УДК 517.5

О. М. Піддубний (Східноєвропейський національний ун—т, Луцьк)
В. В. Савчук (Ін—т математики НАН України, Київ)

МАЖОРАНТИ В ТЕОРЕМІ ТИПУ ГАРДІ–ЛІТТЛВУДА ДЛЯ ПОХІДНИХ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

We study the classes $\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$, $\mathscr{L}^k_\lambda$ *and* $\mathscr{B}^k_\lambda$, $k \in \mathbb{N}$, *consisting of analytic functions* f *for which respectively* $|f(z_1) - f(z_2)| = O(|z_1 - z_2|)$, $|f^{(k)}(z)| = O(|\lambda^{(k)}(1 - |z|)|)$ *and* $|f^{(k)}(z)| = O(\lambda(1 - |z|)/(1 - |z|)^k)$, $z \in \mathbb{D}$. *We investigate a question of embedding such classes and give conditions for equalities* $\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D}) = \mathscr{L}^k_\lambda = \mathscr{B}^k_\lambda$.

Вивчаються класи $\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$, $\mathscr{L}^k_\lambda$ *і* $\mathscr{B}^k_\lambda$, $k \in \mathbb{N}$, *аналітичних функцій* f, *для яких відповідно* $|f(z_1) - f(z_2)| = O(|z_1 - z_2|)$, $|f^{(k)}(z)| = O(|\lambda^{(k)}(1 - |z|)|)$ *і* $|f^{(k)}(z)| = O(\lambda(1-|z|)/(1-|z|)^k)$, $z \in \mathbb{D}$. *Досліджено вкладення цих класів та вказано умови на мажоранту* λ, *за яких* $\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D}) = \mathscr{L}^k_\lambda = \mathscr{B}^k_\lambda$.

В даній статті наводяться результати досліджень поведінки похідних вищих порядків аналітичних функцій в контексті такої теореми.

Теорема Гарді–Літтлвуда [1, теорема 43]. *Нехай* f — *функція, аналітична в крузі* $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $0 < \alpha < 1$ *і* $\beta > \alpha$. *Для того, щоб* f *була неперервною в* $\overline{\mathbb{D}}$ *і*

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le C|z_1 - z_2|^\alpha, \quad z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}},\ C = \mathrm{const} > 0,$$

необхідно і достатньо, щоб

$$|f^{(\beta)}(z)| \le \frac{KC}{(1 - |z|)^{\beta-\alpha}} \quad \forall\ z \in \mathbb{D},$$

де

$$f^{(\beta)}(z) := \sum_{k=[\beta]}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\beta)} \widehat{f}_k z^{k-[\beta]},\ \ \widehat{f}_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad z \in \mathbb{D},$$

© О. М. Піддубний, В. В. Савчук, 2013

— дробова похідна порядку β в розумінні Рімана–Ліувілля (див., наприклад, [2], §22), $K = K(\alpha, \beta) = \mathrm{const}$.

Перед постановкою задачі нашого дослідження наведемо необхідні означення і нагадаємо деякі відомі факти.

Означення 1. *Диференційовну зростаючу функцію $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\lambda(0) = 0$, будемо називати мажорантою, якщо λ' є спадною функцією.*

Означення 2. ([3, с. 350]). *Дійснозначна функція $\lambda : [a, b) \to \mathbb{R}$ називається регулярно монотонною на проміжку $[a, b) \subset \mathbb{R}$ (скінченному або нескінченному), якщо вона нескінченно диференційовна на $[a, b)$, і $\lambda, \lambda', \ldots, \lambda^{(k)}, \ldots$ є знакосталими функціями на $[a, b)$.*

Означення 3. *Регулярно монотонну функцію $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\lambda(0) = 0$, будемо називати регулярно монотонною мажорантою, якщо $|\lambda^{(k)}|$ є спадною функцією для всіх $k = 1, 2, \ldots$.*

Означення 4. *Нехай $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — неперервна зростаюча функція, $\lambda(0) = 0$. Будемо казати, що функція $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ належить класові $\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$, якщо*

$$|f|_{\mathrm{Lip}_\lambda} := \sup_{z_1, z_2 \in \mathbb{D}} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\lambda(|z_1 - z_2|)} < \infty.$$

Якщо при цьому функція f є аналітичною в $\mathbb{D}$, то писатимемо $f \in A\,\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$, а якщо до того ж f є неперервною в $\overline{\mathbb{D}}$, то писатимемо $f \in A\,\mathrm{Lip}_\lambda(\overline{\mathbb{D}})$.

