Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, т.10, №1, 169-183

УДК 517.51

В. В. Миронюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ З ІЗОТРОПНИХ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{1,\theta}(\mathbb{R}^d)$ ЦІЛИМИ ФУНКЦІЯМИ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

Obtained are the exact order estimates of approximation of functions from isotropic $B^{\Omega}_{1,\theta}(\mathbb{R}^d)$ classes by entire functions of exponential type in space $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$.

Встановлено точні за порядком оцінки наближень функцій з ізотропних класів $B^{\Omega}_{1,\theta}(\mathbb{R}^d)$ цілими функціями експоненціального типу в просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$.

Дана робота присвячена дослідженню наближення ізотропних класів $B^{\Omega}_{1,\theta}(\mathbb{R}^d)$ у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$. В якості апарату наближення використовуються цілі функції експоненціального типу.

1. Означення класів функцій та апроксимативних характеристик. Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, позначає d-вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ і $L_q(\mathbb{R}^d)$ — простір вимірних і сумовних у степені q, $1 \leqslant q < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$), функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$. Норма у цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_q = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})\,|^q d\boldsymbol{x} \right)^{1/q}, \quad 1 \leqslant q < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|.$$

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ і $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^d$ позначимо

$$\Delta_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})$$

і визначимо кратну різницю порядку $l \in \mathbb{N}$ функції f у точці $\boldsymbol{x}$ з кроком $\boldsymbol{h}$ згідно з формулою

$$\Delta_{\boldsymbol{h}}^{l} f(\boldsymbol{x}) = \Delta_{\boldsymbol{h}} \Delta_{\boldsymbol{h}}^{l-1} f(\boldsymbol{x}), \quad \Delta_{\boldsymbol{h}}^{0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}).$$

Кратну різницю $\Delta_{\boldsymbol{h}}^{l} f(\boldsymbol{x})$ також можна записати у вигляді

$$\Delta_{\boldsymbol{h}}^{l} f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=0}^{l} (-1)^{j+l} C_l^j f(\boldsymbol{x} + j\boldsymbol{h}),$$

де C_l^j — біноміальні коефіцієнти.

Відштовхуючись від кратної різниці $\Delta_{\boldsymbol{h}}^{l} f$, визначимо модуль неперервності l-го порядку функції $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, який будемо позначати $\Omega_l(f,t)_q$, згідно з формулою

$$\Omega_l(f,t)_q = \sup_{|\boldsymbol{h}| \leqslant t} \|\Delta_{\boldsymbol{h}}^{l} f\|_q \,,$$

де $|\boldsymbol{h}| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_d^2}$ — евклідова норма вектора $\boldsymbol{h}$.

Нехай $\Omega(t)$ — функція типу модуля неперервності порядку l, тобто $\Omega(t)$ задовольняє такі умови:

1) $\Omega(0) = 0, \Omega(t) > 0$ для $t > 0$;

2) $\Omega(t)$ неперервна на $\mathbb{R}_+$;

3) $\Omega(t)$ неспадна на $\mathbb{R}_+$;

4) для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$, $\Omega(nt) \leqslant C n^l \Omega(t)$, де $C > 0$ не залежить від n і t. Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l.

Підпорядкуємо функції $\Omega \in \Psi_l$ додатковим умовам, які опишемо в термінах двох понять, запроваджених С. Н. Бернштейном [1]:

а) невід'ємна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in [0;\infty)$, майже зростає, якщо існує стала $C_1 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \leqslant C_1 \varphi(\tau_2)$ для будь-яких τ_1, τ_2, $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2$;

б) додатна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0;\infty)$, майже спадає, якщо існує стала $C_2 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \geqslant C_2 \varphi(\tau_2)$ для будь-яких τ_1, τ_2, $0 < \tau_1 < \tau_2$.

Будемо вважати, що Ω задовольняє умови (S) та (S_l), які в літературі називають умовами Барі – Стєчкіна [2]. Це означає наступне:

I) функція Ω задовольняє умову (S) з $\alpha > 0$, якщо $\frac{\Omega(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає при $\tau > 0$;

II) функція Ω задовольняє умову (S_l), якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке, що $\frac{\Omega(\tau)}{\tau^\gamma}$ майже спадає при $\tau > 0$.

У тому випадку, коли для Ω виконується умова (S) з $\alpha > 0$, будемо говорити, що Ω належить множині S^{α}, а якщо умова (S_l), то — множині S_l. Покладемо також $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^{\alpha} \cap S_l$.

