Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 14, № 1, 249–261

УДК 514.17 + 517.55

М. В. Стефанчук

(*Інститут математики НАН України, Київ*)

stefanmv43@gmail.com

Узагальнено опуклі множини та їх застосування

Присвячено 70-річчю професора Юрія Борисовича Зелінського

Робота присвячена дослідженню властивостей узагальнено опуклих множин у дійсному евклідовому n-вимірному просторі $\mathbb{R}^n$, n-вимірних комплексному та гіперкомплексному просторах $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{H}^n$.

Paper is devoted to investigation of properties of generalized convex sets in the real Euclidean n-dimensional space $\mathbb{R}^n$ and in the n-dimensional complex and hypercomplex spaces $\mathbb{C}^n$ and $\mathbb{H}^n$ respectively.

1. Задача про "тінь". Поняття опуклості є загальновідомим та відіграє важливу роль у різних областях фундаментальної і прикладної математики.

Означення 1 ([1]). *Множина $X \in \mathbb{R}^n$ називається опуклою, якщо разом з кожними двома точками $x^1,\ x^2 \in \mathbb{R}^n$ вона містить також весь відрізок $[x^1,\ x^2]$, який з'єднує ці точки.*

Означення 2. *Множина $E \in \mathbb{C}^n$ називається лінійно опуклою, якщо для довільної точки $z^0 \notin E$ існує комплексна гіперплощина, яка проходить через z^0 і не перетинає E.*

Лінійна опуклість множини є узагальненням поняття опуклості. Тут узагальнюється зовнішня властивість опуклих множин, яка полягає в існуванні гіперплощини, що не перетинає вихідну множину.

Поняття лінійно опуклої множини у двовимірному комплексному просторі $\mathbb{C}^2$ вперше було введене у 1935 році Г. Беенке та Е. Пешлем [2] і почало широко використовуватися завдяки роботам А. Мартіно [3] і Л. Айзенберга [4] з 60-х років XX століття.

Лінійно опуклі множини досліджувалися у роботах А. Мартіно, Л. Айзенберга, Б. Зінов'єва, О. Южакова, В. Кривоколеска, В. Трутнєва, С. Знаменського, Ю. Зелінського, Х. Кісельмана, Л. Хермандера, М. Андерсона, М. Пассара, Р. Сігурдсона, В. Мельник, М. Ткачука.

Означення 3. *Множина $E \subset \mathbb{C}^n$ називається сильно лінійно опуклою, якщо для довільної комплексної прямої γ множини $\gamma \cap E$ і $\gamma^o \setminus \gamma \cap E$ зв'язні ($\gamma^o = \gamma \cup (\infty)$).*

В означенні сильно лінійно опуклих множин узагальнюється внутрішня властивість опуклості, а саме зв'язність перетину множини з дійсною прямою.

Означення 4 ([5])**.** *Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається m-опуклою, $m > 0$, якщо для довільної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ знайдеться m-вимірна площина L, яка проходить через цю точку, $x \in L$, і не перетинає дану множину, $L \cap E = \emptyset$.*

Клас m-опуклих множин включає в себе лінійно опуклі множини. Для лінійно опуклої множини $E \subset \mathbb{R}^n$ m-вимірна площина, де $m = n - 1$, є гіперплощиною.

Поняття m-опуклої множини в $\mathbb{R}^n$, $0 \leq m < n$, дозволяє з єдиної точки зору подивитися на деякі узагальнення опуклості, в тому числі і на лінійну опуклість. В означенні m-опуклої множини використовується узагальнення поняття опуклої множини завдяки існуванню m-вимірної площини, яка не перетинає дану множину (зовнішня властивість опуклості). З іншого боку, для узагальнення опуклості можна, як і в означенні опуклості та сильної лінійної опуклості, користуватися обмеженнями на перетини цієї множини прямою (внутрішня властивість). У цьому напрямку майже немає результатів.

Означення 5. *m-опуклий перетин всіх m-опуклих множин, які містять задану множину $E \subset \mathbb{R}^n$, називається m-опуклою оболонкою множини E.*

Ввівши поняття m-опуклої оболонки множини E, приходимо до наступної задачі: знайти критерій того, що точка $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ належить

m-опуклій оболонці множини E. Для випадку 1-опуклої оболонки множини, яка є об'єднанням деякого набору куль, дана задача була сформульована Г. Худайбергановим [6] та отримала назву *задача про "тінь"*:

Яка найменша кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль в просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими від радіуса сфери, достатня для того, щоб довільна пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль.