Позначимо через $A(\overline{\mathbb{D}})$ простір функцій, аналітичних в $\mathbb{D}$ і неперервних в $\overline{\mathbb{D}}$ з нормою $\|f\| := \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f(z)|$.

Зауваження 1. Якщо $f \in A\,\mathrm{Lip}_\lambda(\overline{\mathbb{D}})$, то

$$|f|_{\mathrm{Lip}_\lambda} = \sup_{\substack{z_1, z_2: \\ |z_1| = |z_2| = 1}} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\lambda(|z_1 - z_2|)} < \infty.$$

У цьому легко переконатися, розглянувши функції, які є алгебраїчними многочленами, а потім скористатися теоремою про щільність алгебраїчних многочленів в просторі $A(\overline{\mathbb{D}})$.

Цілком зрозуміло також, що

$$A\,\mathrm{Lip}_\lambda(\overline{\mathbb{D}}) \subset A\,\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D}) \subset H_\infty,$$

де H_∞ — простір обмежених аналітичних функцій.

Означення 5. *Нехай* $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *— функція, k разів диференційовна,* $k \in \mathbb{N}$, *і* $|\lambda^{(j)}(t)| > 0$, $t > 0$, $j = \overline{1, k}$. *Будемо казати, що аналітична функція* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *належить класові* $\mathscr{L}_\lambda^k$, *якщо*

$$|f|_{\mathscr{L}_\lambda^k} := \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{\left|f^{(k)}(z)\right|}{|\lambda^{(k)}(1-|z|)|} < \infty.$$

Означення 6. *Нехай* $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *— неперервна зростаюча функція,* $\lambda(t) > 0, t > 0$, $\lambda(0) = 0$ *і* $k \in \mathbb{N}$. *Будемо казати, що аналітична функція* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *належить класові* $\mathscr{B}_\lambda^k$, *якщо*

$$|f|_{\mathscr{B}_\lambda^k} := \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^k}{\lambda(1-|z|)} \left|f^{(k)}(z)\right| < \infty.$$

***Зауваження* 2.** Для того, щоб класи $\mathscr{L}_\lambda^k$ і $\mathscr{B}_\lambda^k$, $k \in \mathbb{N}$, були нетривіальними, тобто складалися не тільки з алгебраїчних многочленів степеня не вище $k-1$, необхідно і достатньо, щоб відповідно

$$\lim_{t \to 0+} \inf |\lambda^{(k)}(t)| > 0$$

і

$$\lim_{t \to 0+} \inf \frac{\lambda(t)}{t^k} > 0.$$

Справді, достатність цього твердження є очевидною, а необхідність можна встановити за допомогою таких міркувань.

Нехай функція f не є алгебраїчним многочленом степеня не вище $k-1$, тобто $f^{(k)} \not\equiv 0$. Тоді знайдеться $m \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$0 < \frac{1}{2^m} \frac{(m+k)!}{m!} \left|\widehat{f}_{m+k}\right| \le \varrho^m \frac{(m+k)!}{m!} \left|\widehat{f}_{m+k}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f^{(k)}(\varrho e^{it}) e^{-imt} dt \right| \le$$

$$\le \begin{cases} |\lambda^{(k)}(1-\varrho)|, & f \in \mathscr{L}_\lambda^k, \\ \dfrac{\lambda(1-\varrho)}{(1-\varrho)^k}, & f \in \mathscr{B}_\lambda^k, \end{cases} \qquad \forall\ \varrho \in [1/2, 1)\,.$$

Ці співвідношення й доводять необхідність.

Зв'язок між класами $A\mathrm{Lip}_\lambda(\overline{\mathbb{D}})$ і $\mathscr{L}_\lambda^k$ описується таким твердженням.

