Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2015, т.12, №6, 183-203

Н. А. Хмельницкий

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко
khmelnit@meta.ua

О цепной эквивалентности проективных скрещенных цепных комплексов

We obtain a necessary and sufficient condition for n-dimensional finitely generated projective crossed chain complexes to be stabilized by free groups and free modules to the chain equivalence.

Отримано необхідну та достатню умову того, коли n-вимірні скінченнопороджені проективні схрещені ланцюгові комплекси можна стабілізувати вільними групами та вільними модулями до ланцюгової еквівалентності.

Получено необходимое и достаточное условие того, когда n-мерные конечнопорожденные проективные скрещенные цепные комплексы можно стабилизировать свободными группами и свободными модулями до цепной эквивалентности.

Светлой памяти
Владимира Васильевича Шарко
посвящается

1. Введение

Кокрофт и Свон [1] доказали, что гомотопически эквивалентные проективные (свободные) комплексы можно стабилизировать проективными (свободными) модулями до цепной эквивалентности, и применили этот результат к изучению гомотопических типов неодносвязных двумерных CW-комплексов. В монографии [2] Шарко доказал аналог теоремы Кокрофта-Свона для свободных скрещенных цепных комплексов. Автор в работе [3] получил необходимые и достаточные условия, когда n-мерные цепные комплексы, составленные из конечно порожденных проективных модулей, можно стабилизировать свободными модулями до цепной эквивалентности, а в работе [4] доказал аналог теоремы Кокрофта-Свона для проективных скрещенных цепных комплексов. В 2011 году вышла монография Брауна, Хиггинса и Сиверы [5], в которой с энциклопедической полнотой описываются современные достижения в неабелевой алгебраической топологии, в частности рассматриваются основные понятия, используемые в данной статье. Цель данной работы получить необходимое и достаточное условие того, когда n-мерные конечно порожденные проективные скрещенные цепные комплексы можно стабилизировать свободными группами и свободными модулями до цепной эквивалентности.

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольная категория, а $f\colon A_0 \to B_0$ и $\widetilde{f}\colon A_1 \to B_1$ — морфизмы в ней. Будем говорить, что морфизм $\widetilde{f}$ *сохраняет морфизм* f, если существуют мономорфизм $\iota\colon A_0 \to A_1$ и эпиморфизм $\pi\colon B_1 \to B_0$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{\iota} & A_1 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{f}} \\ B_0 & \xleftarrow{\pi} & B_1 \end{array}$$

коммутативна, то есть $f = \pi\widetilde{f}\iota$. Легко видеть, что отношение «сохранять морфизм» является транзитивным, то есть если морфизм h сохраняет морфизм g, а морфизм g сохраняет морфизм f, то h сохраняет f.

Далее, пусть $\mathscr{C}$ — категория с конечным копроизведением $\oplus$ и нулевым объектом 0. *Утолщением* морфизма $f\colon A \to B$ с помощью объекта C называется морфизм $\widehat{f}_C\colon A\oplus C \to B$ такой, что $\widehat{f}_C = f\oplus 0$. *Стабилизацией* морфизма $f\colon A \to B$ с помощью объекта C называется морфизм $f_C^{st}\colon A\oplus C \to B\oplus C$ такой, что

$f_C^{st} = f \oplus \mathrm{id}_C$. Очевидно, что утолщение $\widehat{f}_C$ и стабилизация f_C^{st} сохраняют морфизм f. Отметим, что в категории групп копроизведение обозначается через $*$.

Пусть A — некоторая фиксированная группа. Обозначим через $\mathscr{F}_A$ категорию, объектами которой являются свободные произведения $A * F$ группы A на свободные конечнопорожденные группы F, а морфизмами — все гомоморфизмы

$$\varphi\colon A * F_1 \to A * F_2,$$

действующие тождественно на A. Объекты категории $\mathscr{F}_A$ будем называть конечносвободными A-группами, а морфизмы — стабильными A-гомоморфизмами.

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, а M — левый R-модуль. Семейство элементов $\{m_i \in M | i \in I\}$, порождающее модуль M, называется *системой образующих* модуля M. Если же прямая сумма включений $Rm_i \to M$, $i \in I$, задает изоморфизм

$$f\colon \bigoplus_{i \in I} Rm_i \to M,$$

то семейство $\{m_i \in M | i \in I\}$ называется *базисом* модуля M, а мощность множества I — *базисным числом* модуля M. Базисное число, вообще говоря, зависит от выбора базиса, и поэтому не может служить инвариантом свободного модуля $F = R^n$, $n \in \mathbb{N}$. Кольцо R такое, что базисное число любого свободного модуля определено однозначно, называется *IBN кольцом* или *кольцом с инвариантным базисным числом.* Известно [6, стр. 168], что IBN кольцами являются все нетеровые кольца, коммутативные кольца и кольца, имеющие нетривиальный гомоморфизм в IBN-кольцо. В частности, все целочисленные групповые кольца $\mathbb{Z}[H]$ будут IBN кольцами, поскольку аугментация является нетривиальным гомоморфизмом в IBN кольцо $\mathbb{Z}$.

3. Скрещенные модули

Скрещенным модулем (или *G-скрещенным модулем C*) называется тройка (C, G, d), где C — аддитивная (не обязательно абелевая), а G — мультипликативная группы, $d\colon C \to G$ — гомоморфизм, G действует на C слева автоморфизмами (то есть зафиксирован гомоморфизм $G \to \operatorname{Aut} C$), при этом гомоморфизм d удовлетворяет следующим условиям:

1) $c' + c - c' = d(c')\ c$,

2) $d(gc) = g\ d(c)\ g^{-1}$, где $c, c' \in C$, $g \in G$.

Все скрещенные модули образуют категорию $\times\mathscr{M}$ (напр. [5]). Морфизмом скрещенных модулей (C, G, d) и (C', G', d') в категории $\times\mathscr{M}$ является пара (φ, ψ) гомоморфизмов $\varphi\colon C \to C'$ и $\psi\colon G \to G'$ такая, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{d} & G \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ C' & \xrightarrow{d'} & G' \end{array}$$

коммутативна и $\varphi(gc) = \psi(g)\ \varphi(c)$. При этом *$G$-морфизмом* G-скрещенных модулей называется гомоморфизм $\varphi\colon C \to C'$ такой, что (φ, id_G) — морфизм скрещенных модулей. Все G-скрещенные модули и G-морфизмы образуют подкатегорию $\times\mathscr{M}_G$ категории $\times\mathscr{M}$.