Зазначимо, що до множини $\Phi_{\alpha,l}$ належать, наприклад, функції

$$\Omega(t) = \begin{cases} t^r \left(\log_2^+ \frac{1}{t}\right)^{\beta}, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

де $\log_2^+ t = \max\{1, \log_2 t\}$, $\alpha < r < l$, а β – фіксоване дійсне число.

Для $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$ і заданої функції Ω типу модуля неперервності порядку l простір $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ визначається таким чином:

$$B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) : \ \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \stackrel{df}{=} \|f\|_p + |f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} < \infty \right\},$$

де

$$|f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, & 1 \leqslant \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Простір $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ — лінійний нормований простір з нормою

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_p + |f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}.$$

Якщо $\Omega(t) = t^r$, $0 < r < l$, то простори $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ співпадають з просторами О. В. Бєсова $B^{r}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ [3] і, зокрема, при $\theta = \infty$ та $\Omega(t) = t^r$ $B^{r}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d) \equiv H^r_p(\mathbb{R}^d)$, де $H^r_p(\mathbb{R}^d)$ — простори введені С. М. Нікольським [4]. Таким чином, простори $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ є узагальненням (за гладкісним параметром) відомих просторів Нікольського – Бєсова.

Далі, якщо не стверджується інше, під поняттям "класи $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$" будемо розуміти одиничні кулі в просторі $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, тобто клас $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) \stackrel{df}{=} \{f \in L_p(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1\}$.

Для того, щоб визначити апроксимативні характеристики, які будуть досліджуватись у роботі, нагадаємо поняття перетворення Фур'є функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, а також цілої функції експоненціального типу.

Нехай $S = S(\mathbb{R}^d)$ — простір Л. Шварца основних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^d$ комплекснозначних функцій φ, що спадають на нескінченності разом зі своїми похідними швидше будь-якого степеня $|\boldsymbol{x}|^{-1}$ (див., наприклад, [5, гл. 2]). Через S' позначимо простір лінійних неперервних функціоналів на S. Зазначимо, що елементами простору S' є узагальнені функції. Якщо $f \in S'$ і $\varphi \in S$, то $\langle f, \varphi\rangle$ позначає значення f на φ.

Перетворення Фур'є $\mathfrak{F}\varphi : S \to S$ визначається за формулою

$$(\mathfrak{F}\varphi)(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t} \equiv \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}),$$

де $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d)$ і $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t}) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i t_i$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^d$ векторів $\boldsymbol{\lambda}$ і $\boldsymbol{t}$.

Обернене перетворення Фур'є $\mathfrak{F}^{-1}\varphi : S \to S$ задається таким чином:

$$(\mathfrak{F}^{-1}\varphi)(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{\lambda} \equiv \widehat{\varphi}(\boldsymbol{t}).$$

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in S'$ (для нього ми зберігаємо те ж позначення) визначається згідно з формулою

$$\langle \mathfrak{F} f, \varphi\rangle = \langle f, \mathfrak{F}\varphi\rangle \quad (\text{або } \langle \widetilde{f}, \varphi\rangle = \langle f, \widetilde{\varphi}\rangle),$$

де $\varphi \in S$.

Обернене перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in S'$ також позначимо $\mathfrak{F}^{-1} f$, і визначається воно аналогічно до прямого перетворення Фур'є за правилом

$$\langle \mathfrak{F}^{-1} f, \varphi\rangle = \langle f, \mathfrak{F}^{-1}\varphi\rangle \quad (\text{або } \langle \widehat{f}, \varphi\rangle = \langle f, \widehat{\varphi}\rangle).$$

Зазначимо, що кожна функція $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, визначає лінійний неперервний функціонал на S

$$\langle f, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) \varphi(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \quad \varphi \in S,$$

і, як наслідок, у цьому сенсі вона є елементом S'. Тому перетворення Фур'є функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, можна розглядати як перетворення Фур'є узагальненої функції $\langle f, \varphi \rangle$.

Носієм узагальненої функції f будемо називати замикання $\overline{\mathfrak{N}}$ такої множини точок $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^d$, що для довільної $\varphi \in S$, яка дорівнює нулю в $\overline{\mathfrak{N}}$, виконується рівність $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Носій узагальненої функції f позначатимемо через $\operatorname{supp} f$. Також говоритимемо, що функція f зосереджена у множині G, якщо $\operatorname{supp} f \subseteq G$.