Теорема 1. *Нехай* λ *— мажоранта і* $\int_0^1 |\lambda'(t)|dt < \infty$*. Тоді*

$$\mathscr{L}_\lambda^1 \subset A\mathrm{Lip}_\lambda(\overline{\mathbb{D}}). \tag{1}$$

Якщо до того ж λ *є регулярно монотонною мажорантою, то*

$$\cdots \subset \mathscr{L}_\lambda^k \subset \cdots \subset \mathscr{L}_\lambda^2 \subset \mathscr{L}_\lambda^1 \subset A\mathrm{Lip}_\lambda(\overline{\mathbb{D}}). \tag{2}$$

Доведення. Включення (1) доведене в [4, теорема 4]. Тому залишається показати (і цього досить), що $\mathscr{L}_\lambda^2 \subset \mathscr{L}_\lambda^1$. Для цього розглянемо рівність

$$f'(\varrho e^{it}) = \int_0^\varrho f''(re^{it})e^{it}dr + f'(0), \quad \forall\ \varrho \in [0,1), t \in [0,2\pi].$$

Звідси внаслідок монотонності функцій $|\lambda'|$ і $|\lambda''|$ одержимо нерівність

$$|f'(\varrho e^{it})| \le |f|_{\mathscr{L}_\lambda^2} \int_0^\varrho |\lambda''(1-r)|dr + |f'(0)| =$$

$$= |f|_{\mathscr{L}_\lambda^2} \int_{1-\varrho}^1 |\lambda''(r)|dr + |f'(0)| <$$

$$< \left(|f|_{\mathscr{L}_\lambda^2} + \frac{|f'(0)|}{|\lambda'(1)|}\right) |\lambda'(1-\varrho)|, \quad \forall\ \varrho \in [0,1),$$

з якої і випливає потрібне включення.

Теорему доведено.

Зв'язок між класами $A\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$ і $\mathscr{B}_\lambda^k$ описується таким твердженням.

Теорема 2. *Нехай* $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *— неперервна неспадна функція,* $\lambda(t) > 0$, $t > 0$ *і* $\lambda(0) = 0$*. Тоді*

$$A\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D}) \subset \mathscr{B}_\lambda^1 \subset \mathscr{B}_\lambda^2 \subset \cdots \subset \mathscr{B}_\lambda^k \subset \cdots . \tag{3}$$

Доведення. Перше включення в (3) можна вважати відомим фактом (див. [5]), але не зайвим буде навести його доведення, яке ґрунтується на техніці K– функціоналу.

Нагадаємо, що K– функціонал дробового порядку в просторі $A(\overline{\mathbb{D}})$ означається так

$$K_r(\delta, f) := \inf_{g:\ g^{(r)} \in H_p} \left(\|f - g\| + \delta \left\| g^{(r)} \right\| \right),\ 0 < p \leq \infty.$$

Нехай $f \in A\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$. За формулою Коші для будь-якої аналітичної функції g такої, що $g' \in A(\overline{\mathbb{D}})$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it}) - g(e^{it})}{(Re^{it} - z)^2} Re^{it} dt + g'\left(\frac{z}{R}\right), \quad |z| < R < 1.$$

Звідси випливає оцінка

$$|f'(z)| \leq \|f(R\cdot) - g\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R}{|Re^{it} - z|^2} dt + \|g'\| \leq$$

$$\leq \|f(R\cdot) - g\| \frac{1}{R - |z|} + \|g'\|.$$

Отже,

$$(R - |z|)|f'(z)| \leq \|f(R\cdot) - g\| + (1 - |z|)\|g'\|.$$

Оскільки функція g є довільною, то остання нерівність означає, що

$$(R - |z|)|f'(z)| \leq K\left(1 - |z|, f_R\right), \tag{4}$$

де $f_R(z) := f(Rz)$.

Відомо (див., наприклад, [6, с. 177]), що для будь-якої функції $F \in A(\overline{\mathbb{D}})$

$$K(\delta, F) \leq C\omega(\delta, F), \quad \delta > 0,$$

де C — абсолютна стала і $\omega(\delta, F) := \sup_{|t| \leq \delta} \|F(\cdot e^{it}) - F(\cdot)\|$ — модуль неперервності функції F.

Тому, поєднуючи цей факт з (4), а також враховуючи означення величини $|f|_{\mathrm{Lip}_\lambda}$ і монотонність функції λ, отримаємо

$$(R - |z|)|f'(z)| \leq C\omega\left(1 - |z|, f_R\right) = C \sup_{|t| \leq 1 - |z|} \|f(Re^{it}\cdot) - f(R\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leq$$

$$\le C|f|_{\mathrm{Lip}_\lambda} \sup_{|t|\le 1-|z|} \lambda\left(R|e^{it}-1|\right) = C|f|_{\mathrm{Lip}_\lambda} \sup_{|t|\le 1-|z|} \lambda\left(2R\left|\sin\frac{t}{2}\right|\right) \le$$

$$\le C|f|_{\mathrm{Lip}_\lambda} \lambda\left(R(1-|z|)\right).$$

Спрямувавши тепер $R \to 1-$, отримаємо співвідношення

$$\frac{1-|z|}{\lambda(1-|z|)}|f'(z)| \le C|f|_{\mathrm{Lip}_\lambda} < \infty \quad \forall\, z \in \mathbb{D},$$

а це означає, що $f \in \mathscr{B}^1_\lambda$.