Пусть (C, G, d) — скрещенный модуль, $\{c_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество фиксированных элементов из C. Тогда (C, G, d) называется *свободным скрещенным модулем* с базисом $\{c_i \mid i \in I\}$, если для каждого скрещенного модуля (C', G', d') и произвольных множества элементов $\{c'_i \mid i \in I\}$ из C' и гомоморфизма $\psi\colon G \to G'$ такого, что $\psi d(c_i) = d'(c'_i)$, существует единственный гомоморфизм $\varphi\colon C \to C'$, для которого $\varphi(c_i) = c'_i$ и (φ, ψ) — гомоморфизм скрещенных модулей. Уайтхед [7] доказал существование свободных скрещенных модулей (C, G, d) для произвольной группы G, в частности, если G конечно свободная A-группа.

Пусть (C, G, d) — скрещенный модуль и M — $\mathbb{Z}[H]$-модуль, где $H = G/dC$. На модуль M можно смотреть как на $\mathbb{Z}[G]$-модуль с тривиальным действием dC. Группа $C \oplus M$ является, очевидно, G-скрещенным модулем с диагональным действием группы G и граничным гомоморфизмом $d \oplus 0\colon C \oplus M \to G$, заданным соотношением $d \oplus 0(c, m) = dc$ и называется *M-утолщением* скрещенного модуля (C, G, d).

Напомним (см. например [8]), что две группы G и H с одной и той же областью операторов Σ называются *операторно изоморфными*, если существует такой изоморфизм $f\colon G \to H$, что $f(\sigma g) = \sigma f(g)$ для произвольных $g \in G$ и $\sigma \in \Sigma$. При этом говорят, что (аддитивная) группа G *операторно раскладывается* в прямую сумму своих подгрупп A и B, если $G = A \oplus B$ и $\sigma A \subset A$ и $\sigma B \subset B$ для произвольного $\sigma \in \Sigma$.

Лемма 3.1. *Пусть (C, G, d) — скрещенный модуль и M — $\mathbb{Z}[H]$-модуль, где $H = G/dC$. Скрещенный модуль (D, G, ∂) является M-утолщением G-скрещенного модуля C тогда и только тогда, когда*

1) *группа D операторно раскладывается в прямую сумму своих подгрупп C' и M', операторно изоморфных C и M соответственно;*
2) *если $f\colon C \to C'$ — операторный изоморфизм, то $\partial(fc) = dc$ для произвольного $c \in C$;*
3) *$M' \subset \ker \partial$.*

Доказательство. *Необходимость* очевидна.

Достаточность. Пусть $g\colon M \to M'$ — операторный изоморфизм. Тогда отображение $\varphi\colon C \oplus M \to D = C' \oplus M'$, задаваемое формулой $\varphi(c, m) = (fc, gm)$, является G-изоморфизмом G-скрещенных модулей D и $C \oplus M$. □

Заметим, что если $\{c_i \mid i \in I\}$ — система образующих G-скрещенного модуля C, а $\{m_j \mid j \in J\}$ — система образующих модуля M, то $\{(c_i, 0) \mid i \in I\} \cup \{(0, m_j) \mid j \in J\}$ — система образующих скрещенного модуля $(C \oplus M, G, d \oplus 0)$, в частности, G-

скрещенный модуль $C \oplus M$ конечнопорожден тогда и только тогда, когда конечнопорожденными являются скрещенный модуль (C, G, d) и $\mathbb{Z}[H]$-модуль M.

Лемма 3.2. *Пусть (C, G, d) — скрещенный модуль, $H = G/dC$, а M — $\mathbb{Z}[H]$-модуль. Если (C, G, d) — свободный скрещенный модуль, M — свободный $\mathbb{Z}[H]$-модуль, то M-утолщение*

$$(C \oplus M, G, d \oplus 0)$$

скрещенного модуля (C, G, d) будет свободным скрещенным модулем.

Доказательство. Каждый свободный $\mathbb{Z}[H]$-модуль является, очевидно, и свободным G-скрещенным модулем. Поскольку

$$(c, m) = (c, 0) + (0, m)$$

для произвольного $(c, m) \in C \oplus M$, то, как легко видеть, G-скрещенный модуль $C \oplus M$ является свободным по определению. $\square$

В дальнейшем понадобится следующее утверждение про свободные конечнопорожденные скрещенные модули [4, лемма 5]. Напомним, что *абелианизацией* группы M называется группа $M^{ab} = M/[M, M]$, где $[M, M]$ — коммутант группы M.

Предложение 3.3. *Пусть (D, G, ∂) и (D', G, ∂') — свободные конечнопорожденные скрещенные модули,*

$$H = G/\partial D = G/\partial' D',$$

и пусть имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & G \arrow[l] \arrow[d, equal] & D \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\varphi"'] & \ker d \arrow[l] \arrow[d, "\varphi^*"'] & 0 \arrow[l] \\
1 & H \arrow[l] & G \arrow[l] & D' \arrow[l, "\partial'"'] & C' \arrow[l, "d'"'] & \ker d' \arrow[l] & 0, \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

в которой C и C' — свободные конечнопорожденные $\mathbb{Z}[H]$-модули. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] & G \arrow[l] & D \oplus D'^{\,\mathrm{ab}} \arrow[l, "\partial\oplus 0"'] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & C \oplus D'^{\,\mathrm{ab}} \arrow[l, "d\oplus \mathrm{id}"'] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"'] & \ker(d\oplus\mathrm{id}) \arrow[l] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}^*"'] & 0 \arrow[l] \\
1 & H \arrow[l] \arrow[u, equal] & G \arrow[l] \arrow[u, equal] & D' \oplus D^{\,\mathrm{ab}} \arrow[l, "\partial'\oplus 0"'] & C' \oplus D^{\,\mathrm{ab}} \arrow[l, "d'\oplus \mathrm{id}"'] & \ker(d'\oplus\mathrm{id}) \arrow[l] & 0, \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

в которой $\widetilde{f}$ — G-изоморфизм, сохраняющий отображение f, $\widetilde{\varphi}$ сохраняет φ, $\ker(d\oplus\mathrm{id}) = \ker d$ и $\ker(d'\oplus\mathrm{id}) = \ker d'$.

Зафиксируем группу G. Рассмотрим еще один важный класс скрещенных модулей — G-проективные скрещенные модули, которые были введены в обиход Рэтклайфом [9]. Скрещенный модуль (C, G, d) называется G-проективным, если он проективный в категории $\times\mathscr{M}_G$. Рэтклайф [9] доказал следующее утверждение.

Предложение 3.4. *Скрещенный модуль (C, G, d) является G-проективным тогда и только тогда, когда существуют проективный $\mathbb{Z}[H]$-модуль P, где $H = G/dC$, и свободный G-скрещенный модуль B такие, что $C \oplus P$ и B являются изоморфными в категории $\times\mathscr{M}_G$.*

Далее без явных ссылок будем использовать следующее утверждение.

