\colon X \times Y \longrightarrow Z$. При $Z = \mathbb{R}$ сукупність

$CC(X \times Y) = CC(X \times Y, \mathbb{R})$ утворює дійсний векторний простір. Якщо $X$ і $Y$ — це компактні простори, то ми можемо ввести передномри на векторному просторі $CC(X \times Y)$, покладаючи для довільних $x \in X$ і $y \in Y$: $\|f\|^x = \|f^x\|_\infty$, $\quad \|f\|_y = \|f_y\|_\infty$, де $\|g\|_\infty = \max\limits_{t \in T} |g(t)|$ — рівномірна норма неперервної функції $g\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$, заданої на компактному просторі $T$, і $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Сукупність переднорм $\mathcal{N}(X, Y) = \{\| \cdot \|^x : x \in X\} \cup \{\| \cdot \|_y : y \in Y\}$ породжує на просторі $CC(X \times Y)$ деяку локально опуклу топологію, яку ми позначатимемо символом $\mathcal{T} = \mathcal{T}(X, Y)$. Вона називається *топологією пошарово рівномірної збіжності*. Для кожної точки $p = (x, y) \in X \times Y$ введемо переднорму $N_p$ на $CC(X \times Y)$, покладаючи $N_p(f) = \max\{\|f\|^x, \|f\|_y\} = \max\limits_{q \in cr(p)} |f(q)|$, де $cr(p) = (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$. Легко перевірити, що локально опукла топологія, що породжується сукупністю переднорм $\mathcal{N}(X \times Y) = \{N_p : p \in X \times Y\}$ збігається з топологією $\mathcal{T}$.

Топологія $\mathcal{T}(X, Y)$ у випадку $X = Y = [0, 1]$ була введена в тезах [1], а її властивості вивчалися в праці [2], де, зокрема, було встановлено, що локально опуклий простір $S = (CC[0, 1]^2, \mathcal{T})$ — це повний сепарабельний неметризовний локально опуклий простір. Там також була окреслена програма дослідження подальших властивостей локально опуклого простору $S$.

Тут ми починаємо реалізовувати цю програму з дослідження питання про беровість простору $S$. Ми доводимо трьома істотно різними способами, що простір $S$ не берівський. Перший використовує $\varepsilon$-сітки і дає явне зображення $S$ у вигляді об'єднання послідовності ніде не щільних множин, він узагальнюється на випадок метризовних компактів без ізольованих точок. Другий базується на тому, що для компактів $X$ і $Y$ без ізольованих точок і простору $Z = CC(X \times Y)$, наділеному топологією пошарово рівномірної збіжності, функція обчислення $\Phi\colon X \times Y \times Z \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x, y, z) = z(x, y)$, нарізно неперервна і скрізь розривна. Цей спосіб застосовний до таких компактів $X$ і $Y$ без ізольованих точок, для яких для берівського простору $Z$ кожна нарізно неперервна функція $f\colon X \times Y \times Z \longrightarrow \mathbb{R}$ має хоча б одну точку неперервності, наприклад, для компактів з першою аксіомою зліченності. Третій спосіб використовує гру Банаха-Мазура та ідеї праць [4, 5] і застосовний для довільних компактів без ізольованих точок чи навіть у загальнішому випадку (теорема 9). Таким чином, в цій статті встановлено, що для довільних компактів $X$ і $Y$ без ізольованих точок простір $CC(X \times Y)$ з топологією пошарово рівномірної збіжності не берівський, а є множиною першої категорії в собі. Цей результат анонсовано в тезах [3].

**2. Побудова $\varepsilon$-сіток у просторах без ізольованих точок.** Нагадаємо, що підмножина $A$ метричного простору $(T, d)$ називається *$\varepsilon$-сіткою* множини $E \subseteq T$, якщо для кожного $t \in E$ існує такий елемент $a \in A$, що $d(t, a) < \varepsilon$. Якщо множина $E$ для кожного $\varepsilon > 0$ має скінченну $\varepsilon$-сітку $A \subseteq T$, то вона називається *цілком обмеженою.* Легко перевірити [6, с.143, теорема 2], що цілком обмежена множина $E$ для кожного $\varepsilon > 0$ має скінченну $\varepsilon$-сітку $B$, що міститься в $E$.

Точка $t$ множини $E$ в топологічному просторі $T$ називається *ізольованою* в $E$, якщо існує такий її окіл $U$ в $T$, що $U \cap E = \{t\}$.

Нам будуть потрібні деякі допоміжні твердження, в яких використовується поняття $\varepsilon$-сітки, для доведення неберовості простору $S$ першим способом.

**Лема 1.** *Нехай $(T, d)$ — метричний простір і $E$ – цілком обмежена множина в $T$ без ізольованих точок. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існують такі дві скінченні $\varepsilon$-сітки $A$ і $B$ множини $E$, що $A \cap B = \varnothing$ і $A \cup B \subseteq E$.*

*Доведення.* Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки множина $E$ цілком обмежена, то в ній існує деяка скінченна $\varepsilon$-сітка $A$. Множина $E \backslash A$ теж цілком обмежена, бо $E \backslash A \subseteq E$. Тому існує така $\frac{\varepsilon}{2}$-сітка $B$ множини $E \backslash A$, що $B \subseteq E \backslash A$. Покажемо, що $B$ — це $\varepsilon$-сітка множини $E$. Нехай $t \in E$. Якщо $t \notin A$, то існує такий елемент $b \in B$, що $d(t, b) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Припустимо, що $t \in A$. Число $\delta_0 = \min\{d(t, a) : a \in A, a \neq t\}$ обов'язково існує, адже множина $A$ скінченна, і більше нуля. Покладемо $\varepsilon_0 = \min\{\delta_0, \frac{\varepsilon}{2}\}$ і розглянемо окіл $U_0 = \{u \in T : d(u, t) < \varepsilon_0\}$ точки $t$ в $T$. Оскільки точка $t$ не ізольована, то існує такий елемент $u_0 \in U_0 \cap E$, що $u_0 \neq t$. Ясно, що $u_0 \notin A$, бо $u_0 \neq t$ і $d(a, t) \geq \delta_0 \geq \varepsilon_0$ для кожного $a \in A \backslash \{t\}$, а $d(u_0, t) < \varepsilon_0$. Таким чином, $u_0 \in E \backslash A$, отже, для нього існує такий елемент $b_0 \in B$, що $d(u_0, b_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді $d(t, b_0) \leq d(t, u_0) + d(u_0, b_0) < \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ми з'ясували, що $B$ — це $\varepsilon$-сітка множини $E$, крім того, $A \cap B = \varnothing$, бо $B \subseteq E \backslash A$. Отже, шукані скінченні $\varepsilon$-сітки $A$ і $B$ множини $E$ побудовані.

**Лема 2.** *Нехай $E$ і $F$ — підмножини метричного простору $(T, d)$, такі, що $E \subseteq F \subseteq \overline{E}$, $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$ і $A$ — $\varepsilon_0$-сітка множини $E$, що* *міститься в $E$. Тоді $A$ буде $\varepsilon$-сіткою множини $F$, що міститься в $F$.*

*Доведення.* Нехай $u \in F$ і $\delta = \varepsilon - \varepsilon_0$. Оскільки $F \subseteq \overline{E}$ і $\delta > 0$, то існує така точка $t \in E$, що $d(u,t) < \delta$. Для точки $t$ знайдемо таке $a \in A$, що $d(t,a) < \varepsilon_0$. Тоді $d(u,a) \le d(u,t) + d(t,a) < \delta + \varepsilon_0 = \varepsilon$. Таким чином, $A$ — це $\varepsilon$-сітка множини $F$, причому $A \subseteq E \subseteq F$.