Іншими словами цю задачу можна переформулювати так: *яка найменша кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль в просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими від радіуса сфери, забезпечить належність центра сфери 1-опуклій оболонці сім'ї цих куль?*

Г. Худайберганов [6] довів, що при $n = 2$ двох кругів необхідно і достатньо для створення "тіні" в центрі кола.

Теорема 1 ([6])**.** *Існують два неперетинні замкнені (відкриті) круги з центрами на одиничному колі та радіусами, меншими за одиницю, які забезпечують належність центра кола 1-опуклій оболонці сім'ї цих кругів.*

У роботах [7, 8] повністю розв'язана задача про тінь при $n > 2$. Справедлива наступна теорема.

Теорема 2 ([7, 8])**.** *1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з радіусами, величини яких не перевищують (менші) радіуса сфери, та з центрами на сфері, необхідно і достатньо $(n+1)$ куль.*

Дослідимо дану задачу для більш загального класу множин.

Означення 6. *Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається m-напівопуклою, $m > 0$, якщо для довільної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, знайдеться m-вимірна півплощина L, яка проходить через цю точку, $x \in L$, і не перетинає дану множину, $L \cap E = \emptyset$.*

Для довільної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ ми можемо розглядати мінімальну m-напівопуклу множину, яка містить E.

Означення 7. *m-напівопуклий перетин всіх m-напівопуклих множин, які містять задану множину $E \subset \mathbb{R}^n$, називається m-напівопуклою оболонкою множини E.*

Розглянемо аналог задачі про тінь для напівопуклості, яка є частковим випадком належності точки 1-напівопуклій оболонці деякої сім'ї куль.

Яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими (які не перевищують) радіуса сфери, достатня для того, щоб довільний промінь, який виходить з центра сфери, перетинав хоча б одну з цих куль?

У роботі [8] отримано повний розв'язок цієї задачі у двовимірному евклідовому просторі.

Теорема 3 ([8])**.** *Для того, щоб центр кола $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ належав 1-напівопуклій оболонці сім'ї неперетинних відкритих (замкнених) кругів з радіусами, які не перевищують (менші) радіуса кола, та з центрами на цьому колі, необхідно і достатньо трьох кругів.*

Із збільшенням розмірності простору задача про "тінь" для напівопуклості ускладнюється. Наступна теорема дає достатні умови належності центра сфери 1-напівопуклій оболонці сім'ї куль з центрами на цій сфері.

Теорема 4 ([8])**.** *Для того, щоб центр двовимірної сфери у тривимірному евклідовому просторі належав 1-напівопуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з радіусами, які не перевищують (менші) радіуса сфери, та з центрами на сфері, достатньо десяти куль.*

Наступні питання залишаються відкритими.

Запитання 1. Яка мінімальна кількість куль у тривимірному евклідовому просторі забезпечить належність центра сфери їх 1-напівопуклій оболонці?

У розмірностях, вищих, ніж три, невідомо навіть, чи існує скінченна кількість куль, достатня для створення "тіні" у випадку напівопуклості.

Запитання 2. Чи існує скінченна кількість куль з переліченими вище умовами в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, яка забезпечить належність центра сфери їх 1-напівопуклій оболонці?

Узагальнимо задачу про тінь для довільної точки внутрішності сфери:

Яка найменша кількість попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими (які *не перевищують) радіуса сфери, забезпечить належність внутрішності сфери 1-опуклій оболонці сім'ї куль?*

Для випадку $n = 2$ справедлива наступна теорема.

Теорема 5 ([9]). *Для того, щоб внутрішність кола належала 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) кругів з центрами на колі та радіусами, меншими від радіуса кола, необхідно і достатньо трьох кругів.*

Зауваження 1. Для випадку $n > 2$ $(n+1)$-ї кулі недостатньо для створення тіні у довільній точці внутрішності сфери. При $n = 3$ впишемо у двовимірну сферу правильний тривимірний симплекс та розмістимо у його вершинах чотири кулі з радіусами, рівними половині ребра симплекса. Тоді через кожну з точок, яка є серединою ребра симплекса, можна провести пряму, яка не буде перетинати жодної з цих куль.

Зауваження 2. Відкритою залишається задача знаходження мінімальної кількості куль з центрами на двовимірній сфері в тривимірному евклідовому просторі, для яких довільна точка внутрішності сфери належить їх 1-опуклій оболонці.