Для доведення решти включень в (3) досить показати, що $\mathscr{B}^1_\lambda \subset \mathscr{B}^2_\lambda$. Для цього скористаємося формулою

$$f''(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \frac{f'(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta, \quad |z|<R<1.$$

Отже,

$$|f''(z)| \le \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f'(Re^{i\theta})|}{|Re^{i\theta}-z|^2}d\theta \le$$

$$\le |f|_{\mathscr{B}^1_\lambda}\frac{\lambda(1-R)}{1-R}\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{R^2-2R|z|\cos\theta-|z|^2} =$$

$$= |f|_{\mathscr{B}^1_\lambda}\frac{\lambda(1-R)}{1-R}\frac{R}{R^2-|z|^2} \le |f|_{\mathscr{B}^1_\lambda}\frac{\lambda(1-R)}{1-R}\frac{1}{R-|z|}.$$

Покладемо тепер $R=(1+|z|)/2$. Тоді з попередньої оцінки випливає співвідношення

$$|f|_{\mathscr{B}^2_\lambda} = \sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{(1-|z|)^2}{\lambda(1-|z|)}|f''(z)| \le 4|f|_{\mathscr{B}^1_\lambda}\sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{\lambda\left(\frac{1-|z|}{2}\right)}{\lambda(1-|z|)} \le 4|f|_{\mathscr{B}^1_\lambda},$$

яке й потрібно було довести.

Включення $\mathscr{B}^k_\lambda \subset \mathscr{B}^{k+1}_\lambda$, $k \ge 2$, випливають з доведеного за допомогою підстановки $f' := f^k$.

Теорему доведено.

Повернемося ще раз до теореми Гарді–Літтлвуда.

Нехай $\lambda(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, і $\beta = k$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді теорему Гарді–Літтлвуда в прийнятих позначеннях можна переписати у такому вигляді: *для аналітичної в $\mathbb{D}$ функції f*

$$|f|_{\mathscr{L}^k_\lambda} < \infty \Longleftrightarrow |f|_{\mathrm{Lip}_\lambda} < \infty \Longleftrightarrow |f|_{\mathscr{B}^k_\lambda} < \infty,$$

або в рівносильній формі:

$$\mathscr{L}^k_\lambda = A\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D}) = \mathscr{B}^k_\lambda, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

В загальному ж випадку для регулярної мажоранти λ, яка задовольняє умови теорем 1 і 2, згідно з цими ж таки твердженнями достовірно знаємо лише про такі вкладення

$$\cdots \subset \mathscr{L}^2_\lambda \subset \mathscr{L}^1_\lambda \subset A\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D}) \subset \mathscr{B}^1_\lambda \subset \mathscr{B}^2_\lambda \subset \cdots.$$

З огляду на це природно виникають такі задачі.

Задача 1. *Нехай $k \in \mathbb{N}$. Описати множину всіх регулярних мажорант λ, для яких*

$$A\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D}) \subset \mathscr{L}^k_\lambda. \tag{5}$$

Задача 2. *Нехай $k \in \mathbb{N}$. Описати множину всіх неспадних функцій $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\lambda(t) > 0$, $t > 0$, для яких*

$$A\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D}) \supset \mathscr{B}^k_\lambda. \tag{6}$$

Частинний розв'язок задачі 1 при $k = 1$ дається наступним твердженням.

Теорема Ньольдера–Оберліна [7]. *Нехай λ — мажоранта. Для того, щоб мало місце вкладення (5) при $k = 1$ необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{t\to 0+} \sup \frac{\lambda(t)}{t\lambda'(t)} < \infty. \tag{7}$$

Як наслідок з теореми 1 та теореми Ньольдера–Оберліна, маємо таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай* λ — *мажоранта і* $\int_0^1 |\lambda'(t)|dt < \infty$. *Для того, щоб мала місце рівність множин*

$$A\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D}) = \mathscr{L}^1_\lambda$$

необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова (7).