**3. Леми про підмножини простору $CC(X\times Y)$, що породжені $\varepsilon$-сітками.** Нехай $X$ і $Y$ — метричні простори. Відстані між елементами $x'$ і $x''$ чи $y'$ і $y''$ у просторах $X$ і $Y$ відповідно позначимо символами $|x'-x''|_X$ і $|y'-y''|_Y$. Для точок $p' = (x', y')$ і $p'' = (x'', y'')$ з добутку $P = X \times Y$ покладемо

$$d(p',p'') = |p'-p''|_P = \max\{|x'-x''|_X, |y'-y''|_Y\}.$$

Легко перевірити, що $d$ – це метрика на $P$, яка породжує топологію добутку на $P$. При цьому $\varepsilon$-окіл $W_\varepsilon(p_0) = \{p \in P : d(p,p_0) < \varepsilon\}$ точки $p_0$ в добутку $P$ є добутком $U_\varepsilon(x_0) \times V_\varepsilon(y_0)$ $\varepsilon$-околів $U_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : |x-x_0|_X < \varepsilon\}$ і $V_\varepsilon(y_0) = \{y \in Y : |y-y_0|_Y < \varepsilon\}$ у просторах $X$ і $Y$, відповідно.

Нехай $X$ і $Y$ — це метричні компакти. Тоді їх добуток $P = X \times Y$ з вище введеною метрикою $d$ теж буде метричним компактом. Ті $\varepsilon$-сітки, що ми далі будемо розглядати в добутку $P$ стосуються саме цієї метрики $d$.

**Лема 3.** *Нехай $X$ і $Y$ — метричні компакти, $P = X \times Y$, $\varepsilon > 0$, $c \in \mathbb{R}$ і*

$$G = \{f \in CC(X\times Y) : \exists\, \textit{скінченна } \varepsilon\textit{-сітка } A \textit{ в } P, \textit{ така, що}$$

$$(\forall p \in A)(f(p) < c)\}.$$

*Тоді $G$ — це відкрита множина у просторі $CC(X \times Y)$.*

*Доведення.* Нехай $f_0 \in G$. Тоді існує така скінченна $\varepsilon$-сітка $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$ в $P$, що $f_0(p_k) < c$ для кожного $k = 1, \ldots, n$. Введемо числа $\varepsilon_k = c - f_0(p_k)$ для $k = 1, \ldots, n$ і $\varepsilon = \min\{\varepsilon_k : k = 1, \ldots, n\}$. Ясно, що $\varepsilon > 0$. Розглянемо окіл

$$O = \{f \in CC(X\times Y) : \max_{k=1,\ldots,n} N_{p_k}(f - f_0) < \varepsilon\}$$

точки $f_0$ у просторі $CC(X \times Y)$ і покажемо, що $O \subseteq G$.

Нехай $f \in O$. Тоді

$$f(p_k) = f_0(p_k) + f(p_k) - f_0(p_k) \le f_0(p_k) + |f(p_k) - f_0(p_k)| \le$$

$$\le f_0(p_k) + N_{p_k}(f - f_0) < f_0(p_k) + \varepsilon \le f_0(p_k) + \varepsilon_k = c$$

для кожного $k = 1, \dots, n$, отже, $f \in G$. Це і доводить відкритість множини $G$ в $CC(X \times Y)$.

Зауважимо, що насправді множина $G$ з леми 3 відкрита у просторі $CC(X \times Y)$ з топологією поточкової збіжності, яка слабша від топології $\mathcal{T}$.

Аналогічно доводиться і відкритість множини

$$H = \{f \in CC(X \times Y) : \exists\, \text{скінченна}\, \varepsilon\text{-сітка}\, B \,\text{в}\, P, \text{ така, що}$$

$$(\forall p \in B)(f(p) > c)\}.$$

**Лема 4.** *Нехай $X$ і $Y$ — метричні компакти без ізольованих точок, $P = X \times Y$, $c_1 < c_2$, $\varepsilon > 0$ і $G$ — це множина всіх тих функцій $f \in CC(X \times Y)$, для яких існують такі скінченні $\varepsilon$-сітки $A$ і $B$ в $P$, що $f(p) < c_1$ на $A$ і $f(p) > c_2$ на $B$. Тоді множина $G$ відкрита і всюди щільна в $CC(X \times Y)$.*

*Доведення.* Розглянемо множини

$$G_1 = \{f \in CC(X \times Y) : \exists\, \text{скінченна}\, \varepsilon\text{-сітка}\, A \,\text{в}\, P | f(p) < c_1 \,\text{на}\, A\},$$

$$G_2 = \{f \in CC(X \times Y) : \exists\, \text{скінченна}\, \varepsilon\text{-сітка}\, B \,\text{в}\, P | f(p) > c_2 \,\text{на}\, B\}.$$

Ясно, що $G = G_1 \cap G_2$. За доведеним вище множини $G_1$ і $G_2$ відкриті, тому і множина $G$ відкрита в $CC(X \times Y)$.

Доведемо, що $G$ — всюди щільна множина в $CC(X \times Y)$. Нехай $f_0 \in CC(X \times Y)$, $p_1, \dots, p_n \in P$, $p_k = (x_k, y_k)$, $\delta > 0$ і

$$O = \{f \in CC(X \times Y) : \max_{k=1,\dots,n} N_{p_k}(f - f_0) < \delta\}$$

— базисний окіл точки $f_0$ у просторі $CC(X \times Y)$. Покажемо, що $O \cap G \neq \varnothing$. Розглянемо замкнену в $P$ множину $F = \bigcup\limits_{k=1}^{n} cr(p_k)$ і її доповнення $E = P \setminus F$. Спочатку з'ясуємо, що $\overline{E} = P$.

Нехай $X_0 = X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ і $Y_0 = Y \setminus \{y_1, \ldots, y_n\}$. Оскільки $p = (x, y) \in F$ тоді і тільки тоді, коли $x = x_k$ або $y = y_k$ для деякого $k = 1, \ldots, n$, то $p = (x, y) \in E = P \setminus F$ тоді і тільки тоді, коли $x \neq x_k$ і $y \neq y_k$ для кожного $k = 1, \ldots, n$, тобто $x \in X_0$ і $y \in Y_0$. Таким чином, $E = X_0 \times Y_0$. З того, що простори $X$ і $Y$ не мають ізольованих точок, легко вивести, що $\overline{X_0} = X$ і $\overline{Y_0} = Y$. Тоді

$$\overline{E} = \overline{X_0 \times Y_0} = \overline{X_0} \times \overline{Y_0} = X \times Y = P.$$