Зауваження 3. $(n + 1)$-ї кулі достатньо, щоб усі точки, які містяться у кулі, обмеженій сферою, належали до $(n - 1)$-опуклої оболонки системи куль. Для правильного симплекса візьмемо кулі з центрами у його вершинах та радіусами, рівними половині висоти симплекса. Тоді опукла оболонка цієї системи співпадає з її $(n-1)$-опуклою оболонкою та містить сферу.

Зауваження 4. Узагальнимо дану задачу для напівопуклості. Яка найменша кількість попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими (які не перевищують) від радіуса сфери, забезпечить належність внутрішності сфери 1-напівопуклій оболонці сім'ї куль? При $n > 1$ не існує скінченної кількості куль для створення тіні у довільній точці внутрішності сфери. Візьмемо дві кулі, центри яких найближчі. На відрізку, що з'єднує центри цих куль, знайдеться точка, яка не належить їх об'єднанню, та існує промінь з початком у будь-якій точці внутрішності сфери, який проходить через дану точку, що не перетинає систему куль.

Розглянемо ще одне узагальнення задачі про "тінь".

Нехай в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, задана опукла множина з непорожньою внутрішністю. Із даної множини за допомогою групи геометричних перетворень отримана сім'я попарно неперетинних замкнених множин. Виникає запитання — яка найменша кількість елементів цієї сім'ї достатня для того, щоб вибрана точка $x \in \mathbb{R}^n$ належала 1-опуклій оболонці цієї сім'ї (тобто для того, щоб довільна пряма, яка проходить через точку x, перетинала принаймні одну з цих множин)? У роботі Ю. Б. Зелінського [10] було отримано розв'язок цієї задачі для групи геометричних перетворень, яка складається з рухів та гомотетій опуклої множини з непорожньою внутрішністю. Показано, що для цього необхідно і достатньо n елементів даної сім'ї. У роботі [9] дана задача розв'язана для сім'ї множин, отриманих з опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою паралельних перенесень та гомотетій.

Теорема 6 ([9]). *Для того, щоб вибрана точка в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$ належала 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних замкнених множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій, необхідно і достатньо n елементів цієї сім'ї.*

Розглянемо аналог даної задачі для напівопуклості. Яка найменша кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою деяких геометричних перетворень, достатня для того, щоб вибрана точка $x \in \mathbb{R}^n$ належала 1-напівопуклій оболонці цієї сім'ї (тобто для того, щоб довільний промінь з початком в цій точці перетинав принаймні одну з цих множин). У роботі Ю. Б. Зелінського [10] було отримано розв'язок цієї задачі для групи геометричних перетворень, яка складається з рухів та гомотетій опуклої множини з непорожньою внутрішністю (показано, що для цього необхідно і достатньо $(n+1)$-ї множини). У роботі [9] дана задача розв'язана для сім'ї множин, отриманих з опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою паралельних перенесень та гомотетій.

Теорема 7 ([9]). *Для того, щоб вибрана точка в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$ належала 1-напівопуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних замкнених множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій, необхідно і достатньо $2n$ елементів цієї сім'ї.*

Розглянемо аналоги m-опуклих множин в комплексному та гіперкомплексному просторах.

Означення 8. *Множина $E \subset \mathbb{C}^n$ ($E \subset \mathbb{H}^n$) називається m-комплексно (m-гіперкомплексно) опуклою, $m > 0$, якщо для довільної точки $x \in \mathbb{C}^n \setminus E$ ($x \in \mathbb{H}^n \setminus E$), якщо знайдеться m-вимірна комплексна (гіперкомплексна) площина L, яка проходить через цю точку, $x \in L$, і не перетинає дану множину, $L \cap E = \emptyset$.*

Для довільної множини $E \subset \mathbb{C}^n$ ($E \subset \mathbb{H}^n$) можна розглядати мінімальну m-комплексно (m-гіперкомплексно) опуклу множину, яка містить E.

Означення 9. *Перетин всіх m-комплексно (m-гіперкомплексно) опуклих множин, які містять задану множину $E \subset \mathbb{C}^n$ ($E \subset \mathbb{H}^n$), називається m-комплексною (m-гіперкомплексною) оболонкою множини E.*

Ю. Б. Зелінським [10] була сформульована задача про "тінь" в комплексному та гіперкомплексному просторах:

Яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених куль з центрами на сфері $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ($S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n$) та радіусами, меншими від радіуса сфери, достатня для того, щоб довільна комплексна (гіперкомплексна) пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль (тобто для того, щоб центр сфери належав 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці цих куль)?