Следствие 3.5. *Предположим, что (C, G, d) конечнопорожденный G-проективный скрещенный модуль. Тогда существует конечнопорожденный проективный $\mathbb{Z}[H]$-модуль P такой, что G-скрещенный модуль B, изоморфный $C \oplus P$, свободен и конечнопорожден.*

Доказательство. Действительно, если $\{c_i \mid i \in I\}$ — система образующих G-скрещенного модуля C, то G-скрещенный модуль B, описанный в предложении 3.4, строится как свободный скрещенный модуль (B, G, ∂) с базисом $\{b_i \mid i \in I\}$ таким, что $\partial b_i = dc_i$. Так как G-скрещенный модуль B свободен, то существует G-морфизм $\eta\colon B \to C$ такой, что $\eta b_i = c_i$ для каждого

$i \in I$. Поскольку $\{c_i \mid i \in I\}$ — система образующих G-скрещенного модуля C, то η является эпиморфизмом. Ядро эпиморфизма η и является описанным в предложении 3.4 проективным $\mathbb{Z}[H]$-модуль P таким, что $B \simeq C \oplus P$. Но тогда, если G-скрещенный модуль C конечнопорожден, то свободный $\mathbb{Z}[H]$-модуль $B^{\mathrm{ab}} \simeq C^{\mathrm{ab}} \oplus P$ также является конечнопорожденным, а следовательно, конечнопорожденным будет и проективный $\mathbb{Z}[H]$-модуль P. □

Лемма 3.6. *Пусть (C, G, d) — скрещенный модуль, $H = G/dC$, а M — $\mathbb{Z}[H]$-модуль. M-утолщение $(C \oplus M, G, d \oplus 0)$ скрещенного модуля (C, G, d) будет G-проективным скрещенным модулем тогда и только тогда, когда (C, G, d) будет G-проективным скрещенным модулем, а M — проективным $\mathbb{Z}[H]$-модулем.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $(C \oplus M, G, d \oplus 0)$ — G-проективный скрещенный модуль. Тогда существует проективный $\mathbb{Z}[H]$-модуль P такой, что $C \oplus M \oplus P$ — свободный G-скрещенный модуль. Абелианизация

$$(C \oplus M \oplus P)^{\mathrm{ab}} = C^{\mathrm{ab}} \oplus M \oplus P$$

является свободным $\mathbb{Z}[H]$-модулем, откуда следует проективность $\mathbb{Z}[H]$-модуля M. Из проективности $\mathbb{Z}[H]$-модуля $M \oplus P$ следует G-проективность скрещенного модуля (C, G, d).

Достаточность. Предположим теперь, что (C, G, d) — G-проективный скрещенный модуль, M — проективный $\mathbb{Z}[H]$-модуль, а P и Q — проективные $\mathbb{Z}[H]$-модули, дополняющие (C, G, d) и M до свободного G-скрещенного модуля и свободного $\mathbb{Z}[H]$-модуля соответственно. Тогда по лемме 3.2 G-скрещенный модуль

$$(C \oplus M) \oplus (P \oplus Q) \simeq (C \oplus P) \oplus (M \oplus Q)$$

является свободным, а следовательно, $(C \oplus M, G, d \oplus 0)$ — G-проективный скрещенный модуль. □

Пусть (C, G, d) — скрещенный модуль и $\rho\colon E \to G$ — гомоморфизм групп. Рассмотрим диаграмму коамальгаммы гомоморфизмов d и ρ

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\widetilde{\rho}"'] & E \arrow[d, "\rho"] \\ C \arrow[r, "d"] & G, \end{tikzcd}$$

где $D = \{(c, e) \in C \times E \mid d(c) = \rho(e)\}$. Определив действие E на D соотношением $e_1(c, e) = (\rho(e_1)\, c, e_1 e\, e_1^{-1})$, и граничный гомоморфизм $\partial\colon D \to E$ соотношением $\partial(c, e) = e$, получим, что (D, E, ∂) — скрещенный модуль, а $(\widetilde{\rho}, \rho)$, где $\widetilde{\rho}\colon D \to C$ задается соотношением $\widetilde{\rho}(c, e) = c$, — морфизм скрещенных модулей.

Пусть F — свободная группа и $\rho\colon G * F \to G$ — утолщение тождественного гомоморфизма id_G с помощью группы F. *Стабилизацией* скрещенного модуля (C, G, d) с помощью свободной группы F (или F-стабилизацией) называется скрещенный модуль $(D, G*F, \partial)$, обозначающийся также $(\widetilde{C}, G*F, \widetilde{d})$, который является коамальгамой гомоморфизмов d и ρ. Будем считать, что коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \widetilde{C} \arrow[r, "\widetilde{d}"] \arrow[d, "\widetilde{\rho}"'] & G*F \arrow[d, "\rho"] \\ C \arrow[r, "d"] & G \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

задает F-стабилизацию $(\widetilde{C}, G*F, \widetilde{d})$ скрещенного модуля (C, G, d). Имеет место следующее утверждение [4, лемма 2].

Предложение 3.7. *Пусть задана коммутативная диаграмма* (3.1). *Тогда*

1) *существует морфизм* $(\widetilde{\iota}, \iota)$ *скрещенных модулей* (C, G, d) *и* $(\widetilde{C}, G * F, \widetilde{d})$ *такой, что* $(\widetilde{\rho}, \rho)(\widetilde{\iota}, \iota) = (\mathrm{id}_C, \mathrm{id}_G)$;
2) $\rho(\widetilde{d}\widetilde{C}) = dC$ *и отображение* ρ *индуцирует изоморфизм* $\rho_*\colon G * F/\widetilde{d}\widetilde{C} \simeq G/dC$;

3) *отображения* $\widetilde{\rho}$ *и* $\widetilde{\iota}$ *индуцируют взаимно обратные изоморфизмы* $\widetilde{\rho}^*\colon \ker\widetilde{d} \simeq \ker d$ *и* $\widetilde{\iota}^*\colon \ker d \simeq \ker\widetilde{d}$.

Следующее утверждение доказано в [10, лемма 1.2].

Предложение 3.8. *Пусть* $(\widetilde{C}, G{*}F, \widetilde{d})$ — F*-стабилизация свободного (*G*-проективного) скрещенного модуля* (C, G, d)*. Тогда* $(\widetilde{C}, G * F, \widetilde{d})$ *является свободным (*$G * F$*-проективным) скрещенным модулем и* $\widetilde{C}^{\,\mathrm{ab}} \simeq C^{\,\mathrm{ab}} \oplus R^n$*, где* $R = \mathbb{Z}[H]$*, а* n — *ранг свободной группы* F*. Более того, если* $\{c_i \mid i \in I\}$ — *базис свободного скрещенного модуля* (C, G, d)*, а* $\{x_j \mid j \in J\}$ — *базис группы* F*, то* $\{(c_i, \iota d\, c_i) \mid i \in I\} \cup \{(0, x_j) \mid j \in J\}$ — *базис* F*-стабилизации скрещенного модуля* (C, G, d)*, где* $\iota\colon G \to G{*}F$ — *естественное вложение.*

Лемма 3.9. *Пусть* (C, G, d) — *скрещенный модуль,* $H = G/dC$*,* M — $\mathbb{Z}[H]$*-модуль, а* F — *свободная группа. Тогда* M*-утолщение* $(\widetilde{C} \oplus M, G * F, \widetilde{d} \oplus 0)$ F*-стабилизации скрещенного модуля* (C, G, d) *изоморфно его* F*-стабилизации* M*-утолщения* $(\widetilde{C \oplus M}, G * F, \widetilde{d \oplus 0})$.