Оскільки $P$ — це метричний компакт, то кожна його підмножина, зокрема, множина $E$, буде цілком обмеженою. Нехай $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$. За лемою 1 існують такі скінченні $\varepsilon_0$-сітки $A$ і $B$ у множині $E$, що $A \cap B = \varnothing$ і $A \cup B \subseteq E$. За лемою 2 ці множини $A$ і $B$ будуть $\varepsilon$-сітками в $P$, адже $P = \overline{E}$. Множини $F$, $A$ і $B$ замкнені в $P$ і попарно не перетинаються. Розглянемо функцію

$$g_0(p) = \begin{cases} c_1 - 1, & p \in A, \\ c_2 + 1, & p \in B, \\ f_0(p), & p \in F. \end{cases}$$

Оскільки $f_0$ — нарізно неперервна функція, то звуження $f_0|_{cr(p_k)}$ буде неперервним для кожного $k = 1, \ldots, n$, а тоді і звуження $f_0|_F = g_0|_F$ теж будуть неперервними. Звуження $g_0|_A$ і $g_0|_B$ сталі, а тому і вони неперервні. В такому разі і функція $g_0$, що задана на замкненій підмножині $F_0 = A \sqcup B \sqcup F$ добутку $P = X \times Y$ буде неперервною. За теоремою Тітце-Урисона [10, с.116] існує неперервна функція $f : P \to \mathbb{R}$, для якої $g|_{F_0} = g_0$. Для цієї функції $g|_F = g_0|_F = f_0|_F$, отже, $g \in O$, бо $g \in CC(X \times Y)$ і $N_{p_k}(g - f_0) = 0$ для кожного $k = 1, \ldots, n$. Крім того, $g(p) = g_0(p) = c_1 - 1 < c_1$ для кожного $p \in A$ і $g(p) = g_0(p) = c_2 + 1 > c_2$ для кожного $p \in B$, а множини $A$ і $B$ – це скінченні $\varepsilon$-сітки в $P$, отже, $g \in G$. Таким чином, $g \in O \cap G$, отже, $O \cap G \neq \varnothing$, а значить, множина $G$ всюди щільна в $CC(X \times Y)$.

**4. Перший спосіб доведення неберовості простору $CC(X \times Y)$.** Нагадаємо, що топологічний простір $X$ називається *берівським* [8, с. 68], якщо в ньому кожна відкрита непорожня множина $G$ є множиною другої категорії. Легко перевірити [8, с. 68], що топологічний векторний простір $X$ буде берівськм тоді і тільки тоді, коли $X$ буде множиною другої категорії в собі, отже, неберовість такого простору означає, що він є множиною першої категорії в собі.

**Теорема 1.** *Нехай $X$ і $Y$ — метричні компакти без ізольованих точок і для кожного номера $n$ множина $G_n$ складається з усіх нарізно неперервних функцій $f : X\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$, для яких існують такі скінченні $\frac{1}{n}$-сітки $A_n$ і $B_n$ в $P = X\times Y$, що $f(p) < 0$ на $A_n$ і $f(p) > 1$ на $B_n$. Тоді множини $G_n$ відкриті і всюди щільні у просторі $CC(X\times Y)$, їх перетин $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = \varnothing$, а їх доповнення $F_n = CC(X\times Y)\setminus G_n$ замкнені і ніде не щільні в $CC(X\times Y)$ і $CC(X\times Y) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ є множиною першої категорії.*

*Доведення.* Те, що множини $G_n$ відкриті і всюди щільні в $CC(X \times Y)$, доведено в лемі 4. Залишається довести, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = \varnothing$. Нехай це не так, тобто існує така нарізно неперервна функція $f\colon X\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$, що $f \in G_n$ для кожного $n$. Тоді для кожного $n$ існують такі скінченні $\frac{1}{n}$-сітки $A_n$ і $B_n$ в $P$, що $f(p) < 0$ на $A_n$ і $f(p) > 1$ на $B_n$. Покладемо $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ і $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Нескладно перевірити, що $A$ і $B$ — це всюди щільні підмножини добутку $P$, причому $f(p) < 0$ на $A$ і $f(p) > 1$ на $B$. Звідси легко вивести, що функція $f$ скрізь розривна. Справді, нехай $p$ — довільна точка з $P$ і $U$ — довільний її окіл. Оскільки $\overline{A} = P = \overline{B}$, то існують такі точки $a \in A$ і $b \in B$, що $\{a, b\} \subseteq U$. Тоді $f(a) < 0$ і $f(b) > 1$, отже, коливання $\omega_f(U) = \sup\{|f(p') - f(p'')| : p', p'' \in U\} \geq |f(b) - f(a)| = 1$. Звідси випливає, що коливання в точці $p$

$$\omega_f(p) = \inf\{\omega_f(U) : U - \text{довільний окіл точки } p \text{ в } P\} \geq 1,$$

а в точці неперервності $\omega_f(p) = 0$, отже, $f$ розривна в точці $p$.

Але, як добре відомо (див. [9, с.391] і багато загальніших результатів з [10]), для метричних компактів $X$ і $Y$ кожна функція $g \in CC(X\times Y)$ неперервна за сукупністю змінних хоча б в одній точці з $X\times Y$, що приводить до суперечності.

Таким чином, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = \varnothing$ і теорема доведена.

## 5. Другий спосіб доведення неберовості простору $CC(X\times Y)$.

Тепер ми подамо другий спосіб доведення неберовості простору $CC(X\times Y)$, який застосовний до ширшого класу компактів

$X$ і $Y$, але не дає явного зображення простору $CC(X\times Y)$ у вигляді об'єднання послідовності ніде не щільних множин. Цей другий спосіб базується на одній властивості так званої *функції обчислення* на просторі $Z = CC(X \times Y)$ з топологією пошарово рівномірної збіжності, тобто відображення $\Phi\colon X \times Y \times Z \longrightarrow \mathbb{R}$, для якого $\Phi(x, y, z) = z(x, y)$ для довільних $x \in X$, $y \in Y$ і $z \in Z$.

**Теорема 2.** *Нехай $X$ і $Y$ — компакти без ізольованих точок, $Z = CC(X \times Y)$ і $\Phi\colon X \times Y \times Z \longrightarrow \mathbb{R}$ — функція обчислення. Тоді $\Phi$ — це нарізно неперервна і скрізь розривна функція.*

*Доведення.* Неперервність $\Phi$ відносно змінних $x$ і $y$ для фіксованого $z \in Z$ випливає з нарізної неперервності функції $z\colon X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$, а неперервність відносно змінної $z$ при фіксованих $x$ і $y$ випливає з того, що топологія пошарово рівномірної збіжності на $Z$ мажорує топологію поточкової збіжності на $Z$, адже $|z(p)| \le N_p(z)$ для кожної точки $p = (x, y) \in X \times Y$.

