Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2015, т.12, №6, 146-163

С. І. Максименко, О. В. Марункевич

Інститут математики НАН України, Київ
maks@imath.kiev.ua, oxanamarunkevysh@rambler.ru

Топологічна стійкість функцій відносно усереднень за мірами з кусково постійними щільностями

We present sufficient conditions for a topological stability of averagigns of piece-wise differentiable functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with finitely many local extremes with respect to probability measures with piecewise constant densities.

В роботі отримані достатні умови для топологічної стійкості усереднень кусково диференційовних функцій $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ зі скінченним числом екстремумів відносно мір з кусково постійними щільностями.

1. Вступ

Нехай μ — ймовірнісна міра на відрізку $[-1,1]$, тобто невід'ємна σ-адитивна міра, визначена на борелівській алгебрі множин відрізка $[-1,1]$, і така, що $\mu[-1,1]=1$. Тоді для кожної неперервної функції $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ та числа $\alpha > 0$ такого, що $2\alpha < b-a$ можна визначити нову вимірну функцію

$$f_\alpha\colon (a+\alpha, b-\alpha) \to \mathbb{R}$$

за формулою:

$$f_\alpha(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t\alpha)d\mu. \tag{1.1}$$

Називатимемо її *α-усередненням* функції f відносно міри μ. Фактично усереднення є *згорткою* f із щільністю міри μ, якщо вона існує, див. зауваження 1.5 нижче.

Такі усереднення функцій відіграють важливу роль як в теоретичних дослідженнях, так і практичних задачах обробки сигналів, і називаються лінійними фільтрами, [1], [2], [3], [4].

Дана робота продовжує дослідження проблеми топологічної стійкості усереднень неперервних функцій розпочате авторами в [5], див. означення 1.1, 1.2 та 1.3 нижче.

Означення 1.1. див. напр. [6], [7] *Нагадаємо, що дві неперервні функції* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *та* $g\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ *називаються* ***топологічно еквівалентними****, якщо існують зберігаючі орієнтацію гомеоморфізми* $h\colon (a,b) \to (c,d)$ *та* $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такі, що* $\phi \circ f = g \circ h$*, тобто зображена нижче діаграма є комутативною.*

$$\begin{array}{ccc} (a,b) & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi} \\ (c,d) & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \end{array}$$

Грубо кажучи, це означає, що графіки f_α та f «мають однакову форму».

Означення 1.2. *Нехай* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— неперервна функція і* μ *— ймовірнісна міра на* $[-1,1]$*. Скажемо, що* f *є* ***топологічно стійкою*** *відносно усереднень по мірі* μ*, якщо існує* $\varepsilon > 0$*, таке, що для всіх* $\alpha \in (0,\varepsilon)$ *функції* f *та* f_α *є топологічно еквівалентними.*

Проблема топологічної стійкості відносно усереднень має застосування до обчислення ентропії цифрових сигналів, [8], [9], [10].

Нехай $\mathcal{H}^+(\mathbb{R})$ — група всіх гомеоморфізмів прямої $\mathbb{R}$, які зберігають орієнтацію. Ця група складається зі строго зростаючих неперервних функцій $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задовольняють умову $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty$. Тоді група $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^+(\mathbb{R})$ діє на просторі $C^0(\mathbb{R})$ всіх неперервних функцій $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за таким правилом: якщо $(h,\phi) \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^+(\mathbb{R})$ і $f \in C^0(\mathbb{R})$, то результат дії пари (h, ϕ) на f є функція

$$\phi \circ f \circ h^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Така дія часто називається *право-лівою*, [11], [12].

Очевидно, що $f, g \in C^0(\mathbb{R})$ є топологічно еквівалентними тоді і лише тоді, коли вони належать одній орбіті відносно дії групи $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^+(\mathbb{R})$.

Розглянемо шлях

$$\gamma_f \colon [0, \infty) \to C^0(\mathbb{R}), \qquad \gamma_f(\alpha) = f_\alpha,$$

що починається в точці f.

Очевидно, що $f \in C^0(\mathbb{R})$ є топологічно стійкою відносно усереднень за мірою μ тоді і лише тоді, коли деякий "початок" $\gamma_f[0, \varepsilon]$ шляху γ_f міститься в орбіті функції f для деякого $\varepsilon > 0$.

Таким чином усереднення є лінійною операцією на просторі $C^0(\mathbb{R})$ всіх неперервних функцій $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, в той час, як топологічна еквівалентність зводиться до нелінійної дії груп гомеоморфізмів $\mathcal{H}(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}(\mathbb{R})$.

