Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, Т.10, №1, 161-168

УДК 517.5

І. Ю. Меремеля (Ін–т математики НАН України, Київ)
М. В. Савчук (Ін–т підготовки кадрів державної служби зайнятості України, Київ)

ОЦІНКА ЗМІШАНОЇ ПОХІДНОЇ ГОЛОМОРФНОЇ ФУНКЦІЇ В ПОЛІКРУЗІ

For the Hardy space H_1 of holomorphic functions in the polydisk, we obtain the exact inequalities of mixed derivatives.

Доведено точні нерівності для змішаних похідних голоморфних функцій з простору Гарді H_1 в полікрузі.

Оцінки похідних голоморфних функцій утворюють окрему групу екстремальних задач сучасної геометричної теорії функцій однієї змінної. В монографіях [1, 2] наведено багато фактів і велику бібліографію з цього питання.

Останнім часом спостерігається значний інтерес до аналогічних досліджень у випадку голоморфних функцій багатьох змінних, які переважно стосуються оцінок типу Шварца–Піка [3—5]. Нагадаємо, що в одновимірному випадку так називається співвідношення

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le n! \frac{1-|f(z)|^2}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1} \quad \forall\, z \in \mathbb{D},\ n \in \mathbb{N},$$

яке справджується (див. [6, 7]) для будь-якої голоморфної в крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функції f такої, що $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \le 1$.

У даній роботі ми доведемо точну оцінку змішаної похідної голоморфної функції з простору Гарді H_1 в полікрузі.

Вихідним пунктом наших досліджень став результат А. Макінтайра і В. Рогозинського [8] (див. також [9, с. 306], [10, с. 518]), які довели, що *для будь-якої голоморфної функції f з простору Гарді H_1 (див. означення нижче) в одиничному крузі $\mathbb{D}$ справджується точна нерівність*

$$|f'(z)| \le \|f\|_1 \frac{|z| + \sqrt{1+|z|^2}}{(1-|z|^2)^2}, \quad \forall\, z \in \mathbb{D}. \tag{1}$$

Рівність в (1) при фіксованому $z \in \mathbb{D}$ досягається для функції

$$f(w) = \frac{(1-\overline{y}w)^2}{(1-\overline{z}w)^4},$$

де $y := z - e^{i \arg z}(1-|z|^2)/\sqrt{1+|z|^2}$.

Окрім самої оцінки (1) робота [8] є цікавою ще й з методичної точки зору. Запропонований в ній метод доведення (1) вирізняється особливою простотою і елегантністю (досить порівняти його з методами доведення співвідношення (1), наведеними в [9] і [10], які ґрунтуються відповідно на загальних співвідношеннях двоїстості і теорії ганкелевих операторів).

Нам видається важливим поширення цього методу на багатовимірний випадок.

Перед постановкою задачі і формулюванням основного результату дослідження наведемо необхідні означення.

Нехай d — натуральне число, $\mathbb{C}^d$ — множина всіх впорядкованих наборів $\mathbf{z} := (z_1, \ldots, z_d)$ з d комплексних чисел, $\mathbb{D}^d := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : \max\limits_{1 \le j \le m} |z_j| < 1\}$ — одиничний полікруг і $\mathbb{T}^d := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : |z_j| = 1, j = \overline{1,d}\}$ — кістяк полікруга $\mathbb{D}^d$. Нормовану міру Лебега на $\mathbb{T}^d$, тобто добуток нормованих мір Лебега одиничних кіл, з яких складається $\mathbb{T}^d$ будемо позначати через σ.

Простір Гарді $H_1 := H_1(\mathbb{D}^d)$ складається з усіх голоморфних функцій $f : \mathbb{D}^d \to \mathbb{C}$, для яких

$$\|f\|_1 := \sup_{0<\varrho<1} \int_{\mathbb{T}^d} |f_\varrho| d\sigma < \infty,$$

де $f_\varrho(\mathbf{w}) := f(\varrho \mathbf{w})$, $\varrho \mathbf{w} := (\varrho w_1, \ldots, \varrho w_d)$.