Нехай $T = X \times Y \times Z$ — топологічний добуток просторів $X$, $Y$ і $Z$. Покажемо, що функція $\Phi\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$ розривна у кожній точці $t_0 = (x_0, y_0, z_0) \in T$. Розглянемо довільні околи $U$ і $V$ точок $x_0$ і $y_0$ у просторах $X$ і $Y$ відповідно і базисний окіл

$$W = \{z \in Z : \max_{k=1,\dots,n} N_{p_k}(z - z_0) < \delta\}$$

точки $z_0$ у просторі $Z$, де $p_k = (x_k, y_k) \in X\times Y$ при $k = 1, \dots, n$ і $\delta > 0$. Ми покажемо, що існує така точка $t = (u, v, w) \in U \times V \times W$, що

$$|\Phi(t) - \Phi(t_0)| = 1.$$

Розглянемо замкнену множину $F = \bigcup_{k=1}^{n} cr\{p_k\}$ у добутку $X \times Y$. Оскільки компакти $X$ і $Y$ не мають ізольованих точок, то існують такі точки $u \in U$ і $v \in V$, що $u \ne x_k$ і $v \ne y_k$ для кожного $k = 1, \dots, n$. Тоді точка $q = (u, v) \in U \times V$ і $q \notin F$. Множина $E = F \cup \{q\}$ теж буде замкненою в добутку $X \times Y$, який є компактом [7, с. 217, теорема 3.2.4], а значить, нормальним простором [7, с. 199, теорема 3.1.9]. Розглянемо функцію $w_0\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, покладаючи

$$w_0(p) = \begin{cases} z_0(p), & p \in F, \\ z_0(p_0) + 1, & p = q, \end{cases}$$

де $p_0 = (x_0, y_0)$. Оскільки $w_0|_F = z_0|_F$ і функція $z_0$ нарізно неперервна, то звуження $z_0|_F$, а з ним і звуження $w_0|_F$, будуть неперервними функціями. Крім того, і звуження $w_0|_{\{q\}}$ неперервне. Але $E = F \cup \{q\}$, отже, і $w_0$ — це неперервна функція, бо множини $F$ і $\{q\}$ замкнені. За теоремою Тітце-Урисона існує неперервна функція $w\colon X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$, така, що $w|_E = w_0$. Тоді $w|_F = w_0|_F = z_0|_F$ і $w \in Z$, отже, $w \in W$. Таким чином, точка $t = (u, v, w) \in U \times V \times W$. Але $\Phi(t) = w(u, v) = w(q) = w_0(q) = z_0(p_0) + 1$, отже, $|\Phi(t) - \Phi(t_0)| = |z_0(p_0) + 1 - z_0(p_0)| = 1$. Це показує, що функція $\Phi$ розривна в точці $t_0$ як функція від трьох змінних.

Нам буде потрібний результат про сукупну неперервність нарізно неперервних функцій, який легко вивести з однієї загальної теореми [11, с. 43, теорема 6].

**Теорема 3.** *Нехай $X$ і $Y$ — компактні простори, що задовольняють першу аксіому зліченності, $Z$ — берівський простір і $f\colon X \times Y \times Z \longrightarrow \mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція. Тоді $C(f) \neq \varnothing$, якщо простори $X, Y, Z$ непорожні.*

**Теорема 4.** *Нехай $X$ і $Y$ — компакти без ізольованих точок, які задовольняють першу аксіому зліченності. Тоді простір $Z = CC(X \times Y)$ з топологією пошарової рівномірної збіжності є множиною першої категорії в собі.*

*Доведення.* Нехай, це не так, тобто $Z$ — це множина другої категорії в собі. Оскільки $Z$ — це топологічний векторний простір, то в цьому разі він буде берівським [8, с.68, твердження 3]. За теоремою 2 функція обчислення $\Phi\colon X \times Y \times Z \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x, y, z) = z(x, y)$, буде нарізно неперервною і скрізь розривною. Але за теоремою 3 вона повинна бути десь неперервною, адже наші простори в цьому випадку непорожні і задовольняють умови теореми 3. Отримана суперечність і показує, що простір $Z$ є множиною першої категорії в собі.

Відомий простір Геллі $H$ [7, с.229], [12, с.220], що складається зі зростаючих функцій $h\colon [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ і наділяється топологією поточкової збіжності — це сепарабельний неметризовний компакт з першою аксіомою зліченності. Таким чином, теорема 1 для встановлення неберовості простору $CC(X \times Y)$ має вужче поле застосовності, але в ній явно вказуються ніде не щільні множини, які в об'єднанні дають весь простір $CC(X \times Y)$.

**6. Застосування $W$-компактів.** У праці [13, с. 266] були розглянуті так звані $W$-простори і було показано, що вони ефективно можуть бути використані при дослідження сукупної неперервності нарізно неперервних функцій та їх аналогів. Якщо $X$ — це $W$-простір, який є компактом, то ми його будемо називати *$W$-компактом.* Виходячи з цих результатів, можна встановити і такий.

**Теорема 5.** *Нехай $X$ і $Y$ — це $W$-компакти, $Z$ — берівський простір і $f\colon X \times Y \times Z \longrightarrow \mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція. Тоді $C(f) \neq \varnothing$, якщо простори $X, Y, Z$ непорожні.*

З теореми 5 і теореми 2 негайно випливає

**Теорема 6.** *Нехай $X$ і $Y$ — це $W$-компакти без ізольованих точок. Тоді простір $CC(X \times Y)$ з топологією пошарово рівномірної збіжності множиною першої категорії в собі.*

Зауважимо, що компакти Еберлейна і компакти Корсона – це $W$-компакти і теореми 5 і 6 справджуються і для них.

**7. Наявність підпросторів компактів, які мають зліченнну псевдобазу.** Перейдемо до викладу третього підходу до доведення неберовості простору $S$, який використовує топологічні ігри. З допомогою нього вдалося отримати найзагальніший результат.

Елемент $a$ топологічного простору $X$ ми називатимемо його $\aleph_0$-*точкою*, якщо існує така послідовність різних точок $a_k$, яка збігається до $a$ в $X$.

Система $\mathcal{U}$ відкритих множин в $X$ називається *псевдобазою* простору $X$, якщо для довільної відкритої непорожньої множини $G$ в $X$ існує така непорожня множина $U \in \mathcal{U}$, що $U \subseteq G$.

Кажуть, що топологічний простір $X$ *має зліченну псевдобазу* , якщо існує не більш, ніж зліченна псевдобаза $\mathcal{U}$ простору $X$.

Зараз ми вивчимо компакти, які не мають $\aleph_0$-точок. Через $|M|$ ми позначатимемо потужність множини $M$.

**Лема 5.** *Нехай $X$ — компакт, який не має $\aleph_0$-точок, і $A$ — нескінченна підмножина $X$. Тоді існують такі нескінченні підмножини $A'$ і $A''$ множини $A$, що $\overline{A'} \cap \overline{A''} = \varnothing$.*

*Доведення.* Оскільки множина $A$ нескінченна, то існує така послідовність точок $a_n \in A$, що $a_n \neq a_m$ при $n \neq m$. Послідовність точок $a_n$ розбіжна в $X$, бо $X$ не має $\aleph_0$-точок. Позначимо через $L$ множину граничних точок послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Оскільки $X$ — компактний простір, то $L \neq \varnothing$ [7, с. 203]. Але послідовність $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ розбіжна, тому $|L| \geq 2$. Справді, існує точка $a \in L$. Оскільки $a_n \nrightarrow a$, то існує такий відкритий окіл $U$ точки $a$ в $X$, що множина $I = \{n : a_n \notin U\}$ нескінченна. Тоді $I = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, де $n_k < n_{k+1}$ для кожного $k$. Послідовність $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ має граничну точку $b$ у компактному просторі $X$. Оскільки множина $F = X \backslash U$ замкнена і $a_{n_k} \in F$ для кожного $k$, то і $b \in F$. Тому $a \neq b$, адже $a \in U$, а $b \notin U$. Точка $b$, будучи граничною точкою підпослідовності $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, є разом з тим і граничною точкою самої послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, отже, $b \in L$. Таким чином, ми знайшли дві різні граничні точки $a$ і $b$ послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. З регулярності компакту $X$ [7, с. 199] випливає, що існує такий окіл $U$ точки в $X$, що $\overline{U} \subseteq X \backslash \{b\}$, і такий окіл $V$ точки в $X$, що $\overline{V} \subseteq X \backslash \overline{U}$, тобто $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$. Оскільки $a$ і $b$ – це граничні точки послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $a_n \in A$, то множини $A' = A \cap U$ і $A'' = A \cap V$ нескінченні. При цьому $\overline{A'} \subseteq \overline{U}$ і $\overline{A''} \subseteq \overline{V}$, отже, $\overline{A'} \cap \overline{A''} = \varnothing$. Таким чином, $A'$ і $A''$ — шукані множини.

