Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, T.10, №1, 133-139

УДК 517.5

Б. А. Клищук (Ін–т математики НАН України, Київ)

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ, СОХРАНЯЮЩИХ ГИПЕРКОМПЛЕКСНУЮ ВЫПУКЛОСТЬ

We obtained for the case of the space $\mathbb{H}^n$ *an analogical proposition to the theorem about homeomorphic transformation of the space* $\mathbb{C}^n$ *that is strictly invariant on linear convex compact sets. It was formulated the fundamental theorem of affine geometry in* $\mathbb{H}^n$*.*

Для случая гиперкомплексного пространства $\mathbb{H}^n$ *получено аналог теоремы о гомеоморфном преобразовании комплексного пространства* $\mathbb{C}^n$*, строго инвариантного на линейно выпуклых компактах. Сформулирована основная теорема аффинной геометрии в* $\mathbb{H}^n$*.*

Понятие гиперкомплексной выпуклости играет достаточно важную роль в кватернионном анализе. Начало развития кватернионного анализа связывают с именами У.Г. Гамильтона, который ввел понятие кватернионов та Р. Фютера, который существенно развил кватернионный анализ.

Кватернионы и кватернионные функции имеют достаточно широкое применение. В частности, их используют для описания электромагнитных полей, в задачах физики и сейсморазведки, в теории фракталов и т.д. Поэтому интерес к кватернионному анализу продолжает расти. В наше время его развивают такие математики как О.Ф. Герус, В.В. Кравченко, М. Шапиро, А. Садбери, К. Гёрлебек, В. Шпрёссик и другие.

Понятие гиперкомплексной выпуклости, аналогичное понятию линейной выпуклости А. Мартино, ввел у 1985 году Г.А. Мкртчян.

В дальнейшем будем рассматривать пространство $\mathbb{H}^n$ — n-мерное гиперкомплексное евклидово пространство над телом кватернионов $\mathbb{H}$, где n — произвольное целое положительное число. Точки пространства $\mathbb{H}^n$ будем обозначать малыми латинскими буквами, например $x \in \mathbb{H}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ — координаты точки x.

$\mathbb{H}^n$ содержит начало координат $\Theta = (0,0,\ldots,0)$. Положим $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$, где $y = (y_1, y_2, ...y_n)$.

Целью даной работы является изучение преобразований пространства $\mathbb{H}^n$ инвариантных на гиперкомплексно выпуклых множествах.

Некоторые критерии комплексной полуаффинности отображений пространства $\mathbb{C}^n$ инвариантных(строго инвариантных) на линейно выпуклых множествах была изучена Ю.Б. Зелинским [1, 2].

Пусть E — некоторое подмножество $\mathbb{H}^n$. Множество $E^* = \{y| < x, y >\neq 1$ для всех $x \in E\}$ называется множеством, сопряженным к E. Под прямой, m-плоскостью и гиперплоскостью мы будем понимать гиперкомплексно аффинное подмногообразие $\mathbb{H}^n$ гиперкомплексной размерности 1, m и $n-1$ соответственно(вещественная же их размерность будет 4, $4m$ и $4n-4$ соответственно).

***Замечание* 1.** Если каждой точке $y \in E^*$ поставить в соответствие гиперплоскость $\{x| < x, y >= 1\}$, то сопряженное множество E^* можно интерпретировать как множество гиперплоскостей, не пересекающих множество E.

Определение 1. Множество $E \subset \mathbb{H}^n$ называется гиперкомплексно выпуклым, если для каждой точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{H}^n \setminus E$ существует гиперплоскость

$$\{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{H}^n | \sum_{j=1}^{n} (z_j - x_j)c_j = 0, \quad c_j \in \mathbb{H}\},$$

проходящая через x и не пересекающая E.

Это понятие является аналогом линейной выпуклости в $\mathbb{C}^n$. Напомним, что множество E, лежащее в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, называется линейно выпуклым, если для каждой точки $z^0 \in \mathbb{C}^n \setminus E$ существует $(n-1)$-мерная комплексная плоскость, проходящая через z^0 и не пересекающая E.

***Замечание* 2.** Известно, что умножение в алгебре кватернионов некоммутативно. В связи с этим в дальнейшем будем рассматривать правые гиперплоскости в исходном пространстве, т.е. точку с переменной координатой $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ умножаем на фиксированную точку $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ справа, а левые гиперплоскости рассматриваются в сопряженном пространстве. При этом, комплексная размерность гиперплоскости равна n, а ее вещественная размерность равна $4n-4$.