Задача 2 є значно складнішою і дотепер залишається не розв'язаною. Але у цьому напрямку вдалося досягти такого прогресу.

Теорема 3. *Нехай* $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — *неперервна неспадна функція,* $\lambda(t) > 0$, $t > 0$ *і* $\lambda(0) = 0$. *Тоді:*

1)

$$\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t}dt = O(1)\lambda(x),\ x > 0 \Longrightarrow A\mathrm{Lip}_\lambda(\overline{\mathbb{D}}) \supset \mathscr{B}^1_\lambda; \tag{8}$$

2) якщо $k \in \mathbb{N}$, *то*

$$\int_x^1 \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt = O(1)\frac{\lambda(x)}{x^k},\ 0 < x < 1 \Longrightarrow \mathscr{B}^k_\lambda \supset \mathscr{B}^{k+1}_\lambda;$$

3)

$$\int_x^1 \frac{\lambda(t)}{t^2}dt = O(1)\frac{\lambda(x)}{x},\ 0 < x < 1 \Longrightarrow \mathscr{B}^1_\lambda \supset \mathscr{B}^2_\lambda \supset \cdots \supset \mathscr{B}^k_\lambda \supset \cdots .$$

З теорем 2 і 3 випливає

Наслідок 2. *Нехай* $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — *неперервна неспадна функція,* $\lambda(t) > 0$, $t > 0$ *і* $\lambda(0) = 0$. *Якщо виконується умова*

$$\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t}dt + x\int_x^1 \frac{\lambda(t)}{t^2}dt = O\left(\lambda(x)\right), \quad 0 < x < 1,$$

то

$$A\mathrm{Lip}_\lambda(\overline{\mathbb{D}}) = A\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D}) = \mathscr{B}^1_\lambda = \mathscr{B}^2_\lambda = \cdots = \mathscr{B}^k_\lambda = \cdots .$$

Доведення. Твердження пункту *1)* є безпосереднім наслідком теореми Я.Л. Геронімуса [4, теорема 4] .

Доведемо тепер пункт *2)*. Перш за все зауважимо, що за умови

$$\int_x^1 \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt = O(1)\frac{\lambda(x)}{x^k},\ 0 < x < 1, \tag{9}$$

для функції λ виконується співвідношення

$$\liminf_{\delta\to 0+}(\delta^{-k}\lambda(\delta)) > 0. \tag{10}$$

Нехай тепер $f \in \mathscr{B}_\lambda^{k+1}$. Виходячи з рівності

$$f^{(k)}(z) = \int_0^z f^{(k+1)}(\zeta)d\zeta + f^{(k)}(0), \quad z \in \mathbb{D},$$

де інтегрування ведеться вздовж відрізка, що з'єднує точки 0 і z, на підставі умови (9) отримаємо оцінку

$$|f^{(k)}(z)| \le \int_0^{|z|} |f^{(k)}(\zeta)|d\zeta + |f^{(k)}(0)| \le$$

$$\le |f|_{\mathscr{B}_\lambda^{k+1}} \left(\int_0^{|z|} \frac{\lambda(1-\zeta)}{(1-\zeta)^{k+1}}d\zeta + |f^{(k)}(0)|\right) =$$

$$= O(1)|f|_{\mathscr{B}_\lambda^{k+1}} \frac{\lambda(1-|z|)^k}{1-|z|} + |f^{(k)}(0)|.$$

Звідси, враховуючи (10), отримаємо співвідношення

$$\frac{(1-|z|)^k}{\lambda(1-|z|)}|f^{(k)}(z)| < O(1)|f|_{\mathscr{B}_\lambda^{k+1}} + |f^{(k)}(0)|\frac{(1-|z|)^k}{\lambda(1-|z|)} < \infty,$$

яке й доводить включення $f \in \mathscr{B}_\lambda^k$.

Для доведення пункту *3)* зауважимо, що умова (9), як це показано в [8], є рівносильною такій

$$\exists\ C > 1 :\ \limsup_{\delta\to 0} \frac{\lambda(C\delta)}{\lambda(\delta)} < C^k.$$

Отже, якщо виконується умова (9) при $k = 1$, то існує стала $C > 1$ така, що

$$\limsup_{\delta\to 0} \frac{\lambda(C\delta)}{\lambda(\delta)} < C < C^2 < C^3 < \ldots < C^k < \ldots,$$

тобто умова (9) виконується і при кожному натуральному k. Цей факт на підставі вже доведеного пункту *2)* доводить пункт *3)*.