Покладемо $D = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \{0,1\}^n$, $D_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} \{0,1\}^k$ і $\Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Для довільного $d = (d_1, \ldots, d_n) \in D$ та $i \in \{0,1\}$ позначимо $d_{,i} = (d_1, \ldots, d_n, i)$. Якщо $\delta = (d_n)_{n=1}^{\infty} \in \Delta$ і $n \in \mathbb{N}$, то $\delta|_n = (d_1, \ldots, d_n)$, до того ж $d|_0 = \varnothing$ і $\{0,1\}^0 = \{\varnothing\}$.

**Лема 6.** *Нехай $X$ — нескінченний компакт без $\aleph_0$-точок. Тоді існує така сім'я $(A_d)_{d \in D}$ нескінченних множин $A_d$, що $A_{d,0} \cup A_{d,1} \subseteq A_d$ і $\overline{A_{d,0}} \cap \overline{A_{d,1}} = \varnothing$ для кожного $d \in D$.*

*Доведення.* Така сім'я визначається індуктивно з допомогою леми 5. Виберемо спочатку довільну нескінченну підмножину $A_{\varnothing}$ компакту $X$. Припустимо, що для деякого номера $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ множини $A_d$ вже визначені при $d \in D_n$. Тоді для фіксованого $d \in \{0,1\}^n$ застосуємо лему 5 до множини $A_d$. Ми отримаємо дві нескінченні підмножини $A_{d,0}$ і $A_{d,1}$ множини $A_d$, такі, що $\overline{A_{d,0}} \cap \overline{A_{d,1}} = \varnothing$, і тим самим визначимо множини $A_d$ для всіх $d \in \{0,1\}^{n+1}$. Таким чином, сім'я $(A_d)_{d \in D}$ визначена.

Нагадаємо, що частково впорядкована множина $K$ називається *індуктивно впорядкованою*, якщо кожна її лінійно впорядкована підмножина $L$ обмежена зверху, тобто існує такий елемент $k \in K$, що $l \leq k$ для довільного $l \in L$.

**Лема 7.** *Нехай $X$ і сім'я $(A_d)_{d \in D}$ – такі ж як у лемі 6, $F_\delta = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \overline{A_{\delta|n}}$ для довільного $\delta \in \Delta$ і $\mathcal{K} = \{K :$ $K$ замкнена підмножина $X$ і $(\forall \delta \in$*

*$\Delta)(K \cap F_\delta \neq \varnothing)\}$. Тоді $F_\delta \neq \varnothing$ для кожного $\delta \in \Delta$ і $(\mathcal{K}, \supseteq)$ – це непорожня індуктивно впорядкована множина.*

*Доведення.* З компактності простору $X$ негайно випливає [7, с. 196], що $F_\delta \neq \varnothing$ для кожного $\delta \in \Delta$, адже $(\overline{A}_{\delta|n})_{n=0}^{\infty}$ – це спадна послідовність непорожніх замкнених підмножин $X$. Тому $X \in \mathcal{K}$, отже, $\mathcal{K} \neq \varnothing$. Нехай $\mathcal{L}$ – лінійно впорядкована частина $\mathcal{K}$. Розглянемо її перетин $K = \cap\mathcal{L}$. Зрозуміло, що $L \supseteq K$ для кожного $L \in \mathcal{L}$. Покажемо, що $K \in \mathcal{K}$. Множина $K$ замкнена як перетин замкнених множин. Візьмемо $\delta \in \Delta$ і розглянемо систему $\mathcal{F} = \{L \cap F_\delta : L \in \mathcal{L}\}$. Зрозуміло, що $L \cap F_\delta \neq \varnothing$ для кожного $L \in \mathcal{L}$, адже $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$. Оскільки система $\mathcal{L}$ лінійно впорядкована, то для довільних множин $L_1, \dots, L_n$ з $\mathcal{L}$ існує така множина $L_j$, що $L_j \subseteq L_k$ для кожного $k = 1, \dots, n$. Тому

$$\bigcap_{k=1}^{n} (L_k \cap F_\delta) \supseteq L_j \cap F_\delta \neq \varnothing,$$

отже, $\mathcal{F}$ — центрована система замкнених множин в $X$. З компактності $X$ отримуємо, що $\cap\mathcal{F} \neq \varnothing$. Але

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L \cap F_\delta = (\bigcap_{L \in \mathcal{L}} L) \cap F_\delta = K \cap F_\delta.$$

Таким чином, $K \cap F_\delta \neq \varnothing$, отже, $K \in \mathcal{K}$. Це і доводить, що $(\mathcal{K}, \supseteq)$ — індуктивно впорядкована множина.

**Теорема 7.** *Нехай $X$ — нескінченний компакт без $\aleph_0$-точок. Тоді існує його нескінченний замкнений підпростір $Y$ без ізольованих точок, який має зліченну псевдобазу.*

*Доведення.* Нехай $(A_d)_{d \in D}$ — побудовна в лемі 6 діадична схема, а $(F_\delta)_{\delta \in \Delta}$ і $\mathcal{K}$ — такі ж як в лемі 7. Покладемо для кожного $n \in \mathbb{N}_0$

$$Y_n = \bigcup_{d \in \{0,1\}^n} \overline{A}_d \quad \text{і} \quad Y_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} Y_n.$$

Тоді $F_\delta = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \overline{A}_{\delta|n} \subseteq \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} Y_n = Y_\infty$ для довільного $\delta \in \Delta$. Отже, $Y_\infty \cap F_\delta = F_\delta \neq \varnothing$ для кожного $\delta \in \Delta$, а значить $Y_\infty \in \mathcal{K}$, адже множина $Y_\infty$ замкнена як перетин замкнених множин $Y_n$. Оскільки частково впорядкована множина $(\mathcal{K}, \supseteq)$ є індуктивно впорядкованою за лемою 7, то за лемою Куратовського-Цорна [14, с. 129], [15, с. 63] існує максимальний елемент $Y$ в $(\mathcal{K}, \supseteq)$, для якого $Y_\infty \supseteq Y$. Зауважимо, що $Y$, як і довільний елемент з $\mathcal{K}$, є нескінченною множиною. Максимальність $Y$ в $(\mathcal{K}, \supseteq)$ означає, що для кожного $K \in \mathcal{K}$ з умови $Y \supseteq K$ випливає, що $Y = K$.