Каждое выпуклое и линейно выпуклое множество будет гиперкомплексно выпуклым, но обратное неверно: классы выпуклых и линейно выпуклых множеств уже класса гиперкомплексно выпуклых множеств. Это показывает следующий пример.

Пример. Если $n=1$, то $\mathbb{H}^n=\mathbb{H}$. В этом случае гиперплоскостью является точка, и следовательно, каждое множество $E\subset\mathbb{H}$ гиперкомплексно выпукло.

В частности, сфера $S^3\subset\mathbb{H}$ будет гиперкомплексно выпуклым множеством. Но поскольку эта сфера разбивает вещественное четырехмерное пространство $\mathbb{R}^{4n}\approx\mathbb{H}$, то она не является ни выпуклым, ни линейно выпуклым множеством.

Будем рассматривать отображение пространства $\mathbb{H}^n$ в (на) себя.

Определение 2. Отображение $f:\mathbb{H}^n\to\mathbb{H}^n$ называется гиперкомплексно полуаффинным, если система координат выбирается так, что

$$f(\alpha u+\beta v)=\delta(\alpha)f(u)+\delta(\beta)f(v),$$

где $\delta:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ — автоморфизм тела $\mathbb{H}$.

Пусть X и Y — два топологических пространства.

Скажем, что отображение $f:X\to Y$ этих пространств инвариантно (строго инвариантно) на семействе $\mathfrak{B}$ подмножеств топологического пространства, если f отображает любое подмножество $A\in\mathfrak{B}$ в (на) подмножество $\mathfrak{B}$.

Следующая теорема является гиперкомплексным вариантом основной теоремы аффинной геометрии [3]. Аналогичная теорема справедлива и в случае пространства $\mathbb{C}^n$ [1, 2].

Теорема 1 (основная теорема аффинной геометрии). *Пусть $f:\mathbb{H}^n\to\mathbb{H}^n$ — биекция, строго инвариантная на множестве прямых. Тогда f — гиперкомплексно полуаффинное отображение.*

Доказательство можно найти в [3].

Теперь рассмотрим непрерывное отображение гиперкомплексного пространства $\mathbb{H}^n$.

Предложение 1. *Пусть $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n (n \geq 2)$ — гомеоморфизм, строго инвариантный на m-плоскостях, $1 \leq m \leq n-1$. Тогда f — гиперкомплексно полуаффинное преобразование.*

Доказательство. Применим математическую индукцию по размерности. Сначала докажем, что при $m > 1$ гомеоморфизм f строго инвариантен на $(m-1)$-плоскостях. Пусть L — произвольная $(m-1)$-плоскость и $L_1 \supset L$, $L_2 \supset L$ — две разные m-плоскости. Поскольку f строго инвариантно на m-плоскостях, то $f(L_1)$ и $f(L_2)$ — тоже две разные m-плоскости. Плоскости $f(L_1)$ и $f(L_2)$ пересекаются по гиперкомплексно $(m-1)$-мерному множеству $f(L)$ в силу гомеоморфности f. Тогда образ $f(L)$ есть $(m-1)$-плоскость. Потом аналогичными рассуждениями покажем, что f строго инвариантно на $(m-2)$-плоскостях и т.д. На $(m-1)$-шаге получим, что гомеоморфизм f строго инвариантен на прямых и тогда в силу теоремы 1 f — гиперкомплексно полуаффинное преобразование.

Прежде чем перейти к формулировке основного результата этой статьи сформулируем несколько вспомогательных утверждений, которые понадобятся нам при доказательстве главной теоремы.

Определение 3. Отображение $\Phi : X \to Y$ называется многозначным, если образом точки $x \in X$ будет множество $\Phi(x) \subset Y$.

Пусть $\overset{o}{\mathbb{H}^n}$ — пространство $\mathbb{H}^n$, пополненное бесконечно удаленной точкой(т. е. $\mathbb{H}^n$ компактифицировано одной точкой или, другими словами, отождествляются все точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых хотя бы одна координата равна ∞) с топологией вещественной $4n$-мерной сферы S^{4n}. Пусть $F : \mathbb{H}^n \to \overset{o}{\mathbb{H}^n}$ — многозначное отображение, заданное по закону

$$F(x) = \{y | (\langle x, y \rangle = 1) \cup (y = \infty)\}.$$

Отображение F интересно тем, что, как очевидно, $E^* = \overset{o}{\mathbb{H}^n} \backslash F(E)$, поэтому изучение сопряженного множества E^* можно заменить изучением его дополнения $F(E)$.