Доказательство. Обозначим через $g * f$ и $g' * f'$ произвольные элементы группы $G * F$, а через g и g' — их образы при гомоморфизме $\rho\colon G * F \to G$, являющемся утолщением тождественного гомоморфизма id_G с помощью группы F. Тогда $G * F$-скрещенные модули $\widetilde{C} \oplus M$ и $\widetilde{C \oplus M}$ можно задать как множества

$$\widetilde{C} \oplus M = \{(c, g * f, m) \mid c \in C,\ g * f \in G * F,\ m \in M,\ dc = \rho(g * f) = g\},$$

$$\widetilde{C \oplus M} = \{(c, m, g * f) \mid c \in C,\ m \in M,\ g * f \in G * F,\ d \oplus 0(c, m) = dc = \rho(g * f) = g\}$$

с граничными гомоморфизмами

$$\widetilde{d} \oplus 0(c, g * f, m) = \widetilde{d}(c, g * f) = g * f, \quad \widetilde{d \oplus 0}(c, m, g * f) = g * f$$

и действиями группы $G * F$

$$(g' * f')(c, g * f, m) = (g'c, (g' * f')(g * f)(g' * f')^{-1}, (g' * f')m)$$

$$\begin{aligned}(g'*f')(c,m,g*f) &= (g'c, g'm, (g'*f')(g*f)(g'*f')^{-1})\\ &= (g'c, (g'*f')m, (g'*f')(g*f)(g'*f')^{-1})\end{aligned}$$

соответственно. Последнее равенство в последней формуле и вообще возможность построения множеств $\widetilde{C}\oplus M$ и $\widetilde{C\oplus M}$ следует из пункта 2) предложения 3.7.

В множестве $\widetilde{C\oplus M}$ рассмотрим подмножества

$$C' = \{(c,0,g*f)\}, \qquad M' = \{(0,m,1)\}.$$

Очевидно, что условия 1)–3) леммы 3.1 выполнены, следовательно, $G*F$-скрещенные модули $\widetilde{C}\oplus M$ и $\widetilde{C\oplus M}$ изоморфны. $\square$

В дальнейшем понадобится также следующее утверждение [4, лемма 3].

Предложение 3.10. *Пусть $G = A*F$ и $G' = A*F'$ — конечно свободные A-группы, $\varphi\colon G\to G'$ — их стабильный A-гомоморфизм, и пусть задана коммутативная диаграмма групп*

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, "\varphi_*"'] & G \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, "\varphi"'] & C \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "f"'] & \ker d \arrow[l] \arrow[d, "f^*"'] & 0 \arrow[l] \\
1 & H' \arrow[l] & G' \arrow[l, "\pi'"'] & C' \arrow[l, "d'"'] & \ker d' \arrow[l] & 0, \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

где (f,φ) — морфизм конечнопорожденных свободных скрещенных модулей (C,G,d) и (C',G',d'), а φ_* — изоморфизм. Тогда если $(\widetilde{C}, G*F', \widetilde{d})$ и $(\widetilde{C'}, G'*F, \widetilde{d'})$ — F'- и F-стабилизации свободных скрещенных модулей (C,G,d) и (C',G',d') соответственно, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, "\varphi_*"'] & G*F' \arrow[l, "\pi*0"'] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"'] & \widetilde{C} \arrow[l, "\widetilde{d}"'] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & \ker\widetilde{d} \arrow[l] \arrow[d, "\widetilde{f}^*"'] & 0 \arrow[l] \\
1 & H' \arrow[l] & G'*F \arrow[l, "\pi'*0"'] & \widetilde{C'} \arrow[l, "\widetilde{d'}"'] & \ker\widetilde{d'} \arrow[l] & 0, \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

в которой $(\widetilde{f}, \widetilde{\varphi})$ — *морфизм скрещенных модулей* $(\widetilde{C}, G * F', \widetilde{d})$ *и* $(\widetilde{C'}, G' * F, \widetilde{d'})$, *отображения* $\widetilde{\varphi}$ *и* $\widetilde{f}$ *сохраняют отображения* φ *и* f *соответственно, причем* $\widetilde{\varphi}$ — *изоморфизм.*

4. Стабильно изоморфные скрещенные модули

Пусть $G = A * F$ и $G' = A * F'$ — конечно свободные A-группы, (C, G, d) и (C', G', d') — конечнопорожденные G- и G'-проективные скрещенные модули соответственно, причем

$$H = G/dC = G'/d'C'.$$

Будем говорить, что скрещенные модули (C, G, d) и (C', G', d') *стабильно изоморфны*, если стабильно изоморфными будут проективные $\mathbb{Z}[H]$-модули $C^{\,\mathrm{ab}}$ и $C'^{\,\mathrm{ab}}$. Напомним, что два R-модуля P и P' называются *стабильно изоморфными*, если существуют два натуральных числа m и n такие, что $P \oplus R^m \simeq P' \oplus R^n$. Очевидно, что отношение «быть стабильно изоморфными» является отношением эквивалентности. Для удобства ссылок на необходимые результаты сформулируем следующее утверждение, первая часть которого очевидна, а вторая доказана в [3, лемма 1].

Предложение 4.1. 1) *Если R-модуль A стабильно изоморфен R-модулю A', а R-модуль B стабильно изоморфен R-модулю B', то R-модуль $A \oplus B$ стабильно изоморфен R-модулю $A' \oplus B'$.*

2) *Если P_1 и P_2 — два стабильно изоморфных проективных R-модуля, а Q_1 и Q_2 — их дополнения до свободных модулей, то Q_1 и Q_2 стабильно изоморфны.*

Лемма 4.2. *Пусть $G, G' \in \mathscr{F}_A$, (C, G, d) и (C', G', d') — конечнопорожденные G- и G'-проективные скрещенные модули соответственно, причем $H = G/dC = G'/d'C'$, а P и P' — произвольные стабильно изоморфные проективные $\mathbb{Z}[H]$-модули. Скрещенные модули (C, G, d) и (C', G', d') будут стабильно изоморфными тогда и только тогда, когда соответствующие P- и P'-утолщения $(C \oplus P, G, d \oplus 0)$ и $(C' \oplus P', G', d' \oplus 0)$ будут стабильно изоморфными.*

Доказательство. *Необходимость* следует из определения стабильной изоморфности проективных скрещенных модулей и первой части предложения 4.1.

