Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 184–191

УДК 517.5

О. В. МАГДА

(Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, Київ)

olena.magda@yahoo.com

Симетрійні властивості одного класу рівнянь гіперболічного типу

We solve exhaustively the group classification problem for (1+1)-dimensional equations of hyperbolic type with right-hand side that depends on u_x linearly.

Повністю розв'язано задачу групової класифікації (1+1)-вимірних рівнянь гіперболічного типу, права частина яких лінійно залежить від u_x.

Задача групової класифікації є однією із центральних проблем сучасного симетрійного аналізу диференціальних рівнянь (див., наприклад, [1–4]). Важливим класом рівнянь з частинними похідними є рівняння гіперболічного типу, які займають чільне місце серед рівнянь математичної фізики. До них, зокрема, приводять задачі (наближеного) опису процесів нелінійних коливань різноманітної природи. Проблема групової класифікації деяких $(1+1)$-вимірних нелінійних хвильових рівнянь розглядалась багатьма авторами [5–10]. У даній статті розв'язується задача групової класифікації рівнянь вигляду

$$u_{tx} = g(t,x)u_x + f(t,x,u), \quad g \neq 0, \;\; f_{uu} \neq 0. \tag{1}$$

Тут і нижче $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots$, f та g – довільні гладкі функції своїх аргументів. Для групової класифікації рівнянь виду (1) використовується підхід, який базується на синтезі інфінітезимального методу Лі, перетворень еквівалентності та класифікації абстрактних скінченновимірних дійсних алгебр Лі. Стосовно класу рівнянь (1) алгоритм методу групової класифікації передбачає виконання наступних кроків.

I. Із використанням методу Лі знаходимо систему визначальних рівнянь для коефіцієнтів інфінітезимального оператора, що відповідає групі симетрії рівняння (1). Інтегруючи ті з визначальних рівнянь, які не включають довільні функції f та g, одержуємо найбільш загальний вигляд інфінітезимального оператора, що допускається рівняннями вигляду (1). Окрім цього, прямими обчисленнями будуємо групу еквівалентності $\mathcal{E}$ досліджуваного рівняння.

II. Другий крок передбачає побудову реалізацій алгебр Лі A_n розмірності $n \leq 3$ в класі, отриманих на першому кроці інфінітезимальних операторів, з точністю до еквівалентності, яка визначається перетвореннями із групи $\mathcal{E}$. При цьому, перш ніж здійснювати перехід від реалізацій алгебр Лі нижчої розмірності до реалізацій алгебр Лі вищої розмірності, потрібно перевірити кожну отриману реалізацію на предмет того, чи може вона бути алгеброю інваріантності досліджуваного рівняння. Отриманим реалізаціям алгебр Лі із зростанням їх розмірності відповідатиме все більш визначений вигляд функцій f та g.

III. Третій крок передбачає завершення групової класифікації. Тут знаходимо всі нееквівалентні рівняння досліджуваного вигляду та відповідні їм максимальні алгебри інваріантності. Для цього використовуємо як традиційні методи (якщо довільні елементи в досліджуваному рівнянні є функціями одного аргументу), так і подальше розширення вже відомих реалізацій алгебр Лі до реалізацій алгебр Лі рівняння (1) наступної розмірності.

Розглянемо деякі попередні результати.

Твердження. *Група ліївської інваріантності рівняння (1) генерується інфінітезимальним оператором*

$$Q = \tau(t)\partial_t + \xi(x)\partial_x + [h(t)u + r(t,x)]\partial_u. \tag{2}$$

Функції τ, ξ, h, r, f, g задовольняють такі рівності:

$$\begin{aligned} &r_{tx} + f[h - \tau_t - \xi_x] = gr_x + \tau f_t + \xi f_x + [hu + r]f_u, \\ &h_t = \tau_t g + \tau g_t + \xi g_x, \end{aligned} \tag{3}$$

де τ, ξ, h та r — деякі гладкі функції, визначені у відкритій області Ω простору $V = \mathbb{R}^2$ незалежних змінних t та x.

Твердження. *Групу еквівалентності $\mathcal{E}$ рівняння (1) складають такі перетворення простору $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$:*

$$\begin{aligned} &\bar{t} = T(t),\ \bar{x} = X(x),\ v = U(t)u + Y(t,x), \quad T_t X_x U \neq 0; \qquad (4)\\ &\bar{t} = T(x),\ \bar{x} = X(t),\ v = \Psi(x)\Phi(t,x)u + Y(t,x), \quad T_x X_t \Psi \neq 0,\\ &\Phi(t,x) = \exp\left(- \int g(t,x)\mathrm{d}t \right),\ g_x \neq 0, \end{aligned}$$

де функції T, X, U, Y, Ψ є довільними гладкими функціями своїх аргументів.