Встановлено, що в комплексному (гіперкомплексному) просторі при $n = 2$ для створення "тіні" в центрі сфери необхідно і достатньо двох куль.

Теорема 8 ([10]). *Для того, щоб вибрана точка у 2-вимірному комплексному (гіперкомплексному) просторі $\mathbb{C}^2$ ($\mathbb{H}^2$), належала 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль, які дану точку не містять, необхідно і достатньо двох куль.*

Наступна теорема дає достатні умови належності центра сфери 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці сім'ї куль з центрами на цій сфері у просторі $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{H}^n$), $n \geq 3$.

Теорема 9 ([9]). *Для того, щоб центр сфери в n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) просторі $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{H}^n$), $n \geq 3$, належав 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ($S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n$) та з радіусами, меншими від радіуса сфери, достатньо $2n$ ($4n-2$) куль.*

Наступні запитання залишаються відкритими.

Запитання 3. Яка мінімальна кількість куль в n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) просторі $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{H}^n$) при $n \geq 3$ забезпечить належність початку координат 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці цих куль?

Запитання 4. Яка мінімальна кількість відкритих (замкнених) куль з центрами на фіксованій сфері та з радіусами, які не перевищують (менші) радіуса сфери в n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) просторі $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{H}^n$) при $n \geq 3$ забезпечить належність центра сфери 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці цих куль?

2. Множина міри нуль, яка містить сфери довільних радіусів. Нехай $\mathbf{M} = (M_i, i \in \mathbb{N})$ є сім'єю множин в $\mathbb{R}^n$. Будемо розглядати такі множини, які після застосування до них сім'ї $\mathbf{T}$ геометричних перетворень $T_i, (i \in \mathbb{N})$, по-перше, будуть належати множині досить малої міри і, по-друге, їх об'єднання матиме міру нуль.

Безікович [11, 12] розглядав випадки, коли $\mathbf{M}$ є сім'єю відрізків скінченної довжини та довільних напрямків, а також сім'єю прямих довільних напрямків. Він побудував множини, що містять множину одиничних відрізків довільних напрямків та множину прямих довільних напрямків, n-вимірні лебегові міри яких дорівнюють нулю.

Теорема 10 ([11]). *Для $n \geq 2$ існує множина $F \subset \mathbb{R}^n$, n-вимірна лебегова міра якої дорівнює нулю, яка містить одиничний лінійний відрізок довільного напрямку.*

Теорема 11 ([12]). *Для $n > 2$ існує множина $F \subset \mathbb{R}^n$, n-вимірна лебегова міра якої дорівнює нулю, що містить пряму довільного напрямку.*

Крім цього, у роботі Безікович і Радо [13] досліджували дане питання для сім'ї кіл усіх скінченних радіусів. У результаті геометричних перетворень об'єднання цих сімей можна було помістити у замкнену множину плоскої міри нуль.

Теорема 12 ([13]). *Існує плоска замкнена множина міри нуль, яка містить кола довільних радіусів.*

У роботі [14] дана задача розв'язана для сім'ї сфер усіх радіусів в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. За допомогою сім'ї геометричних перетворень побудовано множину, що є об'єднанням сфер довільних скінченних радіусів, n-вимірна лебегова міра якої дорівнює нулю. Справедлива наступна теорема.

Теорема 13 ([14]). *В n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ існує множина міри нуль, яка містить сфери усіх радіусів.*

3. Екстремальні елементи та квазіопуклі множини в гіперкомплексному просторі. Природним аналогом комплексного аналізу є гіперкомплексний аналіз. Тому виникає потреба перенести ряд результатів опуклого аналізу, відомих в дійсному та комплексному евклідових просторах, на n-вимірний гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$, $n \in \mathbb{N}$, який є прямим добутком n-копій тіла кватерніонів $\mathbb{H}$. Над цими проблемами працював Г. Мкртчян (див. [15, 16]). Він увів поняття гіперкомплексно опуклої, сильно гіперкомплексно опуклої множин та переніс ряд результатів лінійно опуклого аналізу на гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$. Цей напрямок продовжили розвивати Ю. Зелінський та його учні: М. Ткачук, Т. Осіпчук, Б. Кліщук.