Нехай $V_d = \overline{A}_d \cap Y$ для кожного $d \in D$. Оскільки

$$Y \subseteq Y_\infty \subseteq Y_n = \bigsqcup_{d \in \{0,1\}^n} \overline{A}_d$$

для кожного $n \in \mathbb{N}_0$, то множини $V_d$ відкрито-замкнені в підпросторі $Y$. Крім того, для довільного $d = (d_1, \ldots, d_n) \in D$ і послідовності $\delta = (d_1, \ldots, d_n, 0, \ldots, 0) \in \Delta$ будемо мати, що $\delta|n = d$, і тому

$$V_d = \overline{A}_d \cap Y = \overline{A}_{\delta|n} \cap Y \supseteq F_\delta \cap Y \neq \varnothing,$$

бо $Y \in \mathcal{K}$.

Покажемо, що система $\mathcal{V} = \{V_d : d \in D\}$ — це псевдобази в $Y$. Нехай $V$ — непорожня відкрита множина у просторі $Y$. Тоді її доповнення $K = Y \backslash V$ — це замкнена в $Y$, а значить, і в просторі $X$. Оскільки $Y$ — це мінімальний елемент в $(\mathcal{K}, \supseteq)$, то $K \notin \mathcal{K}$. Тому існує таке $\delta \in \Delta$, що $K \cap F_\delta = \varnothing$. Тоді

$$(Y \backslash V) \cap (F_\delta \cap Y) = K \cap (F_\delta \cap Y) = (K \cap F_\delta) \cap Y = \varnothing,$$

тому $F_\delta \cap Y \subseteq V$. Але

$$F_\delta \cap Y = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{A}_{\delta|n} \cap Y = \bigcap_{n=0}^{\infty} V_{\delta|n},$$

отже, $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} V_{\delta|n} \subseteq V$. З компактності простору $Y$, замкненості множин $V_{\delta|n}$ і відкритості $V$ в $Y$ негайно випливає, що $V_{\delta|n} \subseteq V$ для деякого $n \in \mathbb{N}_0$. Таким чином, $V_d \subseteq V$ для $d = \delta|n$, що і треба було довести.

Зрозуміло, що псевдобаза $\mathcal{V}$ простору $Y$ зліченна, адже такою є множина $D = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \{0,1\}^n$.

Залишилося довести, що $Y$ не має ізольованих точок. Нехай це не так і $y_0$ – деяка ізольована точка в $Y$. Тоді одноточкова множина

$V = \{y_0\}$ буде відкритою в $Y$. Оскільки $\mathcal{V}$ — це псевдобаза $Y$, то існує таке $d \in D$, що $V_d \subseteq V$. Тоді

$$V_{d,0} \sqcup V_{d,1} = (\overline{A}_{d,0} \sqcup \overline{A}_{d,1}) \cap Y \subseteq \overline{A}_d \cap Y = V_d \subseteq \{y_0\}.$$

Але $V_{d,0} \neq \varnothing$ і $V_{d,1} \neq \varnothing$, отже, таке включення неможливе.

**8. Побудова псевдозбіжних послідовностей.** Нехай $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність підмножин $A_n$ топологічного простору $X$ і $a \in X$. Будемо говорити, що послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *псевдозбігається до точки* $a$ (позначається: $A_n \rightsquigarrow a$), якщо для кожного околу $U$ точки $a$ в $X$ існує такий номер $N$, що $A_n \cap U \neq \varnothing$, як тільки $n \geq N$. Послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ називається *псевдозбіжною* в $X$, якщо існує така точка $a \in X$, що $A_n \rightsquigarrow a$.

**Теорема 8.** *Нехай $X$ — нескінченний компакт. Тоді в $X$ існує диз'юнктна псевдозбіжна послідовність непорожніх скінченних множин $A_n$.*

*Доведення.* Спочатку припустимо, що $X$ має $\aleph_0$-точку $a$. Тоді існує послідовність $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, що складається з різних точок з $X$, яка збігається до $a$ в $X$. Зрозуміло, що тоді послідовність одноточкових множин $A_n = \{a_n\}$ і буде шуканою.

Нехай тепер $X$ не має $\aleph_0$-точок. Тоді за теоремою 7 існує нескінченний замкнений підпростір $Y$ простору $X$ без ізольованих точок, який має зліченну псевдобазу $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, що складається з непорожніх множин. Оскільки $Y$ не має ізольованих точок і є $T_1$-простором, адже $X$ – компакт, то скінченні непорожні множини $E$ в $Y$ не можуть бути відкритими, отже, всі множини $V_n$ нескінченні, адже вони відкриті в $Y$.

Перейдемо до побудови множин $A_n$. Виберемо деяку точку $a_{1,1} \in V_1$ і покладемо $A_1 = \{a_{1,1}\}$. Далі виберемо дві різні точки $a_{2,1}$ і $a_{2,2}$, такі, що $a_{2,1} \in V_1 \setminus A_1$ і $a_{2,2} \in V_2 \setminus A_1$, і покладемо $A_2 = \{a_{2,1}, a_{2,2}\}$. Припустимо, що для деякого номера $n$ уже побудовані множини $A_m = \{a_{m,k} : k = 1, \ldots, m\}$ при $m < n$, такі, що точки $a_{m,k}$ різні і $a_{m,n} \in V_k \setminus \bigcup\limits_{j<m} A_j$ при $m < n$ і $k = 1, \ldots, m$. Оскільки множина $\bigcup\limits_{j<n} A_j$ скінченна, то з нескінченності множин $V_1, \ldots, V_n$ випливає, що існують такі різні точки $a_{n,1} \ldots, a_{n,n}$, що $a_{n,k} \in V_k \setminus \bigcup\limits_{j<n} A_j$ при $k = 1, \ldots, n$. Покладаючи $A_n = \{a_{n,1} \ldots, a_{n,n}\}$, ми продовжимо нашу побудову ще на один крок.

Таким чином, ми побудували таку диз'юнктну послідовність скінченних множин $A_n$ у просторі $Y$, що $V_k \cap A_n \neq \varnothing$ при $k \leq n$, адже $a_{n,k} \in V_k \cap A_n$.

Візьмемо довільну точку $a \in Y$ і покажемо, що $A_n \rightsquigarrow a$ в $Y$. Нехай $U$ – окіл точки $a$ в $Y$. Оскільки $\mathcal{V}$ – це псевдобаза в $Y$, то існує такий номер $N$, що $V_N \subseteq U$. Але $A_n \cap V_N \neq \varnothing$ при $n \geq N$, тому $A_n \cap U \neq \varnothing$, як тільки $n \geq N$. Отже, $A_n \rightsquigarrow a$ і послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ є шуканою.

**9. Гра Шоке.** Нагадаємо, що *гра Шоке* $Ch(X)$ на топологічному просторі $X$ — це гра двох гравців $\alpha$ і $\beta$, які вибирають по черзі відкриті непорожні множини відповідно $U_n$ і $V_n$, так, що $V_{n+1} \subseteq U_n \subseteq V_n$ для кожного $n$, причому першим починає гравець $\beta$. Якщо $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n \neq \varnothing$, то виграє гравець $\alpha$, якщо ж це не так, то виграє $\beta$.