Твердження доведено.

Задачу 1 повністю розв'язує таке твердження.

Теорема 4. *Нехай $k \in \mathbb{N}$ і λ — регулярно монотонна мажоранта. Для того, щоб виконувалося вкладення (5) необхідно і достатньо, щоб*

$$C(\lambda, m) := \limsup_{t\to 0+} \frac{\lambda\ (t)}{t^m \left|\lambda^{\ (m)}(t)\right|} < \infty, \quad m = \overline{1, k}. \tag{11}$$

Це твердження є по суті представленням основного результату з [9].

Наслідок 3. *Нехай λ — регулярно монотонна мажоранта, $\lambda' \in L_1(0,1)$. Для того, щоб для даного $k \in \mathbb{N}$ мала місце рівність множин*

$$A\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D}) = \mathscr{L}_\lambda^k$$

необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова (11).

Зауваження 3. Прикладом регулярно монотонної мажоранти, яка задовольняє умову (7), але не задовольняє умову (11) при $k \geq 2$ є функція $\lambda(t) = \ln(t+1)$.

Доведення. *Доведемо спочатку достатність.* Для цього зафіксуємо довільне $z \in \mathbb{D}$ і візьмемо параметр R такий, що $0 < R < 1 - |z|$. Оскільки $f \in A\,\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$, то, використовуючи інтегральну формулу Коші, отримаємо

$$\left|f^{(m)}(z)\right| = \left|\frac{m!}{2\pi i} \int\limits_{|z-\zeta|=R} \frac{f(\zeta) - f(z)}{(\zeta - z)^{m+1}} d\zeta\right| =$$

$$= \left| \frac{m!}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f\left(z + Re^{i\theta}\right) - f\left(z\right)}{R^{m+1} e^{(m+1)\, i\theta}} Re^{i\theta} i d\theta \right| \le$$

$$\le \frac{m!}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\left| f\left(z + Re^{i\theta}\right) - f\left(z\right) \right|}{R^m} d\theta \le m! |f|_{\mathrm{Lip}_\lambda} \frac{\lambda(R)}{R^m}.$$

Оскільки ліва частина цієї нерівності не залежить від R, то в ній можна перейти до границі при $R \to 1 - |z|$, внаслідок чого отримаємо співвідношення

$$|f^{(m)}(z)| \le m! |f|_{\mathrm{Lip}_\lambda} \frac{\lambda(1 - |z|)}{(1 - |z|)^m}, \quad \forall\, z \in \mathbb{D},\ m = \overline{1, k}.$$

Звідси випливає нерівність

$$|f|_{\mathscr{L}_\lambda^m} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{\left| f^{(k)}(z) \right|}{\lambda^{(m)}(1 - |z|)} \le m! |f|_{\mathrm{Lip}_\lambda} \sup_{t \in (0,1]} \frac{\lambda(t)}{t^m |\lambda^{(m)}(t)|},\ m = \overline{1, k}.$$

Залишається зауважити, що внаслідок (11) супремум в правій частині є скінченним.

Справді, для функції

$$F_m(\delta) := \sup_{t \in [\delta, 1]} \frac{\lambda(t)}{t^m |\lambda^{(m)}(t)|},\ \delta \in (0, 1],$$

яка є неперервною на $(0, 1]$, згідно з (11) $\lim\limits_{\delta \to 0+} F_m(\delta) = C(\lambda, m) < \infty$. Тому F_m можно доозначити до неперервної на $[0, 1]$ функції, поклавши $F_m(0) = C(\lambda, m)$. Таким чином за теоремою Вейєрштраса

$$\sup_{t \in (0,1]} \frac{\lambda(t)}{t^m |\lambda^{(m)}(t)|} = \max_{\delta \in [0,1]} F_m(\delta) < \infty.$$

Доведемо тепер необхідність. Покажемо, що припустивши супротивне, тобто, що (11) не справджується, можна побудувати аналітичну функцію $f \in \mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$, для якої $|f|_{\mathscr{L}_\lambda^k} = \infty$. Тоді разом з (2) це означатиме:

$$\mathscr{L}_\lambda^k \subset A\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D}) \subsetneqq \mathscr{L}_\lambda^k,$$

що, очевидно, є абсурдом.