В [5] отримано достатні умови топологічної стійкості неперервних функцій зі скінченним числом локальних екстремумів відносно усереднень. Показано, що ця проблема може бути зведена до перевірки локальної топологічної стійкості лише паростків f в околах цих локальних екстремумів. В даній роботі ми покажемо, що ті достатні умови є також необхідними (див. означення 1.3 та теорему 1.4 нижче), а отже задача глобальної топологічної стійкості повністю зводиться до дослідження локальної стійкості паростків локальних екстремумів.

Нехай $f \colon (\mathbb{R}, a) \to \mathbb{R}$ — паросток неперервної функції в точці $a \in \mathbb{R}$, тобто f є неперервною функцією, визначеною на малому інтервалі $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ для деякого ε. Тоді, якщо $\alpha < \varepsilon$, то f_α визначена на інтервалі $(a - \varepsilon + \alpha, a + \varepsilon - \alpha)$, а її паросток в точці a, очевидно, залежить лише від паростка f в цій точці.

Зауважимо, що паростки f та f_α в точці a, взагалі кажучи, не є топологічно еквівалентними: при усередненнях локальні екстремуми можуть зміщуватись. Тому природним є таке означення.

Означення 1.3. *Назвемо паросток* $f\colon (\mathbb{R}, a) \to \mathbb{R}$ *є* ***топологічно стійким*** *відносно усереднень по мірі* μ, *якщо існує таке* $\varepsilon > 0$, *що для кожного* $\alpha \in (0, \varepsilon)$ *знайдуться числа* $c_1, c_2, d_1, d_2 \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ *такі, що* $c_1 < a < c_2$, $d_1 < d_2$, *а обмеження*

$$f|_{(c_1,c_2)}\colon\ (c_1, c_2)\ \to\ \mathbb{R}, \qquad f_\alpha|_{(d_1,d_2)}\colon\ (d_1, d_2)\ \to\ \mathbb{R}$$

є топологічно еквівалентними.

Теорема 1.4. (див. [5]) *Нехай* μ — *ймовірнісна міра на* $[-1, 1]$ *і* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *неперервна функція, що має лише скінченну кількість локальних екстремумів* $x_1, \ldots, x_n$. *Припустимо, що значення* $f(x_i)$, $(i = 1, \ldots, n)$, *попарно різні і відрізняються від* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *та* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. *Тоді наступні умови еквівалентні:*

(a) *функція* f *є топологічно стійкою відносно усереднень по мірі* μ;

(b) *для кожного* $i = 1, \ldots, n$ *паросток* $f\colon (\mathbb{R}, x_i) \to \mathbb{R}$ *в точці* x_i *є топологічно стійким відносно усереднень по мірі* μ.

В [5] доведена імплікація (b)⇒(a). Ми покажемо, що (a)⇒(b). Таким чином, для функцій загального положення задача повністю зводиться до дослідження локальної стійкості паростків локальних екстремумів.

В статті [5] також отримано достатні умови для топологічної стійкості паростків функцій відносно дискретних мір зі скінченими носіями. В даній роботі ми наводимо достатні умови для топологічної стійкості паростків функцій відносно мір з кусково неперервними (і, зокрема, з локально постійними) щільностями, див теореми 3.5 та 4.1.

Зауваження 1.5. Нехай μ має щільність $p\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, тобто таку вимірну функцію, що $\mu(A) = \int_A p(t)dt$ для кожної борелівської підмножини $A \subset [-1, 1]$. Для кожного $\alpha > 0$ визначимо функцію $p_\alpha\colon [-\alpha,\alpha]\to\mathbb{R}$ і міру μ_α на $[-\alpha,\alpha]$ за формулами:

$$p_\alpha(s)=\frac{p(s/\alpha)}{\alpha},\qquad \mu(A)=\int_A p_\alpha(s)ds.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\mu_\alpha[-1,1]&=\int_{-\alpha}^{\alpha}p_\alpha(s)ds=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{p(s/\alpha)}{\alpha}ds\\&=\int_{-\alpha}^{\alpha}p(s/\alpha)d(s/\alpha)=\int_{-1}^{1}p(t)dt=1,\end{aligned}$$

а отже μ_α є також ймовірнісною мірою. Більш того,

$$\begin{aligned}f_\alpha(x)&=\int\limits_{-1}^{1}f(x+t\alpha)p(t)dt=\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}f(x+s)p(s/\alpha)d(s/\alpha)\\&=\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}f(x+s)p_\alpha(s)ds.\end{aligned}$$

Останній інтеграл називається *згорткою* f та p_α і позначається через $f*p_\alpha$.

Зазвичай, в формулі для згортки вираз стоїть $f(x-s)$, а не $f(x+s)$. Але це не принципово і грає роль лише для встановлення деяких її зручних алгебраїчних властивостей. Нам буде зручніше використовувати знак «+».