Предложение 2. *Если $E_1 \subset E$, то $E_1^* \supset E^*$, $E_1^{**} \subset E^{**}$.*

Из $E_1 \subset E$ следует $F(E_1) \subset F(E)$. Тогда $E_1^* = \overset{o}{\mathbb{H}^n} \backslash F(E_1) \supset \overset{o}{\mathbb{H}^n} \backslash F(E) = E^*$.

Аналогично доказывается, что $E_1^{**} \subset E^{**}$.

Пусть I_r — открытый шар в $\mathbb{C}^n$ радиуса r. Возникает вопрос: какое множество будет сопряженным для этого шара? Ответ на него дает следующее предложение.

Предложение 3. *Для открытого шара* $I_r = \{x | x\bar{x} < r^2\}$ *сопряженным множеством является замкнутый шар* $I_r^* = \bar{I}_{1/r} = \{y |\ y\bar{y} \le 1/r^2\}$.

Доказательство. Сначала покажем, что произвольная точка шара $\bar{I}_{1/r}$ лежит в I_r^*. Это следует из неравенства Коши — Буняковского $|\langle x, y\rangle| \le |x||y|$. Действительно, $|\langle x, y\rangle| \le |x||y| < r \cdot \frac{1}{r} = 1$. Теперь если возьмем точку $y \notin \bar{I}_{1/r}$, т.е. такую, что $|y| = a > \frac{1}{r}$, тогда точка $x = \frac{1}{y} = \frac{\bar{y}}{y\bar{y}}$ лежит в шаре I_r , так как удовлетворяет неравенству $x\bar{x} = \dfrac{\bar{y}y}{(y\bar{y})^2} = \dfrac{1}{y\bar{y}} = \dfrac{1}{a^2} < r^2$ и $\langle x, y\rangle = 1$. Следовательно, $y \notin I_r^*$.

Следующие предложения мы приведем без доказательства, поскольку они доказаны Г.А. Мкртчяном [4].

Предложение 4. *Если E открыто и $\Theta \in E$, то E^* — компакт.*

Предложение 5. $(\bigcup\limits_\alpha E_\alpha)^* = \bigcap\limits_\alpha E_\alpha^*$, где E_α — произвольные множества из $\mathbb{H}^n$.

Предложение 6. *Пусть $E_i \subset H^n$, $i = 1, 2, ...,$ — последовательность компактов, такова, что $E_{i+1} \subset E_i$ и $E = \bigcap\limits_i E_i$. Тогда $E^* = \bigcup\limits_i E_i^*$.*

Теорема 2. *Для гиперкомплексной выпуклости множества E, $\Theta \in E$, необходимо и достаточно, чтобы $E^{**} = E$.*

Пусть $int\ E$ — внутренность множества $E \subset \mathbb{H}^n$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 7. *Если $E \subset \mathbb{H}^n$ — гиперкомплексно выпуклое множество, то и внутренность его $int\ E$ — гиперкомплексно выпуклое множество.*

Доказательство. Не нарушая общности, будем считать, что $\Theta \in \ \mathrm{int}\ E$. Нужно показать, что для произвольной точки $x^0 \in H^n \setminus int\ E$ существует гиперплоскость, содержащая эту точку x^0 и не пересекающая $int\ E$. Поскольку E — гиперкомплексно выпуклое множество, то это условие выполняется для всех точек из $\mathbb{H}^n \backslash (\overline{\mathrm{int}\ E})$. Осталось доказать это же для точек, принадлежащих границе ∂E. Рассмотрим $(\mathrm{int}\ E)^*$ — множество, сопряженное к *int* E. Поскольку *int* E — открытое множество, следовательно $(\mathrm{int}\ E)^*$ — компакт (предложение 4). Рассмотрим $\{x^k\}$ — сходящуюся последовательность точек в $\mathbb{H}^n \backslash E$, $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x^0$. Для каждой точки x^k существует гиперплоскость L_k содержащая x^k и не пересекающая E. Каждую гиперплоскость L_k можно задать уравнением $L_k = \{x|\langle x, y^k\rangle = 1\}$. Поскольку $(int\ E) \subset E$, то согласно предложению 2 $(int\ E)^* \supset E^*$. Выберем из последовательности $\{y^k\}$ сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} y^k = y^0$. Вследствие того, что $(int\ E)^*$ — компакт $y^0 \in (int\ E)^*$. Тогда гиперплоскость $L = \{x|\langle x, y^0\rangle = 1\}$ не пересекает int E и проходит через точку x^0, так как $\langle x^0, y^0\rangle = \langle \lim\limits_{k\to\infty} x^k, \lim\limits_{k\to\infty} y^k\rangle = \lim\limits_{k\to\infty}\langle x^k, y^k\rangle = 1$, что и требовалось доказать.