Добре відомо (див., наприклад, [11]), що для будь-якої функції $f \in H_1$ на торі $\mathbb{T}^d$ існують радіальні граничні значення f^*, які утворюють функцію з $L_1(\mathbb{T}^d)$, причому $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{T}^d} |f^*| d\sigma$. З огляду на це далі будемо користуватися єдиним символом f для позначення самої функції f та її радіальних граничних значень f^*.

Нехай $\mathcal{M} := \{1, 2, \ldots, d\}$, $2^{\mathcal{M}}$ — множина усіх підмножин множини $\mathcal{M}$, $\mathfrak{m}$ — елемент (впорядкована підмножина) $2^{\mathcal{M}}$, $|\mathfrak{m}|$ — потужність множини $\mathfrak{m}$ і $\overline{\mathfrak{m}}$ — доповнення множини $\mathfrak{m}$ до множини $\mathcal{M}$.

Позначимо через

$$D_j(f) := \frac{\partial}{\partial z_j} f$$

частинну похідну за змінною z_j і відповідно D_j — оператор взяття частинної похідної, а через

$$D_{\mathfrak{m}}(f) := \prod_{j \in \mathfrak{m}} D_j(f)$$

змішану похідну за групою змінних $\mathfrak{m}$ і $D_{\mathfrak{m}}$ — оператор взяття змішаної похідної за групою змінних $z_j, j \in \mathfrak{m}$, де під добутком розуміється операторний добуток.

Покладемо $\mathbf{D}(f) := D_{\mathcal{M}}(f) := \partial^d f / (\partial z_1 \cdots \partial z_d)$.

Теорема. *Нехай функція $f \in H_1(\mathbb{D}^d)$, $d \in \mathbb{N}$. Тоді для будь-яких $\mathbf{z} \in \mathbb{D}^d$*

$$|\mathbf{D}(f)(\mathbf{z})| \le \|f\|_1 \prod_{j=1}^{d} \frac{|z_j| + \sqrt{1 + |z_j|^2}}{(1 - |z_j|^2)^2}. \tag{2}$$

Рівність в (2) досягається для функції

$$f(\mathbf{w}) = \prod_{j=1}^{d} \frac{(1 - \overline{y}_j w_j)^2}{(1 - \overline{z}_j w_j)^4}, \tag{3}$$

де $y_j := z_j - e^{i \arg z_j}(1 - |z_j|^2)/\sqrt{1 + |z_j|^2}$.

В доведенні теореми ми будемо користуватися наступною формулою для змішаної похідної добутку двох функцій.

Твердження. *Нехай f і g — функції, голоморфні в $\mathbb{D}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$\mathbf{D}(fg) = \sum_{\mathfrak{m} \in 2^{\mathcal{M}}} D_{\mathfrak{m}}(f) D_{\overline{\mathfrak{m}}}(g). \tag{4}$$

Доведення. Нехай $\mathscr{H}$ — множина функцій, голоморфних в $\mathbb{D}^d$, I — тотожний оператор, $D_j I$ і $I D_j$ — оператори, задані на прямому добутку $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$, які діють відповідно за правилами $D_j I(fg) = D_j(f)g$ і $ID_j(fg) = fD_j(g)$.

Тоді значення оператора $\mathcal{D}_j$, визначеного на $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ за правилом $\mathcal{D}_j(fg) = D_j(fg)$, можна зобразити у вигляді

$$\mathcal{D}_j = D_j I + ID_j.$$

Отже,

$$\prod_{j=1}^{d} \mathcal{D}_j = \prod_{j=1}^{d} \left(D_j I + ID_j \right). \tag{5}$$

Скориставшись тепер формальним правилом множення суми і рівностями

$$\begin{aligned} D_j I(D_k I) &= (D_j(D_k))I, \\ ID_j(ID_k) &= I(D_j(D_k)), \\ D_j I(ID_k) &= D_j D_k, \\ ID_j(D_k I) &= D_k D_j, \end{aligned}$$

де під символом $D_j D_k$ розуміємо оператор, визначений на $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$, який діє за правилом $D_j D_k(fg) = D_j(f) D_k(g)$, з рівності (5) отримаємо вираз для образу оператора $\prod_{j=1}^{d} \mathcal{D}_j$:

$$\prod_{j=1}^{d} \mathcal{D}_j(fg) = \sum_{\mathfrak{m} \in 2^{\mathcal{M}}} \prod_{j \in \mathfrak{m}} D_j(f) \prod_{k \in \overline{\mathfrak{m}}} D_k(g) = \sum_{\mathfrak{m} \in 2^{\mathcal{M}}} D_{\mathfrak{m}}(f) D_{\overline{\mathfrak{m}}}(g).$$

На завершення доведення залишається врахувати, що $\prod_{j=1}^{d} \mathcal{D}_j(fg) = \mathbf{D}(fg)$.