2. Доведення теореми 1.4

В [5] доведена імплікація (b)⇒(a). Ми покажемо, що (a)⇒(b).

Припустимо, що функція f є топологічно стійкою відносно усереднень по мірі μ. Це означає, що існує $\varepsilon>0$ таке, що для кожного $\alpha\in(0,\varepsilon)$ існують два гомеоморфізми $h_\alpha,\phi_\alpha\in\mathcal{H}^+(\mathbb{R})$ такі, що $\phi_\alpha\circ f_\alpha=f\circ h_\alpha$. Зокрема, f_α також має рівно n локальних екстремумів $h_\alpha(x_i)$, $i=1,\dots,n$ і приймає в них значення $\phi_\alpha(f(x_i))$. Потрібно довести, що паросток f в точці x_i є топологічно стійким відносно усереднень за мірою μ.

Зменшивши ε, можна вважати, що

$$x_{i+1} - x_i > 4\varepsilon \tag{2.2}$$

для всіх $i = 1, \dots, n-1$. Нехай $\alpha \in (0, \varepsilon)$. Так як f є строго монотонною на інтервалах

$$(-\infty, x_1),\ (x_1, x_2),\ \cdots,\ (x_n, +\infty),$$

то f_α є строго монотонною на

$$(-\infty, x_1 - \alpha),\ (x_1 + \alpha, x_2 - \alpha),\ \cdots,\ (x_n + \alpha, +\infty).$$

Звідси випливає, що $h_\alpha(x_i) \in [x_i - \alpha, x_i + \alpha]$. Більш того, з умови (2.2) також слідує, що $h_\alpha(x_i)$ є єдиною точкою локального екстремуму f_α на інтервалі $(x_i - 2\alpha, x_i + 2\alpha)$. Нехай

$$(c_1, c_2) \ = \ (x_i - \alpha, x_i + \alpha) \ \cap \ h_\alpha^{-1}(x_i - 2\alpha, x_i + 2\alpha).$$

$$(d_1, d_2) \ = \ h_\alpha(c_1, c_2).$$

Тоді обмеження $f|_{(c_1,c_2)}$ та $f_\alpha|_{(d_1,d_2)}$ є топологічно еквівалентними, а саме: має місце тотожність $\phi_\alpha \circ f_\alpha = f \circ h_\alpha$.

3. Кусково диференційовні функції

У цьому розділі ми наводимо достатні умови для топологічної стійкості локальних екстремумів відносно усереднень за мірами з кусково неперервними щільностями (теорема 3.5).

Означення 3.1. *Функція $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ називається* ***кусково неперервною****, або* ***кусково 0-диференційовною****, якщо f неперервна скрізь, за виключенням скінченого числа точок $t_1, \dots, t_n \in (a,b)$, причому в кожній такій точці t_i існують скінчені ліва та права границі $\lim\limits_{t \to t_i - 0} f(t)$ та $\lim\limits_{t \to t_i + 0} f(t)$. В цьому випадку писатимемо, що $f \in C^0([a,b], t_1, \dots, t_n)$.*

Скажемо, що неперервна функція $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ є ***кусково k-диференційовною****, $k \geq 1$, якщо знайдеться скінчена множина точок $t_1, \cdots, t_n \in (a,b)$ таких, що f має неперервні похідні до порядку k включно на $[a,b] \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$ і для кожного*

$i = 1, \dots, n$ та $s = 1, \dots, k$ існують скінчені ліва та права границі

$$f_l(t) = \lim_{t \to t_i - 0} f^{(s)}(t), \qquad f_r(t) = \lim_{t \to t_i + 0} f^{(s)}(t).$$

В цьому випадку також писатимемо, що

$$f \in C^k([a, b], t_1, \dots, t_n).$$

Очевидно, що сума та добуток кусково неперервних (k-диференційовних) функцій є також кусково неперервною (k-диференційовною) функцією, а для $k \geq 1$ похідна кусково $(k+1)$-диференційовної функції може бути (довільним чином) довизначена в точках розриву до кусково k-диференційовної функції.

Наступна лема добре відома для випадку неперервно диференційовних функцій.

Лема 3.2. *Нехай $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — неперервна функція. Припустимо, що виконується одна з таких умов:*

(1) *$f \in C^1([a, b], t_1, \dots, t_n)$ і $f'(x) < f'(y)$ для всіх пар точок $x < y \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$;*

(2) *$f \in C^2([a, b], t_1, \dots, t_n)$, причому $f''(x) > 0$ для всіх точок $x \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$ та $\lim\limits_{t \to t_i - 0} f'(t) \leq \lim\limits_{t \to t_i + 0} f'(t)$ для всіх $i = 1, \dots, n$.*

Тоді f є строго випуклою.