Безпосередньою перевіркою неважко переконатися, що у випадку довільних значень функцій g та f із (3) випливає, що $\tau = h = \xi = r = 0$, тобто, в загальному випадку оператор (2) є нульовим оператором, а тому основна група інваріантності рівняння (1) є тривіальною. Розгляд розпочинаємо з опису рівнянь вигляду (1), які мають найнижчі симетрійні властивості.

Лема. *З точністю до перетворень (4) існують лише п'ять не еквівалентних операторів (2), які можуть бути вибраними у вигляді:*

$$\begin{aligned} Q &= t\partial_t + x\partial_x; \quad Q = \partial_t; \quad Q = \partial_x + tu\partial_u;\\ Q &= \partial_x + \epsilon u\partial_u,\ \epsilon = 0,1;\ Q = tu\partial_u, \qquad (5)\\ Q &= u\partial_u, \quad Q = r(t,x)\partial_u,\ r \neq 0. \end{aligned}$$

Доведення. Перша група перетворень (4) зводить оператор Q (2) до

$$\tilde{Q} = \tau T'\partial_{\bar{t}} + \xi X'\partial_{\bar{x}} + [(\tau U' + Uh)u + \tau Y_t + \xi Y_x + Ur]\partial_v. \qquad (6)$$

Якщо $\sigma \cdot \xi \neq 0$, то, поклавши в (4) функції T, X та U рівними ненульовим розв'язкам рівнянь

$$\tau T' = T, \quad \xi X' = X, \quad \tau U' + hU = 0,$$

а функцію Y рівною розв'язкові рівняння

$$\tau Y_t + \xi Y_x + Ur = 0,$$

бачимо, що у цьому випадку оператор $\tilde{Q}$ (6) набуває такого вигляду:

$$\tilde{Q} = \bar{t}\partial_{\bar{t}} + \bar{x}\partial_{\bar{x}}.$$

Якщо $\tau \neq 0$, а $\xi = 0$, то, взявши в якості функцій T, U, Y розв'язки рівнянь

$$\tau T' = 1,\ \tau U' + hU = 0\ (U \neq 0),\ \tau Y_t + Ur = 0,$$

зводимо оператор (2) до оператора $\tilde{Q} = \partial_{\bar{t}}$. Якщо $\tau = 0$, $\xi \neq 0$, то у випадку $h' \neq 0$ аналогічно приходимо до оператора $\tilde{Q} = \partial_{\bar{x}} + \bar{t}v\partial_v$, якщо ж $h' = 0$, — то до оператора $\tilde{Q} = \partial_{\bar{x}} + \epsilon v\partial_v$, де $\epsilon = 0$ або $\epsilon = 1$.

Нарешті, якщо $\tau = \xi = 0$, то, як неважко переконатися, мають місце такі випадки: $\tilde{Q} = \bar{t}v\partial_v$, $\tilde{Q} = v\partial_v$, $\tilde{Q} = r(\bar{t}, \bar{x})\partial_v$. Повернувшись до початкових позначень змінних, отримуємо перелік операторів із формулювання леми.

Лему доведено.

Теорема 1. *З точністю до перетворень з групи еквівалентності існують три нелінійні рівняння вигляду* (1)*, які допускають однопараметричні групи інваріантності. Відповідні одновимірні алгебри Лі інфінітезимальних операторів, які генерують ці групи, а також функції f та g у відповідних рівняннях, наведені нижче:*

$$\begin{aligned} A_1^1 &= \langle t\partial_t + x\partial_x\rangle : g = t^{-1}\tilde{g}(\omega),\ f = t^{-2}f(u,\omega),\quad \omega = tx^{-1},\\ &\quad\ \tilde{g}_\omega \neq 0,\quad f_{uu} \neq 0;\\ A_1^2 &= \langle\partial_t\rangle : g = \tilde{g}(x),\ f = \tilde{f}(x,u),\ \tilde{g}' \neq 0,\ \tilde{f}_{uu} \neq 0;\\ A_1^3 &= \langle\partial_x + tu\partial_u\rangle : g = x + \tilde{g}(t), f = e^{tx}\tilde{f}(t,\omega),\ \omega = e^{-tx}u,\ \tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0. \end{aligned}$$

Доведення. Якщо рівняння (1) допускає однопараметричну групу перетворень, то ця група генерується інфінітезимальним оператором вигляду (2). Згідно з результатами леми існують перетворення (4) з групи $\mathcal{E}$ рівняння (1), які зводять цей оператор до одного з семи операторів (5). Залишається для кожного з цих операторів розв'язати визначальну систему (3). Для перших трьох операторів (5) приходимо до значень функцій, які наведені у формулюванні теореми. Для оператора $\partial_x + \epsilon u\partial_u$, $\epsilon = 0, 1$, друге з рівнянь (3) набуває вигляду $g_x = 0$, що суперечить умовам, які накладені на функцію g. Для оператора $tu\partial_u$ друге рівняння (3) набуває вигляду хибної рівності $1 = 0$.