Нехай $E \subset \mathbb{H}^n$ — довільна множина простору $\mathbb{H}^n$, яка містить початок координат $\Theta = (0, 0, \ldots, 0)$. Покладемо $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, $\langle x, h\rangle = x_1h_1 + x_2h_2 + \cdots + x_nh_n$. Множина $E^* = \{h|\langle x, h\rangle \neq 1 \ \forall x \in E\}$ називається *спряженою* множиною до множини E.

Гіперплощиною називається множина $L \subset \mathbb{H}^n$, що задовольняє одну з умов: $\langle x, a\rangle = w$, $\langle x - x_0, a\rangle = 0$, де x — довільна точка множини L, x_0 — фіксований вектор, w — фіксований скаляр з $\mathbb{H}$, a — фіксований ковектор. Назвемо ковектор a *нормаллю*. Відповідно, *афінними* будемо називати лише функції виду: $l(x) = \langle x, a\rangle + b$, $b \in \mathbb{H}$.

Означення 10. *Множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається гіперкомплексно опуклою, якщо для довільної точки $x_0 \in \mathbb{H}^n \setminus E$ існує гіперкомплексна гіперплощина, яка проходить через точку x_0 і не перетинає множину E.*

Нагадаємо, що оскільки в алгебрі кватерніонів множення некомутативне, то надалі розглядатимемо праві гіперплощини, тобто точку із змінною координатою множимо на фіксовану точку справа.

Означення 11. *Множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається сильно гіперкомплексно опуклою, якщо довільний її перетин гіперкомплексною прямою γ ациклічний, тобто $\widetilde{H}^i(\gamma \cap E) = 0$ $\forall i \geq 0$, де $\widetilde{H}^i(\gamma \cap E)$ — зведена група когомологій Александрова-Чеха множини $\gamma \cap E$ з коефіцієнтами в групі цілих чисел.*

Нехай $E \subset \mathbb{H}$ — довільна множина. Доповнення до об'єднання необмежених компонент множини $\mathbb{H} \setminus E$ називається *h-комбінацією точок множини E* та позначається $[E]$. Якщо E — довільна множина в просторі $\mathbb{H}^n$, $n > 1$, то скажемо, що точка x належить h-комбінації точок з E, якщо існує перетин множини E гіперкомплексною прямою γ такий, що $x \in [E \cap \gamma]$. Множину таких точок з $\mathbb{H}^n$ називають *h-комбінацією точок E* і позначають $[E]$; m-кратну h-комбінацію визначають за індукцією $[E]^m = [[E]^{m-1}]$.

Означення 12. *h-оболонкою множини $E \subset \mathbb{H}^n$ називається множина $\widehat{E} = \bigcap\limits_{\pi} \pi^{-1}[\pi(E)]$, де $\pi \colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \lambda$ — усі можливі лінійні проекції множини на гіперкомплексні прямі, $[\pi(E)]$ — h-комбінація точок множини $\pi(E)$, а $\pi^{-1}[\pi(E)] = \{x \in \mathbb{H}^n |\ \pi(x) \in \pi(E)\}$ — її повний прообраз.*

Наступна теорема стверджує, що для довільної множини простору $\mathbb{H}^n$ множина точок її h-оболонки співпадає з h-комбінацією точок цієї множини.

Теорема 14 ([17])**.** *Якщо множина $E \subset \mathbb{H}^n$ є h-оболонкою, то $E = [E]$.*

Означення 13. *h-інтервалом з центром в точці x радіуса r називається перетин відкритої кулі радіуса r з центром в точці x з гіперкомплексною прямою, яка проходить через точку x.*

Означення 14. *Точка $x \in E \subset \mathbb{H}^n$ називається h-екстремальною точкою множини E, якщо в E немає жодного h-інтервалу, який містить x.*

Означення 15. *h-променем назвемо замкнену необмежену ациклічну підмножину гіперкомплексної прямої з непорожньою межею.*

Означення 16. *Екстремальним h-променем множини $E \subset \mathbb{H}^n$ назвемо h-промінь H, який належить множині E, якщо множина $E \setminus H$ гіперкомплексно опукла та кожна точка межі променя H буде h-екстремальною точкою для множини E. (Це еквівалентне тому, що жодна точка променя H не буде внутрішньою для довільного h-інтервалу, який належить множині E та має хоча б одну точку за межами H).*

Для множини $E \subset \mathbb{H}^n$ позначимо: hext E — множину її h-екстремальних точок, rhext E — множину h-екстремальних променів, hconv E — h-оболонку E.

Наступна теорема є аналогом теореми Клі опуклого аналізу в гіперкомплексному просторі.