Доведення. Введемо позначення для лівої та правої границь похідної f':

$$f_l'(x) = \lim_{t \to x - 0} f'(t), \qquad f_r'(x) = \lim_{t \to x + 0} f'(t).$$

(2)$\Rightarrow$(1). Припущення $f''(x) > 0$ для всіх $x \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$, означає, що f' строго зростає на кожному з відрізків

$$[a, t_1],\ [t_1, t_2],\ \dots,\ [t_{n-1}, t_n],\ [t_n, b].$$

Крім того, $f_l'(t_i) \leq f_r'(t_i)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Звідси слідує, що $f'(x) < f'(y)$ для всіх $x < y \in [a,b] \setminus \{t_1, \ldots, t_n\}$, тобто виконана умова (1).

(1) З того, що f' є кусково неперервною і строго зростає на $[a,b] \setminus \{t_1, \ldots, t_n\}$ випливає, що $f_l'(t) \leq f_r'(t)$ для всіх $t \in (a,b)$ і що обидві функції f_l' та f_r' є строго зростаючими.

Нехай $x < y \in [a,b]$ і $t \in (0,1)$. Тоді

$$\begin{aligned} f(x) + (y-x)f_r'(x) \ < \ f(y) = f(x) + \int_x^y f'(t)dt \ < \\ < \ f(x) + (y-x)f_l'(y). \end{aligned}$$

Зокрема, якщо $s \in (0,1)$ і $z = (1-s)x + sy \in (x,y)$, то

$$\begin{aligned} f(z) < f(x) + (z-x)f_l'(z) \ &= \ f(x) + s(y-x)f_l'(z), \\ f(z) < f(y) - (y-z)f_r'(z) \ &= \ f(y) - (1-s)(y-x)f_r'(z). \end{aligned}$$

Помноживши першу нерівність на $1-s$, а другу — на s, додавши їх і врахувавши, що $f_l'(z) - f_r'(z) \leq 0$, отримаємо такі нерівності:

$$\begin{aligned} f(z) &< (1-s)f(x) + sf(y) + s(1-s)(y-x)\big(f_l'(z) - f_r'(z)\big) \\ &\leq (1-s)f(x) + sf(y). \end{aligned}$$

Це доводить строгу випуклість f. □

Надалі вважатимемо, що $p\colon [-1,1] \to [0,+\infty)$ — кусково неперервна функція така, що $\int_{-1}^{1} p(t)dt = 1$ і μ — відповідна ймовірнісна міра на борелівській алгебрі $\mathcal{B}[-1,1]$, визначена за формулою

$$\mu(A) = \int_A p(t)dt, \qquad A \in \mathcal{B}[-1,1]. \tag{3.3}$$

Лема 3.3. *Нехай $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — неперервна функція і*

$$f_\alpha\colon [a+\alpha, b-\alpha] \to \mathbb{R}$$

— її усереднення за мірою μ. Тоді f_α належить класу C^1.

Якщо f є також кусково k-диференційовною (належить класу C^k) для $k \geq 1$, то f_α кусково $(k+1)$-диференційовною (належить класу C^{k+1}).

Доведення. Відмітимо, що

$$f_\alpha(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t\alpha)p(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x+t\alpha)p(t)dt.$$

Так як f — неперервна, то f' визначається за такою формулою:

$$f'_\alpha(x) = \sum_{i=0}^{n} \Big(f_l(x+t_{i+1}\alpha)p_l(t_{i+1}) - f_r(x+t_i\alpha)p_r(t_i) \Big), \tag{3.4}$$

а отже є неперервною функцією. Звідси випливає, що f'_α є також кусково k-диференційовною так само, як і f, а отже f_α — кусково $(k+1)$-диференційовна. Більш того,

$$f^{(s)}_\alpha(x) = \sum_{i=0}^{n} \Big(f_l^{(s-1)}(x+t_{i+1}\alpha)p_l(t_{i+1}) - f_r^{(s-1)}(x+t_i\alpha)p_r(t_i) \Big) \tag{3.5}$$

для всіх x, в яких права частина неперервна.

Якщо ж f належить класу C^k, то, зокрема, $f = f_l = f_r$, а тому з формули (3.4) випливає, що f_α належить класу C^{k+1}. $\square$

Лема 3.4. *Нехай $f\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, для якої виконані такі умови:*

(a) f строго спадає на $[-\varepsilon, 0]$ і строго зростає на $[0, +\varepsilon]$;
(b) f'_α строго зростає.

Тоді паросток f в точці 0 є топологічно стійким відносно усереднень за мірою μ.