Розглянемо спочатку випадок, коли $k = 2$ і припустимо, що

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{\lambda(t)}{t^2|\lambda''(t)|} = \infty.$$

Тоді існує така монотонно спадна послідовність значень $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ аргументу $t \in (0, 1]$, для якої

$$\frac{\lambda(t_j)}{t_j^2|\lambda''(t_j)|} \geq 2^{3j}, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots \tag{12}$$

Означимо аналітичну в $\mathbb{D}$ функцію f за правилом

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}, \quad a_j = \frac{\lambda(t_j)}{2^j},\ n_j = \left[\frac{1}{t_j}\right], \tag{13}$$

де $[\cdot]$ означає цілу частину додатного числа.

Легко бачити, що для радіуса збіжності R_f ряду (13) виконується співвідношення

$$\frac{1}{R_f} = \limsup_{j\to\infty} |a_j|^{1/n_j} \leq \lim_{j\to\infty} \left(\frac{\lambda(1)}{2^j}\right)^{1/n_j} \leq 1.$$

Тому функція f є аналітичною в крузі $\mathbb{D}$.

Покажемо тепер, що $f \in \mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$. Для цього нам буде потрібна така

Лема. *Нехай λ — мажоранта. Тоді для будь-якого $l \in \mathbb{N}$*

$$\sup_{z_1, z_2 \in \mathbb{D}} \frac{\left|z_1^l - z_2^l\right|}{\lambda(|z_1 - z_2|)} \leq \frac{2}{\lambda(1/l)}. \tag{14}$$

Доведення. Перш за все зауважимо, що разом з функцією λ на інтервалі $(0, 1)$ зростає і функція $t \mapsto t/\lambda(t)$.

Справді, внаслідок монотонності λ' за теоремою Лагранжа для будь-яких $0 < t_1 \leq t_2 \leq 1$ існують $c_1, c_2 \in (0, 1)$, $c_1 \leq c_2$, такі, що

$$\frac{\lambda(t_1)}{t_1} = \frac{\lambda(t_1) - \lambda(0)}{t_1 - 0} = \lambda'(c_1) \geq \lambda'(c_2) = \frac{\lambda(t_2) - \lambda(0)}{t_2 - 0} = \frac{\lambda(t_2)}{t_2}.$$

Оскільки для будь-яких $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$

$$\left|z_1^l - z_2^l\right| = |z_1 - z_2| \cdot \left|z_1^{l-1} + z_1^{l-2} z_2 + ... + z_2^{l-1}\right| \leq l\,|z_1 - z_2|,\ l \in \mathbb{N},$$

то

$$\left|z_1^l - z_2^l\right| \leq \min\left\{2,\, l\,|z_1 - z_2|\right\}. \tag{15}$$

Покладемо $t = |z_1 - z_2|$. Тоді згідно з (15) маємо

$$\sup_{z_1, z_2 \in \mathbb{D}} \frac{\left|z_1^l - z_2^l\right|}{\lambda\ (|z_1 - z_2|)} \leq \max\left\{\sup_{0<t<2/l} \frac{l\,t}{\lambda\ (t)},\ \sup_{2/l<t\leq 2} \frac{2}{\lambda\ (t)}\right\}. \tag{16}$$

Оскільки функція $t \mapsto \frac{t}{\lambda\,(t)}$ зростає, то

$$\sup_{0<t<\frac{2}{l}} \frac{l\,t}{\lambda\ (t)} \leq \frac{2}{\lambda\ \left(\frac{2}{l}\right)} \leq \frac{2}{\lambda\ \left(\frac{1}{l}\right)},$$

$$\sup_{\frac{2}{l}<t\leq 2} \frac{2}{\lambda\ (t)} \leq \frac{2}{\lambda\ \left(\frac{2}{l}\right)} \leq \frac{2}{\lambda\ \left(\frac{1}{l}\right)}\ .$$

Підставляючи отримані оцінки в (16), одержимо (14).

Лему доведено.

Повернемося до доведення теореми.

Згідно з (16) одержимо

$$|f|_{\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})} = \sup_{z_1,\, z_2 \in \mathbb{D}} \frac{|f\,(z_1) - f\,(z_2)|}{\lambda\ \ (|z_1 - z_2|)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sup_{z_1, z_2 \in \mathbb{D}} \frac{\left|z_1^{n_j} - z_2^{n_j}\right|}{\lambda\ \ (|z_1 - z_2|)} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda\ \ (t_j)}{2^j} \cdot \frac{2}{\lambda\ \left(n_j^{-1}\right)} = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{1-j} \frac{\lambda\ \ (t_j)}{\lambda\ \left(n_j^{-1}\right)} \leq 2.$$

Отже, $f \in \mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$.