Позначимо символом $\mathcal{U}_X$ систему всіх відкритих непорожніх підмножин простору $X$. Відображення $\sigma\colon \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_X^n \longrightarrow \mathcal{U}_X$ називається *виграшною стратегією для гравця $\alpha$ у грі Шоке*, якщо для довільної партії $((U_n, V_n) : n \in \mathbb{N})$ у грі Шоке, такої, що $U_n = \sigma(V_1, \dots, V_n)$ для кожного $n$, перетини $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n \neq \varnothing$, тобто, коли $\alpha$ грає згідно з стратегією $\sigma$, то він обов'язково виграє. Простір $X$ називається *$\alpha$-сприятливим*, якщо гравець $\alpha$ має виграшну стратегію у грі Шоке $Ch(X)$.

Відображення $\tau\colon \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_X^n \longrightarrow \mathcal{U}_X$ називається *виграшною стратегією для гравця $\beta$ у грі Шоке*, якщо для довільної партії $((U_n, V_n) : n \in \mathbb{N})$ у грі Шоке: $V_1 = \tau(\varnothing)$, $V_n = \tau(U_1, \dots, U_{n-1})$ при $n > 1$, виконуються рівність $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n = \varnothing$, тобто гравець $\beta$ виграє, коли він грає згідно з стратегією $\tau$. Простір $X$ називається *$\beta$-сприятливим*, якщо гравець $\beta$ має виграшну стратегію у грі Шоке. Ж. Сан-Ремо [16] встановив, що простір $X$ буде берівським тоді і тільки тоді, коли він $\beta$-несприятливий, тобто гравець $\beta$ не має виграшної стратегії у грі Шоке. Іншими словами $\beta$-сприятливість простору $X$ рівносильна його неберовості, точніше: в [16] було доведено, що коли $\tau\colon \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_X^n \longrightarrow \mathcal{U}_X$ — це виграшна стратегія для гравця $\beta$ у грі Шоке на просторі $X$, то відкрита непорожня множина $V_1 = \tau(\varnothing)$ є першої категорії в $X$.

**10. Неберовість простору нарізно неперервних функцій на добутку компаку і $\alpha$-сприятливого простору.** Нехай $X$ і $Y$ — довільні топологічні простори. Введемо на просторі $CC(X \times Y)$ топологічну структуру пошарової рівномірної збіжності, в якій базу околів точки $f_0 \in CC(X \times Y)$ утворюють множини $O_{S,T,\varepsilon}(f_0) = \{f \in CC(X \times Y) : (\forall p \in cr(S \times T))(|f(p) - f_0(p)| < \varepsilon)\}$, де $cr(S \times T) = (S \times Y) \cup (X \times T)$, $S$ і $T$ — довільні скінченні підмножини просторів $X$ і $Y$ відповідно і $\varepsilon > 0$. Простір $CC(X \times Y)$ з топологією пошарово рівномірної збіжності позначимо через $SC(X \times Y)$. Якщо простори $X$ і $Y$ псевдокомпактні, то $SC(X \times Y)$ – це локально опуклий простір, топологічна структура якого породжується сукупністю переднорм

$$p_{S,T}(f) = \sup_{p \in cr(S \times T)} |f(p)|,$$

де $S \subseteq X$ і $T \subseteq Y$ — скінченні множини. В загальному випадку операція множення на скаляр може виявитися розривною і $SC(X \times Y)$ не буде топологічним векторним простором.

**Теорема 9.** *Нехай $X$ — нескінченний компакт, $Y$ — $\alpha$-сприятливий цілком регулярний простір без ізольованих точок. Тоді топологічний простір $Z = SC(X \times Y)$ є множиною першої категорії в собі.*

*Доведення.* На основі теореми Сан-Ремо [16] досить побудувати виграшну для гравця $\beta$ стратегію $\tau\colon \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_Z^n \longrightarrow \mathcal{U}_Z$ у грі Шоке $Ch(Z)$, таку, що $\tau(\varnothing) = Z$. Ми будемо вважати, що $Y \neq \varnothing$, оскільки при $Y = \varnothing$ твердження теореми тривіальне.

Спочатку, використавши теорему 8, побудуємо таку диз'юнктну послідовність непорожніх скінченних множин $A_n$ в $X$, що $A_n \rightsquigarrow a$ для деякої точки $a \in X$. Далі на основі $\alpha$-сприятливості простору $Y$ виберемо деяку виграшну для гравця $\alpha$ стратегію $\sigma\colon \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_Y^n \longrightarrow \mathcal{U}_Y$ у грі $Ch(Y)$.

Приступимо до побудови стратегії $\tau$. В процесі цієї побудови виникатимуть дві партії $(V_n, W_n)$ у грі $Ch(Y)$ і $(G_n, H_n)$ у грі $Ch(Z)$, причому у першій партії $\alpha$ грає за стратегією $\sigma$, тобто $V_n = \sigma(W_1, \dots, W_n)$ для кожного $n$, а ходи другої партії визначатимуть стратегію $\tau$ гравця

$\beta$, тобто $\tau(\varnothing) = H_1$ і $\tau(G_1, \dots, G_{n-1}) = H_n$ для кожного $n > 1$. При цьому ходи $W_1, \dots, W_n$ залежатимуть від ходів $G_1, \dots, G_n$.

Отож нехай $\tau(\varnothing) = Z = H_1$. Для того, щоб визначити $H_2$, розглянемо відповідь $G_1$ гравця $\alpha$ на хід $H_1$ гравця $\beta$. Оскільки $G_1 \neq \varnothing$, то можна вибрати $f_1 \in G_1$. Але множина $G_1$ відкрита в $SC(X \times Y)$, тому існують такі скінченні множини $S_1$ в $X$ і $T_1$ в $Y$ і число $\varepsilon_1 > 0$, що $O_1 = O_{S_1,T_1,\varepsilon_1}(f_1) \subseteq G_1$. Оскільки множина $S_1$ скінченна, а послідовність множин $A_n$ диз'юнктна, то існує такий номер $k_1 > 1$, що $A_n \cap S_1 = \varnothing$ при $n \geq k_1$. Покладемо $m_1 = k_1 + 1$. Розглянемо хрест $F_1 = cr(S_1 \times T_1)$ у добутку $X \times Y$, який є його замкненою підмножиною, і деяку точку $y_1 \in Y \backslash T_1$. Така точка існує, бо $Y$ — це непорожній гаусдорфовий простір без ізольованих точок. Оскільки добуток $X \times Y$ гаусдорфовий, то кожну точку $p$ з множини $P_1 = (A_{k_1} \cup A_{m_1}) \times \{y_1\}$ можна оточити таким околом $U_p$, що сім'я $(U_p)_{p \in P_1}$ диз'юнктна і $U_p \cap F_1 = \varnothing$ для довільного $p \in P_1$. Це можна зробити на основі того, що $(A_{k_1} \cup A_{m_1}) \cap S_1 = \varnothing$ і $y_1 \notin T_1$, отже, $P_1 \cap F_1 = \varnothing$. Далі, оскільки $X \times Y$ – це цілком регулярний простір як добуток таких просторів, то для кожної точки $p \in P_1$ існує неперервна функція $\varphi_p : X \times Y \to [0, 1]$, така, що $\varphi_p(p) = 1$ і $\varphi_p(q) = 0$, якщо $q \notin U_p$. Покладемо $\lambda_p = -f_1(p)$, якщо $p \in A_{n_1} \times \{y_1\}$, і $\lambda_p = 1 - f_1(p)$, якщо $p \in A_{m_1} \times \{y_1\}$, і визначимо функцію $g_1 = f_1 + \sum\limits_{p \in P_1} \lambda_p \varphi_p$. Оскільки $g_1|_{F_1} = f_1|_{F_1}$, адже $(\bigcup\limits_{p \in P_1} U_p) \cap F_1 = \varnothing$ за побудовою, а тому $\varphi_p(q) = 0$ на $F_1$, то $g_1 \in O_1$. Крім того, якщо $p \in A_{n_1} \cup \{y_1\}$, то $\varphi_p(p) = 1$ і $\varphi_p(q) = 0$ при $q \in P_1 \backslash \{p\}$, тому $g_1(p) = f_1(p) + \lambda_p \varphi_p(p) = f_1(p) - f_1(p) = 0$, а коли $p \in A_{m_1} \cup \{y_1\}$, то $g_1(p) = f_1(p) + \lambda_p \varphi_p(p) = f_1(p) + 1 - f_1(p) = 1$. На основі нарізної неперервності функції $g_1$ знайдемо такий відкритий окіл $W_1$ точки $y_1$ у просторі $Y$, що $g_1(x, y) < \frac{1}{8}$ на $A_{k_1} \times W_1$ і $g_1(x, y) > \frac{7}{8}$ на $A_{m_1} \times W_1$.