Доведення. Так як f є неперервною, то згідно з лемою 3.3 усереднення f_α є неперервно диференційовною функцією. За припущенням (b) f'_α строго зростає, а тому з твердження (1) леми 3.2 слідує, що f_α є строго випуклою функцією. Так як f_α спадає в околі точки $-\varepsilon + \alpha$ і зростає в околі точки $\varepsilon - \alpha$, то f_α

має єдину точку мінімуму x_α на відрізку $[-\varepsilon+\alpha, \varepsilon-\alpha]$, а значить, паросток f в точці 0 топологічно еквівалентний паростку f_α в точці x_α. □

Теорема 3.5. *Нехай $f, g\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}$ — дві кусково 1-диференційовні функції і $h = f - g$. Припустимо, що виконані такі умови:*

(a) f та g строго спадають на $[-\varepsilon, 0]$ і строго зростають на $[0, +\varepsilon]$;

(b) існує таке $C > 0$, що для всіх $x \in [-\alpha, \alpha]$ виконана нерівність
$$f''_\alpha(x) \geq C\alpha\,;$$

(c) похідна $h' = g' - f'$ — неперервна в точці 0 і $h'(0) = 0$.

Тоді паросток g в точці 0 є топологічно стійким відносно усереднень за мірою μ.

Доведення. Відмітимо, що умова (b) гарантує, що f'_α строго зростає, а тому з (a) та леми 3.4 випливає, що f є топологічно стійкою відносно усереднень за мірою μ. Нам потрібно довести, що за виконання умови (c) функція $g = f + h$ («збурення» f за допомогою h) також буде топологічно стійкою відносно усереднень за мірою μ.

Так як g є неперервною і кусково 1-диференційовною, то, згідно з лемою 3.3, g'_α — неперервна, а g''_α — кусково неперервна. Більш того, з умови (a) слідує, що для $\alpha < \varepsilon$ функція g_α строго спадає на $[-\varepsilon+\alpha, -\alpha]$ і строго зростає на $[\alpha, \varepsilon-\alpha]$. Зокрема,
$$g'_\alpha(-\alpha) < 0, \qquad g'_\alpha(\alpha) > 0.$$
Тому достатньо показати, що $\varliminf\limits_{y\to x} g''_\alpha(x) > 0$ для $x \in [-\alpha, \alpha]$ при всіх достатньо малих α. Звідси випливатиме, що g'_α строго зростає на $[-\alpha, \alpha]$, а тому g_α матиме там єдину точку мінімуму.

Так як h' — неперервна в точці 0, і $h(0) = 0$, то $h(x) = xk(x)$, де
$$k(x) = \int_0^1 h'(tx)dt.$$

Зокрема, k — неперервна і $k(0) = h'(0) = 0$. Нехай

$$P = \sup_{t\in[-1,1]} p(t)$$

і n — число точок розриву щільності p міри μ, див. формулу (3.3). Тоді знайдеться таке $\delta > 0$, що $|k(x)| < \frac{C}{8Pn}$ для всіх $x \in [-\delta, \delta]$.

Нехай $\alpha < \delta/2$. Тоді для всіх $x \in [-\alpha, \alpha]$ та $i = 0, \dots, n+1$ виконана нерівність:

$$|x - t_i\alpha| < |x| + |t_i|\alpha \le \alpha + \alpha = 2\alpha < \delta,$$

а тому

$$|h'(x - t_i\alpha)| = |x - t_i\alpha| \cdot |k(x - t_i\alpha)| \le 2\alpha \cdot \frac{C}{8Pn} = \frac{C\alpha}{4Pn}.$$

Тепер з леми 3.3 отримуємо, що в кожній точці $x \in [-\alpha, \alpha]$, в якій h''_α є неперервною, має місце рівність:

$$\begin{aligned} |h''_\alpha(x)| &\le \sum_{i=0}^{n} \Big| h'_r(x - t_{i+1}\alpha)p_r(t_{i+1}) - h'_l(x - t_i\alpha)p_l(t_i) \Big| \le \\ &\le \frac{C\alpha}{4Pn} \cdot 2Pn = \frac{C\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Тому

$$\varlimsup_{y\to x} |h''_\alpha(y)| \le \frac{C\alpha}{2},$$

а значить,

$$\begin{aligned} \varliminf_{y\to x} g''_\alpha(y) &= \varliminf_{y\to x} \big(f''_\alpha(x) + h''_\alpha(x)\big) \ge \\ &\ge \varliminf_{y\to x} f''_\alpha(x) - \varlimsup_{y\to x} |h''_\alpha(y)| \ge C\alpha - \frac{C\alpha}{2} = \frac{C\alpha}{2} > 0. \end{aligned}$$

Таким чином, g'_α строго зростає, що і треба було довести. $\square$

4. Кусково постійні щільності

Нехай

$$-1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = 1$$

— зростаюча послідовність чисел, $p_0, \ldots, p_n \in [0, +\infty)$ — деякі невід'ємні числа такі, що $p_i \neq p_{i+1}$ для $i = 0, \ldots, n-1$. Визначимо кусково постійну функцію $p\colon [-1, 1] \to [0, +\infty)$ за формулою:

$$p[t_i, t_{i+1}) = p_i, \qquad i = 0, \ldots, n-1$$
$$p[t_n, t_{n+1}] = p_n,$$

див рис. 4.1.