Доведення теореми. Нехай $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Позначимо

$$(1 - \bar{\mathbf{t}}\mathbf{z})^m := \prod_{j=1}^{d} (1 - \bar{t}_j z_j)^m.$$

Добре відомо [11], [12 с. 43], що для будь-якої функції $f \in H_1$ справджується формула Коші

$$f(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{f(\mathbf{t})}{1 - \bar{\mathbf{t}}\mathbf{z}} d\sigma(\mathbf{t}), \quad \forall\ z \in \mathbb{D}.$$

Оскільки при фіксованому $\mathbf{t} \in \mathbb{T}^d$

$$\mathbf{D}\left(\frac{1}{1-\bar{\mathbf{t}}\mathbf{z}}\right) = \prod_{j=1}^{d} \frac{\bar{t}_j}{(1-\bar{t}_j z_j)^2} =: \frac{1}{(1-\bar{\mathbf{t}}\mathbf{z})^2}\bar{\mathbf{t}},$$

то

$$\mathbf{D}f(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{f(\mathbf{t})}{(1-\bar{\mathbf{t}}\mathbf{z})^2}\bar{\mathbf{t}}d\sigma(\mathbf{t}), \quad \forall\ z \in \mathbb{D}. \tag{6}$$

Нехай h — довільна функція вигляду $h(\mathbf{z}) = \prod_{j=1}^{d} h_j(z_j)$, де $h_j : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ — функції однієї змінної з простору Гарді $H_1(\mathbb{D})$ в крузі $\mathbb{D}$.

Зафіксуємо $\mathbf{z} \in \mathbb{D}^d$ і застосуємо формулу (6) до функції $F(\mathbf{w}) := f(\mathbf{w})h(\mathbf{w})(1-\mathbf{w}\bar{\mathbf{z}})^2$, яка, очевидно, належить простору H_1.

Маємо

$$\mathbf{D}(F)(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{t})h(\mathbf{t})\frac{(1-\mathbf{t}\bar{\mathbf{z}})^2}{(1-\bar{\mathbf{t}}\mathbf{z})^2}\bar{\mathbf{t}}d\sigma(\mathbf{t}). \tag{7}$$

Зобразивши функцію F у вигляді $F = fg$, де $g(\mathbf{w}) = h(\mathbf{w})(1-\mathbf{w}\bar{\mathbf{z}})^2$, обчислимо величину в лівій частині цієї рівності за формулою (4):

$$\mathbf{D}(F)(\mathbf{w}) = \sum_{\mathfrak{m}\in 2^{\mathcal{M}}} D_{\mathfrak{m}}f(\mathbf{w})D_{\overline{\mathfrak{m}}}(g)(\mathbf{w}) =$$

$$= \sum_{\mathfrak{m}\in 2^{\mathcal{M}}} D_{\mathfrak{m}}f(\mathbf{w}) \prod_{k\in\overline{\mathfrak{m}}} \frac{\partial}{\partial w_k}(h(\mathbf{w})(1-\mathbf{w}\bar{\mathbf{z}})^2) =$$

$$= \sum_{\mathfrak{m}\in 2^{\mathcal{M}}} D_{\mathfrak{m}}f(\mathbf{w}) \prod_{j\in\mathfrak{m}} \left(h_j(w_j)(1-w_j\bar{z}_j)^2\right) \prod_{k\in\overline{\mathfrak{m}}} \frac{\partial}{\partial w_k}(h_k(w_k)(1-w_k\bar{z}_k)^2) =$$

$$= \sum_{\mathfrak{m}\in 2^{\mathcal{M}}} \Bigg(D_{\mathfrak{m}}f(\mathbf{w}) \prod_{j\in\mathfrak{m}} (h_j(w_j)(1-w_j\bar{z}_j)) \times$$

$$\times \prod_{k\in\overline{\mathfrak{m}}} \left(h_k'(w_k)(1-w_k\bar{z}_k)^2 - 2\bar{z}_k h_k(w_k)(1-w_k\bar{z}_k)\right)\Bigg). \tag{8}$$