Достаточность. Пусть проективные R-модули P и P', где $R = \mathbb{Z}[H]$, и P- и P'-утолщения $(C \oplus P, G, d \oplus 0)$ и $(C' \oplus P', G', d' \oplus 0)$ скрещенных модулей (C, G, d) и (C', G', d') — стабильно изоморфны. По второй части предложения 4.1 стабильно изоморфными будут и R-модули Q и Q', дополняющие P и P' до свободных модулей. Из необходимости следует, что скрещенные модули $(C \oplus P \oplus Q, G, d \oplus 0 \oplus 0)$ и $(C' \oplus P' \oplus Q', G', d' \oplus 0 \oplus 0)$ будут стабильно изоморфными. Так как $P \oplus Q$ и $P' \oplus Q'$ — свободные модули, то скрещенные модули (C, G, d) и (C', G', d') также будут стабильно изоморфными, что и требовалось доказать. □

Лемма 4.3. *Пусть $G, G' \in \mathscr{F}_A$, (C, G, d) и (C', G', d') — конечнопорожденные G- и G'-проективные скрещенные модули соответственно, причем $H = G/dC = G'/d'C'$, а F и F' — произвольные конечнопорожденные свободные группы. Скрещенные модули (C, G, d) и (C', G', d') будут стабильно изоморфными тогда и только тогда, когда соответствующие F- и F'-стабилизации $(\widetilde{C}, G * F, \widetilde{d})$ и $(\widetilde{C'}, G' * F', \widetilde{d'})$ будут стабильно изоморфными.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из транзитивности отношения «быть стабильно изоморфными» и предложения 3.8. □

5. Основные результаты

Традиционно (см. например, [5], [7]), *скрещенным цепным комплексом* (C_i, G, d_i) называется последовательность групп и гомоморфизмов

$$1 \longleftarrow H \xleftarrow{d_1} G \xleftarrow{d_2} C_2 \xleftarrow{d_3} C_3 \xleftarrow{d_4} \ldots \xleftarrow{d_n} C_n \xleftarrow{d_{n+1}} \ldots$$

со следующими свойствами:

1) (C_2, G, d_2) — свободный скрещенный модуль и $H = \operatorname{coker} d_2$;

2) для $i \geqslant 3$ C_i — свободный $\mathbb{Z}[H]$-модуль, d_i — гомоморфизм $\mathbb{Z}[H]$-модулей, $d_3(C_3)$ — $\mathbb{Z}[H]$-модуль;

3) $d_i \circ d_{i+1} = 0$.

Морфизмом $f\colon (C_i, G, d_i) \to (C'_i, G', d'_i)$ скрещенных цепных комплексов (C_i, G, d_i) и (C'_i, G', d'_i) называется такая совокупность гомоморфизмов $f_1\colon G \to G'$, $f_i\colon C_i \to C'_i$, $i \geqslant 2$, которая сохраняет структуры на G и C_i, $i \geqslant 2$, и возникающие диаграммы гомоморфизмов будут коммутативными. Если при этом каждый из гомоморфизмов f_i является изоморфизмом, то гомотопические системы (C_i, G, d_i) и (C'_i, G', d'_i) называются *изоморфными*, а морфизм $f = \{f_i\}$ — *изоморфизмом*.

Скрещенный цепной комплекс (C_i, G, d_i) назовем *проективным*, если

1) (C_2, G, d_2) — G-проективный скрещенный модуль;

2) для $i \geqslant 3$ C_i — проективный $\mathbb{Z}[H]$-модуль, где $H = \operatorname{coker} d_2$.

Скрещенный цепной комплекс (C_i, G, d_i) назовем *конечнопорожденным*, если (C_2, G, d_2) — конечнопорожденный скрещенный модуль и $\mathbb{Z}[H]$-модули C_i конечно порождены для всех $i \geqslant 3$.

Доказательство основного результата данной статьи опирается на следующую теорему автора [3].

Предложение 5.1. *Пусть $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ — цепное отображение n-мерных цепных комплексов конечнопорожденных проективных модулей, индуцирующее изоморфизм модулей гомологий. Для того, чтобы существовали ацикличные свободные цепные комплексы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ такие, что цепные комплексы $\mathcal{P} \oplus \mathcal{F}$ и $\mathcal{P}' \oplus \mathcal{F}'$ цепно изоморфные, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $i = \overline{0, n}$ модули P_i и P'_i были стабильно изоморфными.*

Теорема 5.2. *Пусть $G, G' \in \mathscr{F}_A$, $f\colon (C_i, G, d_i) \to (C'_i, G', d'_i)$ — морфизм n-мерных конечнопорожденных проективных скрещенных цепных комплексов (C_i, G, d_i) и (C'_i, G', d'_i), индуцирующий изоморфизм групп и модулей гомологий, и такой, что*

$f_1\colon G \to G'$ — является стабильным A-гомоморфизмом. Тогда для того, чтобы существовали стабилизации граничных гомоморфизмов d_i и d'_i с помощью свободных групп и свободных модулей такие, что полученные скрещенные цепные комплексы будут изоморфными, необходимо и достаточно, чтобы скрещенные модули (C_2, G, d_2) и (C'_2, G', d'_2), а также $\mathbb{Z}[H]$-модули C_i и C'_i для каждого $i \geqslant 3$ были стабильно изоморфными.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть существуют стабилизации граничных гомоморфизмов d_i и d'_i с помощью свободных групп и свободных модулей такие, что полученные скрещенные цепные комплексы будут изоморфными. Тогда по леммам 4.2 и 4.3 скрещенные модули (C_2, G, d_2) и (C'_2, G', d'_2) будут стабильно изоморфными, а по определению стабильно изоморфными будут и модули C_i и C'_i для каждого $i = \overline{3, n}$.

Достаточность. Пусть

$$\begin{tikzcd} 1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & G \arrow[l, "d_1"'] \arrow[d, "f_1"] & C_2 \arrow[l, "d_2"'] \arrow[d, "f_2"] & C_3 \arrow[l, "d_3"'] \arrow[d, "f_3"] & \dots \arrow[l, "d_4"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"] \\ 1 & H \arrow[l] & G' \arrow[l, "d'_1"'] & C'_2 \arrow[l, "d'_2"'] & C'_3 \arrow[l, "d'_3"'] & \dots \arrow[l, "d'_4"'] & C'_n \arrow[l, "d'_n"'] \end{tikzcd} \qquad (5.2)$$