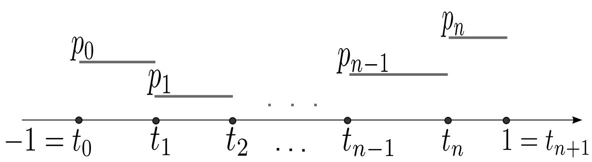


Рис. 4.1

Також вважатимемо, що

$$\int_{-1}^{1} p(t)dt = \sum_{i=0}^{n} (t_{i+1} - t_i)p_i = 1. \tag{4.6}$$

Тоді p визначає ймовірнісну міру μ на борелівській алгебрі множин відрізка $[-1, 1]$ за формулою:

$$\mu(A) = \int_A p(t)dt, \qquad A \in \mathcal{B}[-1, 1].$$

Відповідно, для кожної неперервної функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ її α-усереднення $f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за мірою μ задається формулою:

$$f_\alpha(x) = \int_{-1}^{1} f(x + \alpha t)d\mu = \int_{-1}^{1} f(x + \alpha t)p(t)dt =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} p_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x + \alpha t)dt. \tag{4.7}$$

Відмітимо, що тоді

$$f'_\alpha(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(x+\alpha t)dt = \\ = \sum_{i=0}^{n} \big(f(x+\alpha t_{i+1}) - f(x+\alpha t_i)\big)p_i, \quad (4.8)$$

що є частинним випадком формули (3.4).

Теорема 4.1. *Нехай* $g\colon [-\varepsilon,\varepsilon] \to \mathbb{R}$ *— кусково* 1*-диференційовна функція, що задовольняє такі умови:*

(a) g *строго спадає на* $[-\varepsilon, 0]$ *і строго зростає на* $[0,+\varepsilon]$*;*
(b) існують скінчені границі

$$L = \lim_{x\to 0-0} g'_x, \qquad R = \lim_{x\to 0+0} g'_x.$$

Для $i = 0,\dots,n+1$ *визначимо числа*

$$X_i := L\mu[t_0,t_i] + R\mu[t_i,t_{n+1}] \\ = L\sum_{j=0}^{i-1}(t_{j+1}-t_j)p_j + R\sum_{j=i-1}^{n}(t_{j+1}-t_j)p_j,$$

які, очевидно, задовольняють нерівностям:

$$L = X_{n+1} \le X_n \le \cdots \le X_1 \le X_0 = R.$$

Припустимо, що для кожного $i \in \{0,\dots,n\}$ *хоча б одне з чисел* X_i *або* X_{i+1} *відмінне від нуля. Тоді паросток* g *в точці* 0 *є топологічно стійким відносно усереднень за мірою* μ*.*

Доведення теореми 4.1 базується на такій лемі:

Лема 4.2. *Нехай* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *— неперервна функція, визначена за формулою*

$$f(x) = \begin{cases} Lx, & x \le 0 \\ Rx, & x > 0. \end{cases}$$

Тоді

$$\tfrac{1}{\alpha}\cdot f'_\alpha(x) = \begin{cases} X_{n+1} = L, & x < -\alpha t_{n+1} = -\alpha, \\ X_{i+1} + \dfrac{x+\alpha t_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}(X_i - X_{i+1}), & -\alpha t_{i+1} < x < -\alpha t_i, \\ & 1 \le i \le n, \\ X_0 = R, & -t_0\alpha = \alpha < x, \end{cases} \tag{4.9}$$

$$f''_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < -\alpha t_{n+1} = -\alpha, \\ \dfrac{X_i - X_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}\ \alpha, & -\alpha t_{i+1} < x < -\alpha t_i \\ 0, & -t_0\alpha = \alpha < x. \end{cases} \tag{4.10}$$

Доведення теореми 4.1. Досить перевірити, що для f з леми 4.2 та g виконані умови (a)-(c) теореми 3.5. Умова (a) очевидно виконується.

Нехай

$$C = \min_{i=0,\dots,n} \frac{X_i - X_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}.$$

Тоді з формули (4.10) і припущення, що жодні два сусідні числа X_{i+1} та X_i одночасно не дорівнюють нулю, випливає, що $C > 0$ і $f''_\alpha(x) > C\alpha$ для всіх $x \in [-\alpha, \alpha]$, тобто виконується умова (b).