Виберемо тепер функції h_k так, щоб

$$|h_k(w)| = 1, \quad \forall\ w \in \mathbb{T} \tag{9}$$

і
$$h_k'(z_k)(1-|z_k|^2)^2 - 2\overline{z}_k h_k(z_k)(1-|z_k|^2) = 0, \quad k=\overline{1,d}. \tag{10}$$
Тоді за умови (10) з рівності (8) отримаємо формулу
$$\mathbf{D}(F)(\mathbf{z}) = \mathbf{D}f(\mathbf{z}) \prod_{j\in\mathcal{M}} h_j(z_j)(1-|z_j|^2)^2. \tag{11}$$

Підставивши отриманий вираз $\mathbf{D}(F)$ в (7) і оцінивши інтеграл в правій частині (7) з урахуванням умови (9), отримаємо співвідношення

$$|\mathbf{D}f(\mathbf{z})| \prod_{j\in\mathcal{M}} |h_j(z_j)|\,(1-|z_j|^2)^2 \le \int_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{t})||h(\mathbf{t})| \prod_{j=1}^{d} \frac{|1-t_j\overline{z}_j|^2}{|1-\overline{t}_j z_j|^2} d\sigma(\mathbf{t}) =$$
$$= \int_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{t})| d\sigma(\mathbf{t}) = \|f\|_1.$$

Звідси випливає нерівність
$$|\mathbf{D}f(\mathbf{z})| \le \|f\|_1 \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{|h_j(z_j)|\,(1-|z_j|^2)^2}. \tag{12}$$

Покажемо тепер, що умови (9) і (10) завжди можна задовольнити.

Справді, нехай
$$h_k(w) = e^{-i\arg z_k} \frac{w-y_k}{1-\overline{y}_k w}, \tag{13}$$

де $y_k = \varrho_k e^{i\arg z_k}$, $-1 < \varrho_k < 1$.

Зрозуміло, що h_k задовольняє умову (9). Далі
$$\frac{h_k'(w)}{h_k(w)} = \frac{\partial}{\partial w} \ln h_k(w) = \frac{1}{w-y_k} + \frac{\overline{y}_k}{1-\overline{y}_k w} = \frac{1-|y_k|^2}{(w-y_k)(1-\overline{y}_k w)}.$$

Отже,
$$\frac{h_k'(z_k)}{h_k(z_k)} = \frac{1-\varrho_k}{e^{i\arg z_k}(|z_k|-\varrho_k)(1-\varrho_k|z_k|)}.$$

Але згідно з (10) має виконуватися рівність

$$\frac{h_k'(z_k)}{h_k(z_k)} = \frac{2\overline{z}_k}{1-|z_k|^2}.$$

Прирівнявши праві частини цих двох рівностей, після елементарних перетворень отримаємо квадратне рівняння відносно ϱ_k

$$(1+|z_k|^2)\varrho_k^2 - 2|z_k|(1+|z_k|^2)\varrho_k + 3|z_k|^2 - 1 = 0.$$

Його коренями є числа $|z_k| \pm (1-|z_k|^2)/\sqrt{1+|z_k|^2}$.

Зрозуміло, що корінь $\varrho_k = |z_k| - (1-|z_k|^2)/\sqrt{1+|z_k|^2}$ завжди буде належати проміжку $(-1,1)$, якщо $|z_k| < 1$. Тому, поклавши в (13) $y_k = z_k - e^{i\arg z_k}(1-|z_k|^2)/\sqrt{1+|z_k|^2}$, отримаємо функції, які задовольняють умови (9) і (10). Нарешті, підставивши в (12) значення

$$h_j(z_j) = e^{-i\arg z_k}\frac{z_j - y_j}{1-\overline{y}_j z_i} = \frac{(1-|z_j|^2)/\sqrt{1+|z_j|^2}}{1-|z_j|(|z_j| - (1-|z_j|^2)/\sqrt{1+|z_j|^2})} =$$

$$= \frac{1}{|z_j| + \sqrt{1+|z_j|^2}}, \tag{14}$$

отримаємо нерівність (2).