Покажемо тепер, що для функції f, означеної за правилом (13), $|f|_{\mathscr{L}^2_\lambda} = \infty$.

Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $n_1 \geq 2$. Тоді

$$f''\,(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j n_j\,(n_j - 1)\,z^{n_j - 2}.$$

Маємо

$$|f|_{\mathscr{L}^2_\lambda} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|f''(z)|}{|\lambda''(1-|z|)|} \geq \sup_{0<r<1} \frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j n_j (n_j-1)\, r^{n_j-2}}{|\lambda''(1-r)|} \geq$$

$$\geq \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{0<r<1} \frac{a_j n_j (n_j-1)\, r^{n_j-2}}{|\lambda''(1-r)|}.$$

Покладемо $r = 1 - t_j$. Тоді $1 - r = t_j$ і $r = 1 - t_j \geq 1 - n_j^{-1}$. Продовжуючи далі попередню оцінку, одержимо

$$|f|_{\mathscr{L}^2_\lambda} \geq \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_j n_j (n_j-1)\left(1-n_j^{-1}\right)^{n_j-2}}{\left|\lambda''\left(n_j^{-1}\right)\right|} =$$

$$= \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\lambda(t_j)\; n_j^3\left(1-n_j^{-1}\right)^{n_j}}{2^j\left|\lambda''\left(n_j^{-1}\right)\right|(n_j-1)} \geq \frac{1}{e} \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\lambda(t_j)\; n_j^2}{2^j\left|\lambda''\left(n_j^{-1}\right)\right|}.$$

Оскільки $2n_j \geq t_j^{-1} \geq n_j$, то внаслідок монотонності $|\lambda''|$ і співвідношення (12), остаточно одержимо

$$|f|_{\mathscr{L}^2_\lambda} \geq \frac{1}{e} \sup_{j} \frac{\lambda(t_j)}{2^{j+2} t_j^2 |\lambda''(t_j)|} \geq \frac{1}{e} \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{2^{3j}}{2^{j+2}} = \infty.$$

Отже, ми показали, що якщо має місце вкладення множин $A\,\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D}) \subset \mathscr{L}^2_\lambda$, то $C(\lambda,2) < \infty$, а з другого боку згідно з твердженням має місце і вкладення $A\,\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D}) \subset \mathscr{L}^1_\lambda$. Це, в свою чергу, згідно з теоремою Нольдера–Оберліна, тягне за собою виконання умови $C(\lambda,1) < \infty$.

Таким чином, повністю доведено теорему при $k = 2$.

Далі доведення необхідності умов (11) проводиться послідовно для кожного натурального $k \geq 3$ з використанням аналогічних міркувань. Єдина відмінність полягає лише в тому, що замість (12) використовується співвідношення

$$\frac{\lambda(t_j)}{t_j^k\left|\lambda^{(k)}(t_j)\right|} \geq 2^{(k+1)j}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Теорему доведено.

1. *Hardy G., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. II // Math. Z. — 1931. — **34.** — P. 403 – 439.
2. *Самко С. Г., Килбас А. А, Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
3. *Бернштейн С. Н.* О некоторых свойствах регулярно монотонных функций // Собрание сочинений. Т.1. — М: Изд-во АН СССР, 1952. — С. 350 – 360.
4. *Геронимус Я. Л.* О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге или круговом секторе // Матем. сб. — 1956. — **38**, № 3. — С. 319 – 330.
5. *Брудный Ю. А., Гопенгауз И. Е.* Обобщение одной теоремы Харди и Литтльвуда // Матем. сб. — 1960. — **52**, № 3. — С. 891 – 894.
6. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. — 462 p.
7. *Nolder C. A., Oberlin D. M.* Moduli of continuity and a Hardy–Littlewood theorem // Lecture Notes in Math. — 1987. — № 1351. — P. 265 – 272.
8. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Труды Моск. матем. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483 – 522.
9. *Горбайчук В. Й., Піддубний О. М.* Про мажоранти в теоремі Харді–Літтлвуда для похідних вищих порядків // Укр. мат. журн. — 1995. — **47**, № 11. — С. 1574 – 1576.