Нарешті покладемо $h = f - g$. Тоді

$$\lim_{x\to 0-0} h'(x) = \lim_{x\to 0-0} f'(x) - \lim_{x\to 0-0} g'(x) = L - L = 0$$
$$\lim_{x\to 0+0} h'(x) = \lim_{x\to 0+0} f'(x) - \lim_{x\to 0+0} g'(x) = R - R = 0,$$

а тому h' неперервна в точці 0 і $h'(0) = 0$. Отже умова (c) теж виконана, а значить, за теоремою 3.5 паросток g в точці 0 є топологічно стійким відносно усереднень за мірою μ. □

Доведення леми 4.2. Для $n-1 \ge i \ge 0$ покладемо

$$\Delta_i(x) = \big(f(x+\alpha t_{i+1}) - f(x+\alpha t_i)\big)\, p_i.$$

Тоді, згідно з формулою (4.8), $f'_\alpha(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \Delta_i(x)$. Розглянемо три випадки.

a) Якщо $x + \alpha t_i < x + \alpha t_{i+1} < 0$ для деякого $i = 0, \dots, n$, то

$$\begin{aligned}\Delta_i(x) &= \big(L(x + \alpha t_{i+1}) - L(x + \alpha t_i)\big)\, p_i \\ &= \alpha L(t_{i+1} - t_i)\, p_i = \alpha L \mu[t_i, t_{i+1}].\end{aligned}$$

b) Припустимо, що $x + \alpha t_i \le 0 \le x + \alpha t_{i+1}$ для деякого $i = 0, \dots, n-1$. Ця умова рівносильна тому, що $x \in [-\alpha t_{i+1}, -\alpha t_i]$. Покладемо, $d_i = t_{i+1} - t_i$, $s = \dfrac{x + \alpha t_{i+1}}{\alpha d_i}$, див. рис. 4.2. Тоді

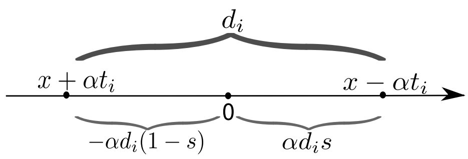


Рис. 4.2

$$1 - s = -\frac{x + \alpha t_i}{\alpha d_i}, \qquad x = -\alpha t_{i+1}(1-s) - \alpha t_i s,$$

а тому

$$\Delta_i(x) = \big(R(x + \alpha t_{i+1}) - L(x + \alpha t_i)\big)\, p_i = \big((1-s)L + sR\big)\, \alpha\, p_i d_i.$$

c) Якщо ж $0 < x + \alpha t_i < x + \alpha t_{i+1}$ для деякого $i = n-1, \dots, 0$, то аналогічно до випадку a) отримуємо, що

$$\begin{aligned}\Delta_i(x) &= \big(R(x + \alpha t_{i+1}) - R(x + \alpha t_i)\big)\, p_i \\ &= \alpha R(t_i - t_{i+1}) p_i = \alpha R \mu[t_{i+1}, t_i].\end{aligned}$$

Тепер можемо довести формулу (4.9) для f'_α. Припустимо, що $x \le \alpha = \alpha t_0$. Тоді $x + \alpha t_i < x + \alpha t_{n+1} \le 0$ для всіх i, а тому

$$f'_\alpha(x) = \sum_{j=0}^{n} \Delta_j(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha L \mu[t_j, t_{j+1}]$$

$$= \alpha L \sum_{j=0}^{n} \mu[t_j, t_{j+1}] = \alpha L \mu[-1,1] = \alpha L.$$

Якщо, як у випадку b),

$$x = -\alpha t_{i+1}(1-s) - \alpha t_i s \in [-\alpha t_{i+1}, -\alpha t_i]$$

для деякого $i = 0, \dots, n$, то

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\alpha} f'_\alpha(x) = \sum_{j=0}^{i-1} L\mu[t_j, t_{j+1}] + \big((1-s)L + sR\big)\, \alpha\, \mu[t_i, t_{i+1}] + \\ + \sum_{j=i+1}^{n} R\mu[t_j, t_{j+1}] \\ = L\mu[t_0, t_i] + \big((1-s)L + sR\big)\, \alpha\, \mu[t_i, t_{i+1}] + R\mu[t_{i+1}, t_{n+1}] \\ = (1-s)\big(L\mu[t_0, t_{i+1}] + R\mu[t_{i+1}, t_{n+1}]\big) + \\ + s\big(L\mu[t_0, t_i] + R\mu[t_i, t_{n+1}]\big) \\ = (1-s)X_{i+1} + sX_i = X_{i+1} + s(X_i - X_{i+1}) \\ = X_{i+1} + \frac{x + \alpha t_{i+1}}{t_{i+1} - t_i}(X_i - X_{i+1}).\end{aligned}$$