Нарешті, для двох останніх операторів (5) відповідні функції f є лінійними функціями відносно змінної u.

Безпосереднє використання стандартного алгоритму Лі–Овсяннікова показало, що для отриманих рівнянь, у випадку довільних значень функцій $\tilde{f}$ та $\tilde{g}$, відповідні одновимірні алгебри операторів симетрії є максимальними алгебрами інваріантності.

Теорему доведено.

Добре відомо (див. [11]), що з точністю до ізоморфізму існують дві дійсні розв'язні двовимірні алгебри Лі $A_{2.i} = \langle e_1, e_2 \rangle$, $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} A_{2.1}: &\quad [e_1,\ e_2] = 0; \\ A_{2.2}: &\quad [e_1,\ e_2] = e_2. \end{aligned}$$

Класифікація рівнянь (1), інваріантних відносно двовимірних алгебр Лі.

Теорема 2. *З точністю до перетворень з групи еквівалентності, існують три нелінійні рівняння вигляду (1), інваріантних відносно двовимірних алгебр Лі, які включають алгебру $A_{2.2}$ як підалгебру. Відповідні реалізації інфінітезимальних операторів та функцій f і g в рівняннях (1) мають вигляд:*

$$\begin{aligned} A^1_{2.2} &= \langle t\partial_t + x\partial_x, t^2\partial_t + x^2\partial_x + mut\partial_u \rangle \ (m \in \mathbb{R}): \\ &\quad g = [mt + (k-m)x]t^{-1}(t-x)^{-1},\ k \neq 0, \\ &\quad f = |t-x|^{m-2}|x|^{-m}\tilde{f}(\omega), \\ &\quad \omega = u|t-x|^{-m}|x|^m, \tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0; \\ A^2_{2.2} &= \langle t\partial_t + x\partial_x, t^2\partial_t + mtu\partial_u \rangle \ (m \in \mathbb{R}): \\ &\quad g = t^{-2}[kx + mt],\ k \neq 0,\ f = |t|^{m-2}|x|^{-m}\tilde{f}(\omega), \\ &\quad \omega = |t|^{-m}|x|^m u,\ \tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0; \\ A^3_{2.2} &= \langle t\partial_t + x\partial_x, x^2\partial_x + tu\partial_u \rangle: \\ &\quad g = (tx)^{-1}(mx - t)\ (m \in \mathbb{R}),\ f = x^{-2}e^{-tx^{-1}}\tilde{f}(\omega), \\ &\quad \omega = ue^{tx^{-1}},\ \tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0. \end{aligned}$$

Для доведення теореми достатньо провести розширення реалізацій A^i_3 $(i = 1, 2, 3)$ до реалізацій алгебр $A_{2.1}, A_{2.2}$, доповнивши їх ще одним оператором вигляду (2). Відзначимо, що наведені у формулюванні теореми 2 реалізації алгебри $A_{2.2}$ є максимальними алгебрами інваріантності відповідних рівнянь.

Оскільки усі рівняння, які отримані в теоремі 2, містять довільні функції одного аргументу, для їх подальшої групової класифікації можна скористатися методом Овсяннікова.

Зупинимося детально на випадку $A^1_{2.2}$–інваріантного рівняння.

Друге визначальне рівняння (3) набуває вигляду

$$\begin{aligned}(t-x)^2 h_t &= t^{-1}\tau_t[m(t-x)^2+kx(t-x)]+\\ &\quad \tau[-t^{-2}m(t-x)^2-2kt^{-1}x+kt^{-2}x^2]+k\xi.\end{aligned} \tag{7}$$

Продиференціювавши обидві частини рівності (7) двічі за змінною x, приходимо до рівності

$$h_t=(m-k)(t^{-1}\tau_t-t^{-2}\tau)+k\xi'',$$

звідки випливає, що $\xi'''=0$, а тому

$$\begin{aligned}\xi &= \lambda_1x^2+\lambda_2x+\lambda_3, \quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R},\\ h &= (m-k)t^{-1}\tau+\lambda_1kt+\lambda_4, \quad \lambda_4\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Врахувавши отримані значення ξ і h, з (7) маємо, що $\tau=\lambda_1t^2+\lambda_2t+\lambda_3$. Отже, з рівняння (7) випливає, що в інфінітезимальному операторі (2), який генерує групу симетрії $A^1_{2.2}$–інваріантного рівняння