— диаграмма морфизма $f\colon (C_i, G, d_i) \to (C'_i, G', d'_i)$ n-мерных конечнопорожденных проективных скрещенных цепных комплексов (C_i, G, d_i) и (C'_i, G', d'_i), индуцирующего изоморфизм групп и модулей гомологий. Предположим также, что скрещенные модули (C_2, G, d_2) и (C'_2, G', d'_2), а также $\mathbb{Z}[H]$-модули C_i и C'_i для каждого $i \geqslant 3$ являются стабильно изоморфными. По предложению 3.4 существуют конечнопорожденные $\mathbb{Z}[H]$-модули P и P' такие, что $(C_2 \oplus P, G, d_2 \oplus 0)$ и $(C'_2 \oplus P', G', d'_2 \oplus 0)$ — свободные скрещенные модули. Так как $(C_2 \oplus P)^{\,\mathrm{ab}}$ и $(C'_2 \oplus P')^{\,\mathrm{ab}}$ — свободные $\mathbb{Z}[H]$-модули, а $C_2^{\,\mathrm{ab}}$ и $C_2'^{\,\mathrm{ab}}$ — стабильно изоморфные $\mathbb{Z}[H]$-модули, то по второй части предложения 4.1 стабильно изоморфными будут и $\mathbb{Z}[H]$-модули P и P'. Пусть $Q = P \oplus R^m \simeq P' \oplus R^n$, где $R = \mathbb{Z}[H]$. По лемме 3.2 скрещенные модули $(C_2 \oplus Q, G, d_2 \oplus 0)$ и $(C_2' \oplus Q, G', d_2' \oplus 0)$ являются свободными. Утолщая морфизмы d_2 и d_2' и стабилизируя морфизмы f_2, f_3, d_3 и d_3' с помощью модуля Q получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & G \arrow[l, "d_1"'] \arrow[d, "f_1"'] & C_2 \oplus Q \arrow[l, "d_2 \oplus 0"'] \arrow[d, "f_2 \oplus \mathrm{id}"'] & C_3 \oplus Q \arrow[l, "d_3 \oplus \mathrm{id}"'] \arrow[d, "f_3 \oplus \mathrm{id}"'] & \ldots \arrow[l, "d_4"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"'] \\
1 & H \arrow[l] & G' \arrow[l, "d_1'"'] & C_2' \oplus Q \arrow[l, "d_2' \oplus 0"'] & C_3' \oplus Q \arrow[l, "d_3' \oplus \mathrm{id}"'] & \ldots \arrow[l, "d_4'"'] & C_n', \arrow[l, "d_n'"']
\end{tikzcd}$$

начальный отрезок которой

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & G \arrow[l, "d_1"'] \arrow[d, "f_1"'] & C_2 \oplus Q \arrow[l, "d_2 \oplus 0"'] \arrow[d, "f_2 \oplus \mathrm{id}"'] & \ker(d_2 \oplus 0) \arrow[l] \arrow[d, "(f_2 \oplus \mathrm{id})^*"'] & 0 \arrow[l] \\
1 & H \arrow[l] & G' \arrow[l, "d_1'"'] & C_2' \oplus Q \arrow[l, "d_2' \oplus 0"'] & \ker(d_2' \oplus 0) \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

удовлетворяет условиям предложения 3.10. Так как $G, G' \in \mathscr{F}_A$, то $G = A * F$ и $G' = A * F'$, где F и F' — свободные конечнопорожденные группы. Пусть $(\widetilde{C_2 \oplus Q}, G * F', \widetilde{d_2 \oplus 0})$ и $(\widetilde{C_2' \oplus Q}, G' * F, \widetilde{d_2' \oplus 0})$ — F'- и F-стабилизации свободных скрещенных модулей $(C_2 \oplus Q, G, d_2 \oplus 0)$ и $(C_2' \oplus Q, G', d_2' \oplus 0)$ соответственно. Тогда по предложению 3.10 имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & G * F' \arrow[l, "d_1 * 0"'] \arrow[d, "\widetilde{f}_1"'] & \widetilde{C_2 \oplus Q} \arrow[l, "\widetilde{d_2 \oplus 0}"'] \arrow[d, "\widetilde{f_2 \oplus \mathrm{id}}"'] & \ker \widetilde{d_2 \oplus 0} \arrow[l] \arrow[d, "\widetilde{f_2 \oplus \mathrm{id}}^*"'] & 0 \arrow[l] \\
1 & H \arrow[l] & G' * F \arrow[l, "d_1' * 0"'] & \widetilde{C_2' \oplus Q} \arrow[l, "\widetilde{d_2' \oplus 0}"'] & \ker \widetilde{d_2' \oplus 0} \arrow[l] & 0, \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

в которой $(\widetilde{f_2 \oplus \mathrm{id}}, \widetilde{f}_1)$ — морфизм скрещенных модулей

$$(\widetilde{C_2 \oplus Q}, G * F', \widetilde{d_2 \oplus 0}) \qquad \text{и} \qquad (\widetilde{C_2' \oplus Q}, G' * F, \widetilde{d_2' \oplus 0}),$$

сохраняющий отображения f_2 и f_1, причем $\widetilde{f}_1$ — изоморфизм, и $\ker \widetilde{d_2 \oplus 0} = \ker(d_2 \oplus 0)$ и $\ker \widetilde{d'_2 \oplus 0} = \ker(d'_2 \oplus 0)$. Таким образом, диаграмму (5.2) можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & G * F' \arrow[l, "d_1 * 0"'] \arrow[d, "\widetilde{f}_1"'] & \widetilde{C_2 \oplus Q} \arrow[l, "\widetilde{d_2 \oplus 0}"'] \arrow[d, "\widetilde{f_2 \oplus \mathrm{id}}"'] & C_3 \oplus Q \arrow[l, "d_3 \oplus \mathrm{id}"'] \arrow[d, "f_3 \oplus \mathrm{id}"'] & C_4 \arrow[l, "d_4"'] \arrow[d, "f_4"'] & \ldots \arrow[l, "d_5"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"'] \\
1 & H \arrow[l] & G' * F \arrow[l, "d'_1 * 0"'] & \widetilde{C'_2 \oplus Q} \arrow[l, "\widetilde{d'_2 \oplus 0}"'] & C'_3 \oplus Q \arrow[l, "d'_3 \oplus \mathrm{id}"'] & C'_4 \arrow[l, "d'_4"'] & \ldots \arrow[l, "d'_5"'] & C'_n. \arrow[l, "d'_n"']
\end{tikzcd}$$

В силу изоморфности $\widetilde{f}_1$ отождествим группы

$$G * F' = G' * F = \overline{G}.$$

Пусть S и S' — проективные модули, дополняющие проективные модули $C_3 \oplus Q$ и $C'_3 \oplus Q$ до свободных модулей C и C' соответственно. Тогда, утолщая морфизмы $f_3 \oplus \mathrm{id}$ и f_4 с помощью модуля S и стабилизируя морфизмы d_4 и d'_4 с помощью модулей S и S' соответственно, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & \overline{G} \arrow[l] \arrow[d, equal] & D \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "\widehat{f}_2"'] & C \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\widehat{f}_3"'] & C_4 \oplus S \arrow[l, "\widehat{d}_4"'] \arrow[d, "\widehat{f}_4"'] & \ldots \arrow[l, "d_5"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"'] \\
1 & H \arrow[l] & \overline{G} \arrow[l] & D' \arrow[l, "\partial'"'] & C' \arrow[l, "d'"'] & C'_4 \oplus S' \arrow[l, "\widehat{d'_4}"'] & \ldots \arrow[l, "d'_5"'] & C'_n, \arrow[l, "d'_n"']
\end{tikzcd}$$