Функцію

$$g = g_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{z}) = g_{\nu_1,\ldots,\nu_d}(z_1, \ldots, z_d),$$

де $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_d) \in \mathbb{R}^d_+$ — невід'ємний вектор, називають цілою функцією експоненціального типу степенів $\nu_1, \ldots, \nu_d$ по змінних $z_1, \ldots, z_d$ відповідно (див., наприклад, [6, с. 118]), якщо вона володіє такими властивостями:

1) вона є цілою функцією за всіма змінними, тобто розкладається в кратний степеневий ряд

$$g(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d_+} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{k}} = \sum_{\substack{k_j \in \mathbb{Z}_+ \\ j=\overline{1,d}}} a_{k_1,\ldots,k_d} z_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot z_d^{k_d}$$

зі сталими коефіцієнтами $a_{\boldsymbol{k}} = a_{k_1,\ldots,k_d}$, який абсолютно збігається для всіх комплексних $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_d)$;

2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує додатне число C_ε таке, що для всіх комплексних $z_j = x_j + i y_j$, $j = \overline{1,d}$, виконується нерівність

$$|g(\boldsymbol{z})| \leqslant C_\varepsilon \exp \sum_{j=1}^{d} (\nu_j + \varepsilon)|z_j|.$$

Далі, нехай $A_{2^s} = \{\boldsymbol{\lambda} : -2^s < \lambda_j < 2^s, \quad j = \overline{1,d}\}$, $s \in \mathbb{Z}_+$; χ_A — характеристична функція множини A; D_m, $m \in \mathbb{N}$, — ядро Діріхле вигляду

$$D_m(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \frac{\sin m x_j}{x_j}.$$

Тоді для $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, покладемо

$$S_{2^s}[f] = \frac{1}{\pi^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{t}) D_{2^s}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t},$$

$$f_{(0)} = S_{2^0}[f], \quad f_{(s)} = S_{2^s}[f] - S_{2^{s-1}}[f], \quad \text{якщо} \quad s \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що в термінах перетворень Фур'є функцію $S_{2^s}[f]$ можна записати таким чином

$$S_{2^s}[f] = \mathfrak{F}^{-1}\left(\chi_{A_{2^s}} \mathfrak{F} f\right).$$

Дійсно, оскільки справедлива рівність (див., наприклад, [6, с. 359])

$$\chi_{A_{2^s}} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{d/2} \mathfrak{F} D_{2^s},$$

то

$$\mathfrak{F}^{-1}\left(\chi_{A_{2^s}} \mathfrak{F} f\right) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{d/2} \mathfrak{F}^{-1}\left(\mathfrak{F} f \cdot \mathfrak{F} D_{2^s}\right) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{d/2} \mathfrak{F}^{-1}\left(\mathfrak{F}(f * D_{2^s})\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{d/2} \langle f * D_{2^s}, \varphi\rangle = \langle \frac{1}{\pi^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{t}) D_{2^s}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t}, \varphi\rangle = \langle S_{2^s}[f], \varphi\rangle.$$

Зауважимо також, що $f_{(s)}$ — цілі функції експоненціального типу степенів 2^s по кожній змінній, які належать $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$ (див., наприклад, [7]), причому перетворення Фур'є функції $f_{(s)}$ зосереджене в $\left\{\boldsymbol{\lambda} : 2^{s-1} \leqslant \max\limits_{j=\overline{1,d}} |\lambda_j| \leqslant 2^s\right\}$ і співпадає там з $\widetilde{f}$. Крім того в сенсі збіжності у метриці простору $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, справедлива рівність

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} f_{(s)}.$$

Тепер визначимо апроксимативні характеристики, які будуть досліджуватись у роботі.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$, розглянемо частинну суму порядку n вигляду

$$S_n(f) = \sum_{s=0}^{n} f_{(s)}$$

і позначимо

$$\mathcal{E}_n(f)_q = \|f - S_n(f)\|_q.$$

Якщо $K \subset L_q(\mathbb{R}^d)$ — деякий функціональний клас, то

$$\mathcal{E}_n(K)_q = \sup_{f \in K} \mathcal{E}_n(f)_q. \tag{1}$$

Нехай далі

$$G_q(A_{2^n}) = \{g \in L_q(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp} \mathfrak{F}g \subseteq A_{2^n}\},\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