Следующая теорема является аналогом соответствующего утверждения для случая линейно выпуклых компактов в пространстве $\mathbb{C}^n$. Она и является основным результатом этой статьи.

Теорема 3. *Гомеоморфное преобразование* $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ $(n \geq 2)$ *строго инвариантное на гиперкомплексно выпуклых компактах является гиперкомплексно полуаффинным преобразованием.*

Доказательство. Допустим, что f не является гиперкомплексно полуаффинным преобразованием. Тогда согласно предложению 1 найдется гиперплоскость T, такая, что её образ $f(T)$ не будет гиперплоскостью. Не нарушая общности, положим, что $T = \{x|x_n = 0\}$. Построим расширяющуюся систему компактных цилиндров $S_m = A_m \times B_m^{n-1}$ в некоторой окрестности T, где

$$A_m = \left\{x_1 \Big| \frac{1}{m} \leq |x_1| \leq 1 - \frac{1}{m}\right\} \subset \mathbb{H},$$

$$B_m^{n-1} = \{x' = (x_2, \ldots, x_n) | |x'| \leq m\} \subset \mathbb{H}^{n-1}.$$

Очевидно, что все S_m будут гиперкомплексно выпуклыми компактами. Множество $C = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} S_m = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}$ int S_m тоже будет гиперкомплексно выпуклым множеством. Через начало координат проходит единственная гиперплоскость T, которая не пересекает C. Все $f(S_m)$ будут гиперкомплексно выпуклыми компактами, поскольку f сохраняет гиперкомплексную выпуклость компактов. Очевидно, что $f(S_m) \subset f(S_{m+1})$, поэтому $f(S_m) \subset \operatorname{int} f(S_{m+1})$. Также справедливыми будут следующие соотношения $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} f(S_m) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \operatorname{int} f(S_m)$, $\operatorname{int} f(S_m) \subset \operatorname{int} f(S_{m+1})$. Отсюда согласно предложению 2 $(\operatorname{int} f(S_m))^* \supset (\operatorname{int} f(S_{m+1}))^*$. Так как $\operatorname{int} f(S_m)$ — открытое множество, то $(\operatorname{int} f(S_m))^*$ – компакт. Согласно предложению 7 $\operatorname{int} f(S_m)$ – гиперкомплексно выпуклое множество. Тогда, используя предложения 5 и 6, $(\bigcup\limits_m f(S_m))^{**} = (\bigcup\limits_m \operatorname{int} f(S_m))^{**} = (\bigcap\limits_m (\operatorname{int} f(S_m))^*)^* = \bigcup\limits_m \operatorname{int} f(S_m) = \bigcup\limits_m f(S_m)$. Поэтому $f(C) = \bigcup\limits_m f(S_m)$ — гиперкомплексно выпуклое множество вследствие гомеоморфности f и теоремы 2 . Следовательно, для точки $f(0)$ существует гиперплоскость $T_1 \supset f(0)$ не пересекающая $f(C)$. Множество $f(C)$ разбивает пространство $\mathbb{H}^n$. Отсюда точка $f(0)$, а следовательно, и гиперплоскость T_1 должны лежать в множестве $f(T)$, гомеоморфном кватернионной гиперплоскости. Множество $f(T)$ — вещественно $(4n-4)$-мерное многообразие. Собственное включение $T_1 \subset f(T)$ невозможно, поскольку $f(T)$ не может содержать как собственное подмножество многообразие той же размерности. Отсюда $f(T) = T_1$. Получили противоречие с тем, что $f(T)$ не является гиперплоскостью. Теорема доказана.

В связи с этими результатами можно сделать вывод, что ряд свойств, справедливых для линейно выпуклых множеств в $\mathbb{C}^n$, можно распространить на гиперкомплексно выпуклые множества в $\mathbb{H}^n$.

1. *Зелинский Ю.Б.* Многозначные отображения в анализе. — Киев: Наук. думка, 1993. — 264 с.
2. *Зелинский Ю.Б.* Выпуклость. Избранные главы // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **92**. — 280 с.
3. *Берже М.* Геометрия. В 2-х т. — М.: Мир, 1984. — **1**. — 560 с; **2**. — 368 с.
4. *Мкртчян Г.А.* О гиперкомплексно выпуклых множествах. — Киев. — 1987. — 17 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.42).
5. *Мкртчян Г.А.* Гиперкомплексно выпуклые области с гладкой границей // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1986. — № 3. — С. 14 – 17.
6. *Мкртчян Г.А.* О сильной гиперкомплексной выпуклости // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 2. — С. 182 – 187.