Нарешті, коли $\alpha = t_{n+1}\alpha \le x$, то $0 \le x + \alpha t_0 < x + \alpha t_i$ для всіх i, то

$$\begin{aligned}f'_\alpha(x) &= \sum_{j=0}^{n} \Delta_j(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha R\mu[t_j, t_{j+1}] \\ &= \alpha R \sum_{j=0}^{n} \mu[t_j, t_{j+1}] = \alpha R\mu[-1,1] = \alpha R.\end{aligned}$$

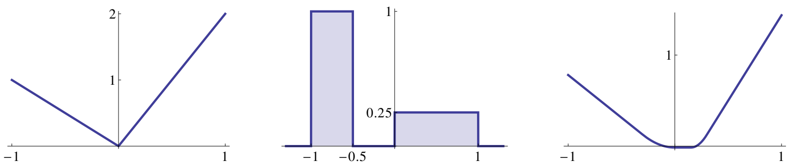
Лему доведено. □

Приклад 4.3. Покажемо, що якщо в теоремі 1.4 $X_{i+1} = X_i = 0$ для деякого i, то функція g може не бути топологічно стійкою відносно міри μ. Визначимо функцію $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і щільність

$p\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ за формулами:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0, \\ 2x, & x \ge 0 \end{cases} \qquad p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1,-0.5], \\ 0, & x \in (-0.5, 0], \\ 0.25, & x \in (0,1), \end{cases}$$

див. рис. 4.3.



a) $f(x)$ (b) $p(x)$ (c) $f_\alpha(x)$

Рис. 4.3

Таким чином, $L = -1$, $R = 2$, $n = 2$, $t_0 = -1$, $t_1 = -0.5$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$, $p_0 = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0.25$. Тоді

$$X_2 = L\mu[-1, t_2] + R\mu[t_2, 1] = -1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.25 = 0,$$
$$X_1 = L\mu[-1, t_1] + R\mu[t_1, 1] = -1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.25 = 0.$$

Отже $X_2 = X_1 = 0$ і умови теореми 4.1 не виконуються. З іншого боку, згідно з формулою (4.9), для

$$x \in [-\alpha t_2, -\alpha t_1] = [0, 0.5\alpha]$$

маємо, що $\frac{1}{\alpha} f'_\alpha(x) = X_2 + \dfrac{x + \alpha t_2}{t_3 - t_2}(X_1 - X_2) = 0$. Це означає, що f_α є постійною на інтервалі $[0, 0.5\alpha]$, а тому вона не може бути топологічно еквівалентною до f, див. рис. 4.3(c). Таким чином, умови теореми 4.1 є суттєвими.

Література

[1] *Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1977. — С. 290.

[2] *Huang T. S.* Two-Dimensional Digital Signal Processing I. Linear Filters. — N.Y.: Springer-Verlag, 1981. — **42**. — P. xi+210.
[3] *Crounse Kenneth R.* Methods for Image Processing and Pattern Formation in Cellular Neural Networks: A Tutorial // *IEEE Transactions on Circuits and Systems-1: Fundamental Theory and Application.* — 1995. — **42**, 10. — P. 583–601.
[4] *Milanfar Peyman.* A tour of modern image filtering: new insights and methods, both practical and theoretical // *IEEE Signal Processing Magazine.* — 2013. — **30**, 1. — P. 106–128.
[5] *Максименко С. І., Марункевич О. В.* Топологічна стабільність функцій відносно усереднень // *Укр. мат. журн.* — 2016. — прийнято до друку.
[6] *Арнольд В. И.* Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера // *УМН.* — 1992. — **47**, 1(283). — С. 3–45.
[7] *Thom René.* L'équivalence d'une fonction différentiable et d'un polynome // *Topology.* — 1965. — **3**, suppl. 2. — P. 297–307.
[8] *Bandt C., Pompe B.* Permutation entropy: A natural complexity measure for time series // *Physical Review Letters.* — 2002. — **88**. — P. 174102.
[9] *Antoniouk Alexandra, Keller Karsten, Maksymenko Sergiy.* Kolmogorov-Sinai entropy via separation properties of order-generated σ-algebras // *Discrete Contin. Dyn. Syst.* — 2014. — **34**, 5. — P. 1793–1809.
[10] *Keller Karsten, Maksymenko Sergiy, Stolz Inga.* Entropy determination based on the ordinal structure of a dynamical system // *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.* — 2015. — **20**, 10. — P. 3507–3524.
[11] *Голубицкий М., Гийемин В.* Устойчивые отображения и их особенности. — М.: Наука, 1981. — С. 640.
[12] *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений, I. — М.: Наука, 1982. — С. 304.