— множина цілих функцій експоненціального типу, які належать $L_q(\mathbb{R}^d)$ і носій перетворення Фур'є яких міститься в A_{2^n}. Тоді для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$E_n(f)_q = \inf_{g \in G_q(A_{2^n})} \|f - g\|_q.$$

Дана величина називається найкращим наближенням функції f в метриці простору $L_q(\mathbb{R}^d)$ функціями з $G_q(A_{2^n})$. Відповідно для функціонального класу $K \subset L_q(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$E_n(K)_q = \sup_{f \in K} E_n(f)_q. \tag{2}$$

Далі по тексту вживається запис $A \asymp B$, який означає, що для невід'ємних величин A та B, залежних від деякої сукупності параметрів, існує додатна стала C така, що $C^{-1}A \leqslant B \leqslant CA$. Якщо тільки $B \leqslant CA$ ($B \geqslant C^{-1}A$), то пишемо $B \ll A$ ($B \gg A$). Із контексту буде зрозуміло від яких параметрів не залежить стала $C > 0$. Ми не будемо акцентувати на цьому увагу щоразу при використанні символів " $\asymp$ ", " $\ll$ ", " $\gg$ ".

Зауважимо, що при $1 < q < \infty$ має місце співвідношення (див., наприклад, [8])

$$E_n(f)_q \asymp \mathcal{E}_n(f)_q. \tag{3}$$

2. Еквівалентний спосіб нормування просторів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ в термінах цілих функцій експоненціального типу. В цьому пункті запишемо еквівалентне з точністю до абсолютних сталих представлення норми функцій із просторів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, яке далі буде суттєво нами використане при дослідженні апроксимативних характеристик.

Наведемо спочатку необхідні позначення. Нехай V_m, $m \in \mathbb{N}$, позначає ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{m^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{\cos mx_j - \cos 2mx_j}{x_j^2}.$$

Тоді для $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, покладемо

$$\mathbb{V}_{2^s} f = \frac{1}{\pi^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{t}) V_{2^s}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t},$$

$$\sigma_0 f = \mathbb{V}_{2^0} f, \quad \sigma_s f = \mathbb{V}_{2^s} f - \mathbb{V}_{2^{s-1}} f, \quad \text{якщо} \quad s \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що аналогічно як і $S_{2^s}[f]$ функцію $\mathbb{V}_{2^s} f$ в термінах перетворень Фур'є можна записати таким чином (див., наприклад, [6, с. 359])

$$\mathbb{V}_{2^s} f = \mathfrak{F}^{-1}\left(\mu_{2^s} \mathfrak{F} f\right),$$

де

$$\mu_{2^s}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \mu_{2^s}(x_j), \quad \mu_{2^s}(x_j) = \begin{cases} 1, & |x_j| \leqslant 2^s, \\ \frac{1}{2^s}(2^{s+1} - x_j), & 2^s < |x_j| \leqslant 2^{s+1}, \\ 0, & 2^{s+1} < |x_j|. \end{cases}$$

Зауважимо також, що $\sigma_s f$ — цілі функції експоненціального типу степенів 2^{s+1} по кожній змінній, які належать $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (див., наприклад, [6, с. 360]), причому перетворення Фур'є функції $\sigma_s f$ зосереджене в $\left\{\boldsymbol{\lambda} : 2^{s-1} \leqslant \max\limits_{j=\overline{1,d}} |\lambda_j| \leqslant 2^{s+1}\right\}$. Крім того, в сенсі збіжності у метриці простору $L_p(\mathbb{R}^d)$ для функцій $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$,

$1 \leqslant p \leqslant \infty$, справедлива рівність

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} \sigma_s f,$$

у якій частинні суми n-го порядку ряду, що записаний справа, реалізують порядок найкращого наближення $E_n(f)_p$.

Тепер сформулюємо встановлене у роботі [9] твердження про декомпозиційне представлення норми функцій із просторів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$.

