

*О. М. Клименко, І. О. Блажко,
Д. О. Кублицький, Д. О. Скидан, С. М. Ящук*

*Національний технічний університет України «КПІ», Київ
e.n.klimenko@gmail.com, iob.veritas@gmail.com,
deniskublitskiy@gmail.com, skidan13@gmail.com,
serg.yaschuk@gmail.com*

Програма для зведення матриці до нормальної форми Арнольда відносно гладких перетворень подібності

V. I. Arnold (1971) constructed a miniversal deformation of each Jordan matrix J ; that is, a simple normal form to which all matrices A close to J can be reduced by similarity transformations that smoothly depend on the entries of A . We describe a software for reducing a matrix in an neighborhood of J to Arnold's normal form by smooth similarity transformations and calculating the transforming matrix.

Нехай $J = J_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus J_{\lambda_t}$ — жорданова матриця, в якій

$$J_{\lambda_i} := J_{m_{i1}}(\lambda_i) \oplus \dots \oplus J_{m_{ir_i}}(\lambda_i), \quad m_{i1} \geq m_{i2} \geq \dots \geq m_{ir_i}, \quad (1)$$

$J_{m_{ij}}(\lambda_i)$ — клітка Жордана розміру $m_{ij} \times m_{ij}$ з власним числом λ_i та одиницями над діагоналлю, $\lambda_i \neq \lambda_j$ якщо $i \neq j$.

В. І. Арнольд [1] довів, що всі матриці $J + X$, що є достатньо близькими до J , можуть бути одночасно зведені деякими перетвореннями

$$J + X \mapsto \mathcal{S}(X)^{-1}(J + X)\mathcal{S}(X), \quad \begin{array}{l} \mathcal{S}(X) \text{ аналітична} \\ \text{в } 0 \text{ та } \mathcal{S}(0) = I, \end{array} \quad (2)$$

© О. М. Клименко, І. О. Блажко,
Д. О. Кублицький, Д. О. Скидан, С. М. Ящук, 2015

до форми $J + \mathcal{D} :=$

$$\bigoplus_{i=1}^t \begin{bmatrix} J_{m_{i1}}(\lambda_i) + 0^\downarrow & 0^\downarrow & \dots & 0^\downarrow \\ 0^\leftarrow & J_{m_{i2}}(\lambda_i) + 0^\downarrow & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0^\downarrow \\ 0^\leftarrow & \dots & 0^\leftarrow & J_{m_{ir_i}}(\lambda_i) + 0^\downarrow \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$0^\leftarrow := \begin{bmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad 0^\downarrow := \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * \end{bmatrix},$$

де зірочки замінюються комплексними числами, що залежать аналітично від елементів X . Кількість зірочок — мінімальна, яка може бути отримана перетвореннями форми (2), вона дорівнює корозмірності класу подібності матриці J .

Матриця (3) з незалежними параметрами замість зірочок називається *мініверсальною деформацією* матриці J .

О. М. Клименко та В. В. Сергейчук [2] побудували алгоритм, який зводить сім'ю матриць до нормальної форми Арнольда відносно подібності і будує перетворюючу матрицю $S(X)$. Нами було реалізовано цей алгоритм за допомогою мови програмування C++.

Наша комп'ютерна програма складається з двох підпрограм. В першій підпрограмі ми зводимо задачу до випадку матриці J з єдиним власним числом і в другій підпрограмі розглядаємо цей випадок. Ми опишемо тільки першу підпрограму, бо вона реалізує алгоритм, який відрізняється від алгоритму з [2].

1) Вхідними даними підпрограми є:

- n — натуральне число;
- $J = J_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus J_{\lambda_t}$ ($t \geq 2$, див. (1)) і X — матриці розміру $n \times n$;

- ε — мале дійсне число для контролю значень матриці X , елементи якої не можуть перевищувати ε ;
 - μ — мале дійсне число, що задає точність обчислень.
- 2) Перевіряємо, чи дійсно елементи матриці X не перевищують ε .
- 3) Зображуємо матрицю $J + X$ у вигляді

$$J + X = \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ C_2 & A_2 \end{bmatrix},$$

де $A_1 := J_{\lambda_1} + X_1$ (див. (1)).

- 4) Розв'язуємо рівняння Сильвестра $A_1 Z + Z A_2 = C_1$ за допомогою MatLab. Нехай його рішенням буде Z_1 . Будуємо матрицю

$$S_1 = I_n + \begin{bmatrix} 0 & Z_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 5) Знаходимо матрицю

$$J + X_1 := S_1^{-1}(J + X)S_1 = \begin{bmatrix} A'_1 & C'_1 \\ C_2 & A'_2 \end{bmatrix}.$$

Перевіряємо, чи будуть елементи матриці C'_1 меншими за задане μ . Якщо ні, то проводимо ці ітерації до тих пір, поки не досягнемо заданої точності μ . В результаті отримаємо

$$J + X' = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ C_2 & B_2 \end{bmatrix}.$$

- 6) Розв'язуємо рівняння Сильвестра $B_2 Z + Z B_1 = C_2$. Нехай його рішенням буде Z_2 . Будуємо матрицю

$$S_2 = I_n + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 7) Знаходимо матрицю

$$J + X'_1 := S_2^{-1}(J + X')S_2 = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ C'_2 & B_2 \end{bmatrix}.$$

Перевіряємо, чи будуть елементи матриці C'_2 меншими за задане μ . Якщо ні, то проводимо ці ітерації до тих пір поки не досягнемо заданої точності μ . В результаті отримаємо

$$J + X'' = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}.$$

8) Якщо $t \geq 3$, то таким же чином приводимо B_2 і так далі, поки не отримаємо блочно-діагональну матрицю

$$J + Y = (J_{\lambda_1} + Y_1) \oplus \cdots \oplus (J_{\lambda_t} + Y_t).$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Арнольд В. И. О матрицах, зависящих от параметров // *Успехи матем. наук.* — 1971. — **26**, 2 (158). — С. 101–114.
- [2] Klímenko L., Sergeichuk V. V. An informal introduction to perturbations of matrices determined up to similarity or congruence // *São Paulo J. Math. Sci.* — 2014. — **8**. — P. 1–22.