$$\begin{aligned}\tau &= \lambda_1t^2+\lambda_2t+\lambda_3,\\ \xi &= \lambda_1x^2+\lambda_2x+\lambda_3,\\ h &= m\lambda_1t+(m-k)\lambda_3t^{-1}+(m-k)\lambda_2+\lambda_4, \quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Внаслідок цього, перше визначальне рівняння (3) для $A^1_{2.2}$–інваріантного рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned}&\{x^{-1}(t-x)^{-1}[((m-k)\lambda_2+\lambda_4)(tx-x^2)-(m-k)\lambda_3t^{-1}x^2-\\ &-k\lambda_3x+m\lambda_3t]\omega+r|t-x|^{-m}|x|^m\}\tilde{f}_\omega-\\ &-x^{-1}(t-x)^{-1}[((m-k)\lambda_2+\lambda_4)(tx-x^2)-\\ &-(m-k)\lambda_3t^{-1}x^2-k\lambda_3x+m\lambda_3t]\tilde{f}=\\ &=|t-x|^{-m+2}|x|^m[r_{tx}-t^{-1}(m+kx(t-x)^{-1}r_x].\end{aligned} \tag{8}$$

Враховуючи рівність (8), отримуємо, що у випадку довільних значень функцій $\tilde{f}$ максимальна алгебра інваріантності досліджуваного рівняння збігається з реалізацією $A^1_{2.2}$. Також, з (8) випливає, що розширення основної групи інваріантності можливе, коли функція $\tilde{f}$ задовольняє рівняння вигляду

$$(a\omega+b)\tilde{f}_\omega-a\tilde{f}=c, \tag{9}$$

де $a, b, c \in \mathbb{R}, |a| + |b| \neq 0$. Але, як неважко переконатися, із (9) випливає, що

$$(a\omega + b)\tilde{f}_{\omega\omega} = 0,$$

тобто $f_{\omega\omega} = 0$, а це суперечить накладеним на функцію f в рівнянні (1) умовам. Отже, в рамках сформульованої задачі $A^1_{2.2}$–інваріантне рівняння не допускає розширення основної групи інваріантності. До аналогічного результату приводить розгляд і $A^2_{2.2}$– та $A^2_{2.3}$–інваріантних рівнянь. Звідси, зокрема, випливає, що не існують рівняння вигляду (1), максимальні алгебри інваріантності яких були б розв'язними алгебрами Лі розмірності вищої за 2. Також, враховуючи, що алгебра $sl(2, \mathbb{R})$ має двовимірну підалгебру, яка ізоморфна алгебрі $A_{2.2}$, можемо стверджувати, що не існують нелінійні рівняння вигляду (1), алгебри інваріантності яких ізоморфні алгебрі $sl(2, \mathbb{R})$ або містять її як підалгебру. Нарешті, неважко переконатися, що в класі операторів (2) не існують і реалізації алгебри $so(3)$.

Враховуючи сказане вище, можна сформулювати твердження.

Теорема 3. *З точністю до еквівалентності нелінійні рівняння вигляду* (1)*, які мають нетривіальну симетрію, вичерпуються рівняннями, які наведено в теоремах* 1 *та* 2.

На цьому групову класифікацію рівняння (1) завершено.

Висновки. У даній роботі повністю розв'язано задачу групової класифікації квазілінійних хвильових рівнянь, права частина яких лінійно залежить від u_x.

Література

[1] *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978 (English transl.: Academic Press, NY, 1982).

[2] *Olver P. J.* Applications of Lie Groups to Differential Equations. — New-York: Springer–Verlag, 1986.

[3] *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — К.: Наукова думка, 1989 (English transl.: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993).

[4] *Fushchych W. I., Zhdanov R. Z.* Symmetries and exact solutions of nonlinear Dirac equations. — Kyiv: Mathematical Ukraina Publishers, 1997.

[5] *Bihlo A., Dos Santos Cardoso-Bihlo E., Popovych R. O.* Complete group classification of a class of nonlinear wave equations // J. Math. Phys. — 2012. — **53**. — P. 123515.

[6] *Ames W.F., Adams E., Lohner R.J.* Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Int. J. Non. Mech. — 1981. — **16**, No. 5–6. — P. 439–447.

[7] *Oron A., Rosenau Ph.* Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. — 1986. — **118**, № 4. — P. 172 – 176.

[8] *Suhubi E.S., Bakkaloğlu A.* Group poperties and similarity solutions for a quasi-linear wave equation in the plane // Int. J. Non. Mech. — 1991. — **26**, No. 5 — P. 567 – 584.

[9] *Torrisi M., Valenti A.* Group properties and invariant solutions for infinitesimal transformations of a nonlinear wave equation // Int. J. Non. Mech. — 1985. — **20**, № 3 — P. 135 – 144.

[10] *Torrisi M., Valenti A.* Group analysis and some solutions of a nonlinear wave equation // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. — 1990. — **38**, № 2 — P. 445 – 458; applications. — Warszawa: PWN-Polish Scientific, 1977.

[11] *Barut A., Raczka R.* Theory of group representations and applications. — Warszawa: PWN-Polish Scientific, 1977.