Теорема A. *Нехай* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *і* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$. *Функція* $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, *тоді і тільки тоді, коли вона представляється збіжним в метриці* $L_p(\mathbb{R}^d)$ *рядом*

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s, \tag{4}$$

де Q_s *— цілі функції експоненціального типу степенів не вище* 2^s *по кожній змінній, для яких виконуються умови*

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|Q_s\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} < \infty, \quad \textit{якщо} \quad 1 \leqslant \theta < \infty,$$

і

$$\sup_{s \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})}, < \infty, \quad \textit{якщо} \quad \theta = \infty.$$

Більше того мають місце співвідношення

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \ll \left(\sum_{s=0}^{\infty} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|Q_s\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} \quad \textit{при} \quad 1 \leqslant \theta < \infty$$

і

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \ll \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})} \quad \textit{при} \quad \theta = \infty.$$

Якщо ж, крім цього, частинні суми n*-го порядку ряду (4) реалізують найкраще наближення* $E_n(f)_p$ *(або принаймні його порядок),* *то*

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{s=0}^{\infty} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|Q_s\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} \quad \text{при} \;\; 1 \leqslant \theta < \infty$$

і

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} \frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})} \quad \text{при} \;\; \theta = \infty.$$

Безпосередньо із теореми А випливає наступне твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *і* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$. *Функція* $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant \theta < \infty$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|\sigma_s f\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} < \infty,$$

причому

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{s=0}^{\infty} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|\sigma_s f\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta}. \tag{5}$$

Відповідно функція $f \in B^{\Omega}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\sup_{s\in\mathbb{Z}_+} \frac{\|\sigma_s f\|_p}{\Omega(2^{-s})} < \infty,$$

причому

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} \frac{\|\sigma_s f\|_p}{\Omega(2^{-s})}.$$

3. Наближення функцій з класів $B^{\Omega}_{1,\theta}(\mathbb{R}^d)$ цілими функціями експоненціального типу в просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$. В цьому пункті встановимо точні за порядком оцінки величин $\mathcal{E}_n(B^{\Omega}_{1,\theta}(\mathbb{R}^d))_q$ і $E_n(B^{\Omega}_{1,\theta}(\mathbb{R}^d))_q$, $1 < q < \infty$.

Перш ніж перейти до формулювання та доведення основного результату цього пункту, наведемо допоміжне твердження.

Теорема Б [6, с. 150]. *Якщо $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, то для цілої функції експоненціального типу $g_{\boldsymbol{\nu}} \in L_p(\mathbb{R}^d)$ має місце нерівність*

$$\|g_{\boldsymbol{\nu}}\|_q \leqslant 2^d \Big(\prod_{j=1}^{d} \nu_j \Big)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|g_{\boldsymbol{\nu}}\|_p \,. \tag{6}$$

Нерівність (6) називають нерівністю різних метрик Нікольського.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $1 < q < \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, де $\alpha > d(1 - \frac{1}{q})$, $l \in \mathbb{N}$. Тоді при $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ справедливі порядкові оцінки*

$$\mathcal{E}_n(B^{\Omega}_{1,\theta}(\mathbb{R}^d))_q \asymp E_n(B^{\Omega}_{1,\theta}(\mathbb{R}^d))_q \asymp \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1-\frac{1}{q})}. \tag{7}$$

Доведення. Спочатку встановимо в (7) оцінки зверху. Внаслідок вкладення $B^{\Omega}_{1,\theta}(\mathbb{R}^d) \subset H^{\Omega}_1(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant \theta < \infty$, яке безпосередньо випливає із наслідку 1, та співвідношення (3), нам достатньо отримати оцінку зверху для величини $E_n(H^{\Omega}_1(\mathbb{R}^d))_q$.

Оскільки для $f \in H^{\Omega}_1(\mathbb{R}^d)$ згідно з наслідком 1 виконується співвідношення $\|\sigma_s f\|_1 \ll \Omega(2^{-s})$, то використавши послідовно нерівність Мінковського, нерівність різних метрик Нікольського (6) та умову (S) з $\alpha > d(1 - \frac{1}{q})$, отримуємо

$$E_n(f)_q \leqslant \Big\| f - \sum_{s=0}^{n-1} \sigma_s f \Big\|_q = \Big\| \sum_{s=n}^{\infty} \sigma_s f \Big\|_q \leqslant \sum_{s=n}^{\infty} \|\sigma_s f\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{sd(1-\frac{1}{q})} \|\sigma_s f\|_1 \ll \sum_{s=n}^{\infty} \Omega(2^{-s}) 2^{sd(1-\frac{1}{q})} =$$

$$= \sum_{s=n}^{\infty} \frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-(\alpha - d(1-\frac{1}{q}))s} \ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-(\alpha - d(1-\frac{1}{q}))s} \asymp$$

$$\asymp \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1-\frac{1}{q})}.$$

Оцінки зверху в (7) встановлено.