где

$$\begin{aligned}
D &= \widetilde{C_2 \oplus Q}, & D' &= \widetilde{C'_2 \oplus Q}, \\
C &= C_3 \oplus Q \oplus S, & C' &= C'_3 \oplus Q \oplus S', \\
\partial &= \widetilde{d_2 \oplus 0}, & \partial' &= \widetilde{d'_2 \oplus 0}, \\
d &= d_3 \oplus \mathrm{id} \oplus 0, & d' &= d'_3 \oplus \mathrm{id} \oplus 0, \\
\widehat{d}_4 &= d_4 \oplus \mathrm{id}, & \widehat{d'_4} &= d'_4 \oplus \mathrm{id},
\end{aligned}$$

$$\widehat{f}_2 = \widetilde{f_2 \oplus \mathrm{id}}, \qquad \widehat{f}_3 = f_3 \oplus \mathrm{id} \oplus 0, \qquad \widehat{f}_4 = f_4 \oplus 0.$$

Начальный отрезок этой диаграммы

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & \overline{G} \arrow[l] \arrow[d, equal] & D \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "\widehat{f_2}"'] & C \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\widehat{f_3}"'] & \ker d \arrow[l] \arrow[d, "\widehat{f_3}^{\,*}"'] & 0 \arrow[l] \\
1 & H \arrow[l] & \overline{G} \arrow[l] & D' \arrow[l, "\partial'"'] & C' \arrow[l, "d'"'] & \ker d' \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

удовлетворяет условиям предложения 3.3, а поэтому диаграмму (5.2) можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & \overline{G} \arrow[l] \arrow[d, equal] & D \oplus D'^{\,\mathrm{ab}} \arrow[l, "\partial\oplus 0"'] \arrow[d, "\widetilde{f_2}"'] & C \oplus D'^{\,\mathrm{ab}} \arrow[l, "d\oplus\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\widetilde{f_3}"'] & C_4 \oplus S \arrow[l, "\widehat{d_4}"'] \arrow[d, "\widehat{f_4}"'] & \ldots \arrow[l, "d_5"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"'] \\
1 & H \arrow[l] & \overline{G} \arrow[l] & D' \oplus D^{\,\mathrm{ab}} \arrow[l, "\partial'\oplus 0"'] & C' \oplus D^{\,\mathrm{ab}} \arrow[l, "d'\oplus\mathrm{id}"'] & C'_4 \oplus S' \arrow[l, "\widehat{d'_4}"'] & \ldots \arrow[l, "d'_5"'] & C'_n, \arrow[l, "d'_n"']
\end{tikzcd}$$

где $\widetilde{f_2}$ и $\widetilde{f_3}$ сохраняют отображения f_2 и f_3 соответственно, причем $\widetilde{f_2}$ — изоморфизм. Утолщая морфизмы $\partial\oplus 0$ и $\partial'\oplus 0$ и стабилизируя морфизмы $\widetilde{f_2}$, $\widetilde{f_3}$, $d\oplus\mathrm{id}$ и $d'\oplus\mathrm{id}$ с помощью модуля $C_2^{\,\mathrm{ab}}$, получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & \overline{G} \arrow[l] \arrow[d, equal] & \overline{D} \arrow[l, "\overline{\partial}"'] \arrow[d, "\overline{f_2}"'] & \widehat{C} \arrow[l, "\widehat{d}"'] \arrow[d, "\widetilde{f_3}'"'] & C_4 \oplus S \arrow[l, "\widehat{d_4}"'] \arrow[d, "\widehat{f_4}"'] & \ldots \arrow[l, "d_5"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"'] \\
1 & H \arrow[l] & \overline{G} \arrow[l] & \overline{D'} \arrow[l, "\overline{\partial'}"'] & \widehat{C'} \arrow[l, "\widehat{d'}"'] & C'_4 \oplus S' \arrow[l, "\widehat{d'_4}"'] & \ldots \arrow[l, "d'_5"'] & C'_n, \arrow[l, "d'_n"']
\end{tikzcd}$$

в которой

$$\begin{aligned}
\overline{D} &= D \oplus D'^{\,\mathrm{ab}} \oplus C_2^{\,\mathrm{ab}}, & \overline{D'} &= D' \oplus D^{\,\mathrm{ab}} \oplus C_2^{\,\mathrm{ab}}, \\
\widehat{C} &= C \oplus D'^{\,\mathrm{ab}} \oplus C_2^{\,\mathrm{ab}}, & \widehat{C'} &= C' \oplus D^{\,\mathrm{ab}} \oplus C_2^{\,\mathrm{ab}}, \\
\overline{\partial} &= \partial \oplus 0 \oplus 0, & \overline{\partial'} &= \partial' \oplus 0 \oplus 0, \\
\widehat{d} &= d \oplus \mathrm{id} \oplus \mathrm{id}, & \widehat{d'} &= d' \oplus \mathrm{id} \oplus \mathrm{id},
\end{aligned}$$

отображения $\overline{f_2} = \widetilde{f_2} \oplus \mathrm{id}$ и $\widetilde{f_3}' = \widetilde{f_3} \oplus \mathrm{id}$ сохраняют отображения f_2 и f_3 соответственно, причем $\overline{f_2}$ — изоморфизм. Утолщая морфизмы $\widehat{d}$, $\widetilde{f_3}'$ и $\widehat{f_4}$ с помощью модуля $Q \oplus C_3$, а морфизм $\widehat{d'}$ — с помощью модуля $Q \oplus C'_3$, и стабилизируя морфизмы $\widehat{d_4}$ и $\widehat{d'_4}$

с помощью модулей $Q \oplus C_3$ и $Q \oplus C'_3$ соответственно, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & \overline{G} \arrow[l] \arrow[d, equal] & \overline{D} \arrow[l, "\overline{\partial}"'] \arrow[d, "\overline{f_2}"'] & \overline{C} \arrow[l, "\overline{d}"'] \arrow[d, "\overline{f_3}"'] & \overline{C_4} \arrow[l, "\overline{d_4}"'] \arrow[d, "\overline{f_4}"'] & \ldots \arrow[l, "d_5"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"'] \\
1 & H \arrow[l] & \overline{G} \arrow[l] & \overline{D'} \arrow[l, "\overline{\partial'}"'] & \overline{C'} \arrow[l, "\overline{d'}"'] & \overline{C'_4} \arrow[l, "\overline{d'_4}"'] & \ldots \arrow[l, "d'_5"'] & C'_n, \arrow[l, "d'_n"']
\end{tikzcd}$$