Покажемо тепер, що функція f, визначена за правилом (3), є екстремальною, тобто для неї співвідношення (2) при даному фіксованому $\mathbf{z} \in \mathbb{D}^d$ є рівністю.

Перш за все зауважимо, що функція f є голоморфною в $\mathbb{D}^d$ і

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{T}^d}\left|\frac{1-\overline{\mathbf{y}}\mathbf{t}}{(1-\overline{\mathbf{z}}\mathbf{t})^2}\right|^2 d\sigma(\mathbf{t}) \le \prod_{j=1}^{d}\left(\frac{1+|y_j|}{(1-|z_j|)^2}\right)^2 < \infty.$$

Отже, $f \in H_1$.

Згідно з формулою (7) з урахуванням (8), умови (10) і рівностей (11), (14), одержимо

$$\mathbf{D}f(\mathbf{z})\prod_{j=1}^{d}\frac{(1-|z_j|^2)^2}{|z_j| + \sqrt{1+|z_j|^2}} = \int_{\mathbb{T}^d}\frac{(1-\overline{\mathbf{y}}\mathbf{t})^2}{(1-\overline{\mathbf{z}}\mathbf{t})^4}\,\frac{\mathbf{t}-\mathbf{y}}{1-\overline{\mathbf{y}}\mathbf{t}}\,\frac{(1-\mathbf{t}\overline{\mathbf{z}})^2}{(1-\overline{\mathbf{t}}\mathbf{z})^2}\overline{\mathbf{t}}d\sigma(\mathbf{t}) =$$

$$= \int_{\mathbb{T}^d} \left| \frac{1 - \overline{\mathbf{y}}\mathbf{t}}{(1 - \overline{\mathbf{z}}\mathbf{t})^2} \right|^2 d\sigma(\mathbf{t}) = \|f\|_1.$$

Теорему доведено.

1. *Kresin G., Maz'ya V.* Sharp Real-Part Theorems: A Unified Approach. — Berlin: Springer—Verlag, 2007. — 144 p.
2. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Schwarz–Pick Type Inequalities. — Basel: Birkhauser Verlag, 2008. — 156 p.
3. *Knese G.* A Schwarz Lemma on the Polydisk // Proc. Amer. Math. Soc. — 2007. — **135**, № 9. — P. 2759 – 2768.
4. *Anderson J. M., Dritschel M. A., Rovnyak J.* Schwarz–Pick Inequalities for the Schur-Agler Class on the Polydisk and Unit Ball // Comp. Meth. Funct. T. — 2008. — **8**, № 2. — P. 339 – 361.
5. *Chen Zh., Liu Y.* Schwarz–Pick estimates for holomorphic mappings from the polydisk to the unit ball // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — **376**. — P. 123 – 128.
6. *Anderson J. M., Rovnyak J.* On generalized Schwarz–Pick estimates // Mathematika. — 2006. — **53**. — P. 161 – 168.
7. *Dai S., Pan Y.* Note on Schwarz–Pick estimates for bounded and positive real part analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. — 2008. — **136**, № 2. — P. 635 – 640.
8. *Macintyre A. J., Rogosinski W. W.* Some elementary inequalities in function theory // Edinburgh Math. Notes. — 1945. — **35.** — P. 1 – 3.
9. *Macintyre A. J., Rogosinski W. W.* Extremum problems in the theory of analytic functions // Acta Math. — 1950. — **82.** — P. 275 – 325.
10. *Garsia S. R., Ross W. T.* A Non-Linear Extremal Problem on the Hardy Space // Comp. Meth. Funct. T. — 2009. — **9**, № 2. — P. 485 – 524.
11. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. — М.: Мир, 1974. — 160 с.
12. *Фукс Б. А.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. — М.: Физматгиз, 1962. — 420 с.