Тепер перейдемо до встановлення оцінок знизу. Оскільки має місце вкладення $B^{\Omega}_{1,1}(\mathbb{R}^d) \subset B^{\Omega}_{1,\theta}(\mathbb{R}^d)$, $1 < \theta \leqslant \infty$, яке безпосередньо випливає із наслідку 1, то з врахуванням (3), достатньо отримати оцінку знизу для величини $\mathcal{E}_n(B^{\Omega}_{1,1}(\mathbb{R}^d))_q$.

Розглянемо функцію

$$f(\boldsymbol{x}) = C_3\Omega(2^{-n})\phi_{n+1}(\boldsymbol{x}),\ C_3 > 0,$$

де

$$\phi_{n+1}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d}(V_{2^{n+1}}(x_j) - V_{2^n}(x_j)),\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,\ n \in \mathbb{N}.$$

Покажемо, що при певному виборі сталої $C_3 > 0$ функція f належить класу $B^{\Omega}_{1,1}(\mathbb{R}^d)$. З цією метою оцінимо спочатку $\|\phi_{n+1}\|_p$ при $1 \leqslant p < \infty$. Маємо

$$\|\phi_{n+1}\|_p = \left\| \prod_{j=1}^{d}(V_{2^{n+1}}(x_j) - V_{2^n}(x_j)) \right\|_p = \prod_{j=1}^{d} \|V_{2^{n+1}}(x_j) - V_{2^n}(x_j)\|_p =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \left\| \frac{\cos 2^{n+1}x_j - \cos 2^{n+2}x_j}{2^{n+1}x_j^2} - \frac{\cos 2^n x_j - \cos 2^{n+1}x_j}{2^n x_j^2} \right\|_p =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \left\| \frac{\sin(3\cdot 2^n x_j)\sin 2^n x_j - 2\sin(3\cdot 2^{n-1}x_j)\sin 2^{n-1}x_j}{2^n x_j^2} \right\|_p =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \left\| \frac{\sin(3\cdot 2^{n-1}x_j)\sin 2^{n-1}x_j \left(2\cos(3\cdot 2^{n-1}x_j)\cos 2^{n-1}x_j - 1\right)}{2^{n-1}x_j^2} \right\|_p =$$

$$= 2^{(n-1)d\left(1-\frac{1}{p}\right)} \prod_{j=1}^{d} \left\| \frac{\sin 3x_j \sin x_j (2\cos 3x_j \cos x_j - 1)}{x_j^2} \right\|_p . \qquad (8)$$

Оцінимо норму в співвідношенні (8).

$$\left\| \frac{\sin 3x_j \sin x_j (2\cos 3x_j \cos x_j - 1)}{x_j^2} \right\|_p \leqslant \left\| \frac{3\sin 3x_j \sin x_j}{x_j^2} \right\|_p =$$

$$= \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{3\sin 3x_j \sin x_j}{x_j^2} \right|^p dx_j + \int_{|x_j|>\pi} \left| \frac{3\sin 3x_j \sin x_j}{x_j^2} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{9x_j^2}{x_j^2} \right|^p dx_j + \int\limits_{|x_j|>\pi} \left| \frac{3}{x_j^2} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} = C_4, C_4 > 0. \tag{9}$$

$$\left\| \frac{\sin 3x_j \sin x_j (2\cos 3x_j \cos x_j - 1)}{x_j^2} \right\|_p \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int\limits_{\frac{\pi}{36}}^{\frac{\pi}{18}} \left| \frac{\sin 3x_j \sin x_j (2\cos 3x_j \cos x_j - 1)}{x_j^2} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{36} (2\cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{18} - 1)}{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2} \left(\int\limits_{\frac{\pi}{36}}^{\frac{\pi}{18}} dx_j \right)^{\frac{1}{p}} = C_5, C_5 > 0. \tag{10}$$

Таким чином, беручи до уваги (8), (9) та (10), отримаємо порядкову оцінку

$$\|\phi_{n+1}\|_p \asymp 2^{nd(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 \leqslant p < \infty. \tag{11}$$

Далі, оскільки носій перетворення Фур'є функції f міститься в множині $\left\{ \boldsymbol{\lambda} : 2^n \leqslant \max\limits_{j=\overline{1,d}} |\lambda_j| \leqslant 2^{n+2} \right\}$, то за винятком, можливо, $\sigma_n f$, $\sigma_{n+1} f$ та $\sigma_{n+2} f$ для усіх інших $\sigma_s f$ виконується рівність $\sigma_s f = 0$.