где

$$\begin{aligned}
\overline{C} &= \widehat{C} \oplus (Q \oplus C_3), & \overline{C'} &= \widehat{C'} \oplus (Q \oplus C'_3), \\
\overline{C_4} &= (C_4 \oplus S) \oplus (Q \oplus C_3), & \overline{C'_4} &= (C'_4 \oplus S') \oplus (Q \oplus C'_3), \\
\overline{d} &= \widehat{d} \oplus 0, & \overline{d'} &= \widehat{d'} \oplus 0, \\
\overline{d_4} &= \widehat{d_4} \oplus \mathrm{id}, & \overline{d'_4} &= \widehat{d'_4} \oplus \mathrm{id},
\end{aligned}$$

отображения $\overline{f_3} = \widetilde{f_3}' \oplus 0$ и $\overline{f_4} = \widehat{f_4} \oplus 0$ сохраняют отображения f_3 и f_4 соответственно. Учитывая лемму 3.9, можно записать, что

$$\overline{D} \simeq \widetilde{C_2} \oplus K_2, \qquad \overline{D'} \simeq \widetilde{C'_2} \oplus K'_2,$$

где

$$K_2 \simeq (\widetilde{C'_2 \oplus Q})^{\mathrm{ab}} \oplus (C_2{}^{\mathrm{ab}} \oplus Q), \quad K'_2 \simeq (\widetilde{C_2 \oplus Q})^{\mathrm{ab}} \oplus (C_2{}^{\mathrm{ab}} \oplus Q)$$

— свободные $\mathbb{Z}[H]$-модули. Кроме того, очевидно, что

$$\begin{aligned}
\overline{C} &= C_3 \oplus K_3, & \overline{C'} &= C'_3 \oplus K'_3, \\
\overline{C_4} &= C_4 \oplus K_4, & \overline{C'_4} &= C'_4 \oplus K'_4,
\end{aligned}$$

где

$$K_3 \simeq (C_3 \oplus Q \oplus S) \oplus D'^{\,\mathrm{ab}} \oplus (C_2{}^{\mathrm{ab}} \oplus Q),$$
$$K'_3 \simeq (C'_3 \oplus Q \oplus S') \oplus D^{\mathrm{ab}} \oplus (C_2{}^{\mathrm{ab}} \oplus Q),$$
$$K_4 \simeq C_3 \oplus Q \oplus S, \qquad K'_4 \simeq C'_3 \oplus Q \oplus S'$$

— свободные модули.

Таким образом, стабилизировав отображения d_2, d'_2, d_3, d'_3, d_4, d'_4 с помощью свободных групп и свободных модулей, диаграмму (5.2) можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & G * F' \arrow[l, "d_1 * 0"'] \arrow[d, "\widetilde{f_1}"] & \widetilde{C_2} \oplus K_2 \arrow[l, "\overline{\partial}"'] \arrow[d, "\overline{f_2}"] & C_3 \oplus K_3 \arrow[l, "\overline{d}"'] \arrow[d, "\overline{f_3}"] & C_4 \oplus K_4 \arrow[l, "\overline{d_4}"'] \arrow[d, "\overline{f_4}"] & \ldots \arrow[l, "d_5"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"] \\
1 & H \arrow[l] & G' * F \arrow[l, "d'_1 * 0"'] & \widetilde{C'_2} \oplus K'_2 \arrow[l, "\overline{\partial'}"'] & C'_3 \oplus K'_3 \arrow[l, "\overline{d'}"'] & C'_4 \oplus K'_4 \arrow[l, "\overline{d'_4}"'] & \ldots \arrow[l, "d'_5"'] & C'_n, \arrow[l, "d'_n"']
\end{tikzcd}$$

в которой $\widetilde{f_1}$ и $\overline{f_2}$ — изоморфизмы.

Так как ядра граничных гомоморфизмов скрещенных модулей являются модулями (см., например, [5]) и отображение $\overline{f_3}$ индуцирует изоморфизм $\overline{f_3}_*\colon H_3 \to H'_3$ модулей гомологий, то можно построить диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 & H_3 \arrow[l] \arrow[d, "\overline{f_3}_*"'] & C_3 \oplus K_3 \arrow[l, "\overline{d}"'] \arrow[d, "\overline{f_3}"'] & C_4 \oplus K_4 \arrow[l, "\overline{d_4}"'] \arrow[d, "\overline{f_4}"'] & C_5 \arrow[l, "d_5"'] \arrow[d, "f_5"'] & \ldots \arrow[l, "d_6"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"'] \\
0 & H'_3 \arrow[l] & C'_3 \oplus K'_3 \arrow[l, "\overline{d'}"'] & C'_4 \oplus K'_4 \arrow[l, "\overline{d'_4}"'] & C'_5 \arrow[l, "d'_5"'] & \ldots \arrow[l, "d'_6"'] & C'_n \arrow[l, "d'_n"']
\end{tikzcd} \tag{5.3}$$

гомоморфизма $(n-2)$-мерных цепных комплексов конечнопорожденных проективных модулей, который индуцирует изоморфизм модулей гомологий. Поскольку проективные модули C_i и C'_i для $i = \overline{3, n}$ являются стабильно изоморфными, то для диаграммы (5.3) справедливо предложение 5.1, из которого и следует справедливость достаточности данной теоремы. $\square$

Список литературы

[1] *Cockcroft W. H., Swan R. G.* On the homotopy type of certain two-dimensional complexes // *Proc. London Math. Soc. (3)*. — 1961. — **11**. — P. 194–202.

[2] *Шарко В. В.* Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). — К.: Наукова думка, 1990. — С. 196.

[3] *Хмельницкий Н. А.* О цепной эквивалентности проективных цепных комплексов // *Укр. мат. журн.* — 2012. — **11**, 6. — С. 826–835.

[4] *Хмельницкий Н. А.* Теорема Кокрофта-Свона для проективных скрещенных цепных комплексов // *Укр. мат. журн.* — 2014. — **66**, 12. — С. 1694–1704.

[5] *Brown R., Higgins P. J., Sivera R.* Nonabelian algebraic topology. — Zürich: European Mathematical Society, 2011. — P. 668.

[6] *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули, категории: В 2-х т. 1. — М.: Мир, 1977. — С. 668.

[7] *C. Whitehead J. H.* Combinatorial homotopy // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1949. — **11, N 4.** — P. 453–496.

[8] *Курош А. Г.* Теория групп. — М.: Наука, 1967. — С. 648.

[9] *Ratcliffe John G.* Free and projective crossed modules // *J. London Math. Soc. (2).* — 1980. — **22**, 1. — P. 66–74.

[10] *Ratcliffe John G.* On complexes dominated by a two-complex // Combinatorial group theory and topology (Alta, Utah, 1984). — Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987. — **111** of *Ann. of Math. Stud.* — P. 221–254.