Теорема 15 ([17]). *Кожна замкнена сильно гіперкомплексно опукла множина $E \subset \mathbb{H}^n$, яка не містить гіперкомплекної прямої, буде h-оболонкою своїх h-екстремальних точок та h-екстремальних променів $E = \mathrm{hconv}(\mathrm{hext}E \cup \mathrm{rhext}E)$.*

Клас сильно гіперкомплексно опуклих множин є незамкненим відносно перетинів. Тому для нього не виконується основна аксіома опуклості — перетин будь-якої кількості опуклих множин повинен бути опуклим. Означимо клас множин, який включає в себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненим відносно перетинів.

Означення 17. *Гіперкомплексно опукла множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною, якщо її перетин довільною гіперкомплексною прямою γ не містить тривимірного коциклу, тобто $H^3(\gamma \cap E) = 0$.*

Очевидно, що клас $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин включає в себе сильно гіперкомплексно опуклі області та компакти.

З наступної теореми випливає замкненість класу $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин в тому сенсі, що перетин довільної сім'ї компактних $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин буде $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною.

Теорема 16 ([17]). *Перетин довільної сім'ї $\mathbb{H}$-квазіопуклих компактів буде $\mathbb{H}$-квазіопуклим компактом.*

Також встановлено, що компактний лінійний поліедр, всі грані якого не містять тривимірних циклів, та ациклічний у розмірності три гіперкомплексно опуклий компакт будуть $\mathbb{H}$-квазіопуклими множинами [17].

Теорема 17 ([17])**.** *Компактний лінійний поліедр, всі грані якого не містять тривимірних циклів, є $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною.*

Перетин сильно гіперкомплексно опуклих компактів буде $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною.

Кожен ациклічний у розмірності три гіперкомплексно опуклий компакт E буде $\mathbb{H}$-квазіопуклим.

Література

[1] *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества — М.: Наука, 1985. — 336 с.

[2] *Behnke H.,Peschl E.* Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen Konvexität in bezug auf analytische Ebenen im kleinen und großen // Math. Ann. — 1935. — **111**, № 2. — P. 158 – 177.

[3] *Martineau A.* Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes convexité linéele // Math. Ann. — 1966. — **163**, № 1. — P. 62 – 88.

[4] *Айзенберг Л. А.* О разложении голоморфных функций многих комплексных переменных на простейшие дроби // Сиб. мат. журн. — 1967. — **8**, № 5. — С. 1124 – 1142.

[5] *Зелинский Ю. Б.* Выпуклость. Избранные главы // Праці Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2012. — **92**. — 280 с.

[6] *Худайберганов Г.* Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров // Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г. № 1772 — 85 Деп.

[7] *Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Стефанчук М. В.* Задача о тени // Доповіді НАН України. — 2015. — № 5. — С. 15 – 20.

[8] *Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Стефанчук М. В.* Обобщенно выпуклые множества и задача о тени // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 12. — С. 1658 – 1666.

[9] *Зелинский Ю. Б., Стефанчук М. В.* Узагальнення задачі про тінь // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, № 6. — С. 757 – 762.

[10] *Зелинский Ю. Б.* Задача о тени для семейства множеств // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2015. — **12**, № 4. — С. 197 – 204.

[11] *Besicovitch A. S.* On Kakeya's problem and a similar one // Math. Zeit. — 1928. — **27**. — P. 312 – 320.

[12] *Besicovitch A. S.* On fundamental geometric properties of plane line-sets // J. London Math. Soc. — 1964. — **39**. — P. 441 – 448.

[13] *Besicovitch A., Rado R.* A plane set of measure zero containing circumferences of every radius // J. London Math. Soc. — 1968. — **43**. — P. 717 – 719.

[14] *Стефанчук М. В., Ткачук М. В.* Множина міри нуль, яка містить сфери довільних радіусів // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2015. — **12**, № 4. — С. 285 – 289.

[15] *Мкртчян Г. А.* О гиперкомплексно выпуклых множествах. — К.: ИМ АН УССР, 1987. — 17 с. — (Препринт / АН УССР, Ин-т матем.; 87.42)

[16] *Зелинский Ю. Б., Мкртчян Г. А.* Об экстремальных точках и гиперкомплексно выпуклых областях // Докл. АН СССР. — 1990. — **311**, № 6. — С. 1299 – 1302.

[17] *Стефанчук М. В.* Екстремальні елементи в гіперкомплексному просторі // Доповіді НАН України. — 2016. — № 4. — С. 13 – 19.