Далі покладемо

$$V_1 = \sigma(W_1) \text{ і } H_2 = O_{A_{k_1} \cup A_{m_1}, \varnothing, \frac{1}{8}}(g_1) \cap O_1.$$

Тоді для довільних $f \in H_2$ та $y \in V_1$ будемо мати: $f(x, y) = f(x, y) - g_1(x, y) + g_1(x, y) < \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ при $x \in A_{k_1}$ і $f(x, y) = f(x, y) - g_1(x, y) + g_1(x, y) > -\frac{1}{8} + \frac{7}{8} = \frac{3}{4}$ при $x \in A_{m_1}$. Тепер припустимо, що вже зроблені ходи $H_1, G_1, \dots, H_n, G_n$ у грі $Ch(Z)$ і відповідні ходи $W_1, V_1, \dots, W_{n-1}, V_{n-1}$ у грі $Ch(Y)$. Так само як для множини $G_1$ ми можемо для множини $G_n$ визначити такі номери $k_n, m_n > n$, відкриті непорожні множини

$W_n \subseteq V_{n-1}$, $H_{n+1} \subseteq G_n$ і $V_n = \sigma(W_1, \ldots, W_n)$, що для довільних $f \in H_{n+1}$ і $y \in V_n$ виконуються нерівності:

$$\begin{aligned} f(x,y) &< \frac{1}{4} \text{ при } x \in A_{k_n} \\ f(x,y) &> \frac{3}{4} \text{ при } x \in A_{m_n}. \end{aligned} \qquad (\star)$$

Таким чином, стратегія $\tau$ визначена.

Доведемо, що $\tau$ — це виграшна стратегія для гравця $\beta$ у грі $Ch(Z)$. Нехай це не так і $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_n \neq \varnothing$. Виберемо тоді деяку функцію $f \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_n$. Оскільки у відповідній партії $(V_n, W_n)$ у грі $Ch(Y)$ гравець $\alpha$ грав за своєю виграшною стратегією $\sigma$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n \neq \varnothing$, отже, існує точка $b \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$. Тоді на основі $(\star)$ для кожного $n$, маємо $f_b(x) < \frac{1}{4}$ на $A_{k_n}$ і $f_b(x)) > \frac{3}{4}$ на $A_{m_n}$. Але $f$ — нарізно неперервна функція, тому функція $f_b$ неперервна, зокрема, вона буде неперервною в точці $a$, до якої псевдозбігається послідовність $A_n$. Візьмемо такий окіл $U$ точки $a$ в $X$, що $|f_b(x) - f_b(a)| < \frac{1}{4}$, як тільки $x \in U$. Оскільки $A_n \rightsquigarrow a$ і $k_n, m_n \to \infty$, то існує такий номер $n$, для якого $A_{k_n} \cap U \neq \varnothing$ і $A_{m_n} \cap U \neq \varnothing$. Візьмемо $x' \in A_{k_n} \cap U$ і $x'' \in A_{m_n} \cap U$. Тоді $f_b(x') < \frac{1}{4}$, $f_b(x'') > \frac{3}{4}$, $|f_b(x') - f_b(a)| < \frac{1}{4}$ і $|f_b(x'') - f_b(a)| < \frac{1}{4}$. Тому $\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} < f_b(x'') - f_b(x') = f_b(x'') - f_b(a) + f_b(a) - f_b(x') < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, що дає нам абсурдну нерівність $\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$.

Отже, стратегія $\tau$ виграшна для $\beta$, а тому за теоремою Сан-Ремо простір $Z = H_1 = \tau(\varnothing)$ є множиною першої категорії в собі.

# Література


[1] *Maslyuchenko V., Voloshyn H.* Closure of the set of polynomials in the space of separately continuous functions // Int. conf. ded. to the $120^{th}$ anniversary of S.Banach. Abstracts of Reports. — Lviv, 17 – 21 September, 2012. — P. 97.

[2] *Волошин Г.А., Маслюченко В.К.* Топологізація простору нарізно неперервних функцій // Карп. матем. публ. — 2013. — **5**, №2. — С. 199 – 207.

[3] *Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В.* Про берівську категорію простору нарізно неперервних функцій // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". — Тези доповідей. Ворохта, 24 лютого — 2 березня 2014 року. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В.Стефаника, 2014. — С. 46 – 48.

[4] *van Douwen E.* The integers and topology // in: Handbook of Set-Therutic Topology (K.Kunen, J.E.Vaughan, eds). — North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 111 – 167.

[5] *Banakh T., Mykhaylyk V., Zdomskyy L.* On meager fuction spaces, network character and meager convergence in topological spaces // Comment. Math. Univ. Carolin. — 2011. — **52**, №2. — pp. 273 – 281.

[6] *Маслюченко В.К.* Лекції з функціонального аналізу. Ч.1. Метричні і нормовані простори. — Чернівці: ЧНУ Рута, 2010. — 184 с.

[7] *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.

[8] *Маслюченко В.К.* Перші типи топологічних векторних просторів. — Чернівці: Рута, 2002. — 72 с.

[9] *Hahn H.* Theorie der reellen Funktionen.1.Band. — Berlin: Verlag von Julius Springer, 1921. – VIII+600S.

[10] *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете: дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01. — Чернівці, 1999. – 345 с.

[11] *Маслюченко В.К.* Простори Гана і задача Діні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1998. — **41**, №4. — С. 39 – 41.

[12] Келлі Дж. Общая топология. — М.: Наука, 1981. — 432с.

[13] *Маслюченко О. В.* Побудова $w$-первісних та різні аналоги компактних операторів: дис. ... докт. фіз. - мат. наук: 01.01.01. — Чернівці, 2012. — 300 с.

[14] *Маслюченко В.К.* Елементи теорії множин. — Чернівці: Рута, 2002. — 132 с.

[15] *Маслюченко В.К.* Лекції з функціонального аналізу. Ч.2. Лінійні оператори і функціонали. — Чернівці: ЧНУ Рута, 2010. — 192 с.

[16] *Saint-Raymond J.* Jeux topologiques et espaces de Namioka // Proc. Amer. Math. Soc. — 1983. — **87**, No 3. — pp. 409 – 504.