Позначимо

$$v_n(\boldsymbol{x}) = V_{2^n}(\boldsymbol{x}) - V_{2^{n-1}}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Тоді, враховуючи, що $\|V_m\|_1 \leqslant C_6$, $C_6 > 0$, $m \in \mathbb{N}$ (див., наприклад, [6, с. 358]), отримуємо

$$\|v_n\|_1 = \left\|V_{2^n} - V_{2^{n-1}}\right\|_1 \leqslant 2C_6$$

і згідно з властивістю згортки та співвідношенням (11)

$$\|\sigma_n f\|_1 \ll \Omega(2^{-n}) \|v_n\|_1 \|\phi_{n+1}\|_1 \ll \Omega(2^{-n}). \tag{12}$$

Аналогічно

$$\|\sigma_s f\|_1 \ll \Omega(2^{-n}) \tag{13}$$

при $s = n+1, n+2$.

Беручи до уваги (12) та (13), одержуємо

$$\sum_{s\in Z_+} \Omega^{-1}(2^{-s})\|\sigma_s f\|_1 = \Omega^{-1}(2^{-n})\|\sigma_n f\|_1 +$$

$$+\Omega^{-1}(2^{-(n+1)})\|\sigma_{n+1} f\|_1 + \Omega^{-1}(2^{-(n+2)})\|\sigma_{n+2} f\|_1 \ll$$

$$\ll \frac{\Omega(2^{-n})}{\Omega(2^{-n})} + \frac{\Omega(2^{-n})}{\Omega(2^{-(n+1)})} + \frac{\Omega(2^{-n})}{\Omega(2^{-(n+2)})} \leqslant C_7, \ C_7 > 0,$$

а, отже, згідно з (5) функція f при відповідному виборі сталої $C_3 > 0$ належить класу $B^{\Omega}_{1,1}$.

Далі, оскільки $S_n(f) = 0$, то з врахуванням (11) маємо

$$\mathcal{E}_n(B^{\Omega}_{1,1}(\mathbb{R}^d))_q \geqslant \mathcal{E}_n(f)_q = \|f - S_n(f)\|_q = \|f\|_q \asymp$$

$$\asymp \Omega(2^{-n})\|\phi_{n+1}\|_q \asymp \Omega(2^{-n})2^{nd(1-\frac{1}{q})}.$$

Таким чином, оцінки знизу в (7) отримано.

Теорему доведено.

Сформулюємо наслідок теореми 1 для класів $B^r_{1,\theta}(\mathbb{R}^d)$.

Наслідок 2. *Нехай* $1 < q < \infty$, $r > d(1 - \frac{1}{q})$. *Тоді при* $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *справедливі порядкові оцінки*

$$\mathcal{E}_n(B^r_{1,\theta}(\mathbb{R}^d))_q \asymp E_n(B^r_{1,\theta}(\mathbb{R}^d))_q \asymp 2^{-n\left(r-d\left(1-\frac{1}{q}\right)\right)}.$$

На завершення зазначимо, що порядкові оцінки величин (1) та (2) для ізотропних класів Нікольського – Бєсова періодичних функцій багатьох змінних та їх узагальнень (за гладкісним параметром) було встановлено відповідно у роботах [10] та [11].

1. *Бернштейн С.Н.* Конструктивная теория функций (1931–1953): Собрание сочинений. — М.: Изд. АН СССР, 1954. — **2**. — 626 с.

2. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483 – 522.

3. *Бесов О.В.* О некотором семействе функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1961. — **60**. — С. 42 – 81.

4. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1951. — **38**. — С. 244 – 278.
5. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1967. — 436 с.
6. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с.
7. *Лизоркин П.И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1969. — **105**. — С. 89 – 167.
8. *Лизоркин П.И.* Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношение с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$ // Сиб. мат. журн. — 1968. — **9**, № 5. — С. 1127 – 1152.
9. *Миронюк В.В.* Наближення функцій багатьох змінних з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ цілими функціями експоненціального типу // Укр. мат. журн. — В друці.
10. *Романюк А.С.* Приближение изотропных классов $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **5**, № 1. — С. 263 – 278.
11. *Стасюк С.А.* Наближення класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних поліномами зі спектром в кубічних областях // Матем. студії. — 2011. — **35**, № 1. — С. 66 – 73.