Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 17–23

УДК 517.54

А. К. Бахтин [1]***, Г. П. Бахтина*** [2]***,***
И. В. Денега [3]

[1,3] *(Институт математики НАН Украины, Киев)*

2 *(Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт", Киев)*

[1] **alexander.bahtin@yandex.ru,** [2] **bakhtina@ntu-kpi.kiev.ua,**
[3] **iradenega@yandex.ru**

Разделяющее преобразование в задачах об экстремальном разбиении комплексной плоскости

В данной работе изучается одна известная проблема об описании экстремальных конфигураций, которые максимизируют произведение внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей.

In this paper we consider a problem on a description of extremal configurations under which a product of inner radii for mutually non-overlapping domains gets a maximum.

1. Введение. Экстремальные задачи о неналегающих областях составляют известное направление в геометрической теории функций комплексного переменного, созданное в работах многих исследователей (см., например, [1 – 17]). В последнее время большой интерес вызывают экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами. Первые задачи такого типа рассмотрены в [17]. Первоначальным толчком к развитию данной тематики послужила работа [14], в которой впервые решена задача о максимуме произведения конформных радиусов двух непересекающихся односвязных областей и в дальнейшем это направление получило значительное развитие в работах многих авторов. Одним из важных элементов исследования экстремальных задач является теория квадратичных дифференциалов, один из ключевых результатов которой — "Основная структурная теорема" Дж. А. Дженкинса, дающая полное описание глобальной структуры траекторий положительного квадратичного дифференциала на конечной римановой поверхности [16]. Новые возможности для данной теории возникли благодаря методу кусочно-разделяющего преобразования [1 – 3], позволяющему, при определенных условиях, сводить задачи с большим числом неизвестных параметров к задачам с меньшим их числом. Это обстоятельство позволило решить ряд трудных задач. Задача такого типа рассмотрена в этой работе.

2. Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — расширенная комплексная плоскость или сфера Римана, $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$.

Системой неналегающих областей называется конечный набор произвольных областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k,m = \overline{1,n}$.

Пусть $r(B,a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ (см., например, [1, 3, 4]). Внутренний радиус области B связан с обобщенной функцией Грина $g_B(z,a)$ области B (см. [4, 15]) соотношением

$$g_B(z,a) = -\ln|z-a| + \lg r(B,a) + o(1), z \to a,$$

$$g_B(z,\infty) = \ln|z| + \lg r(B,a) + o(1), \quad z \to \infty.$$

Введем обозначения $P_k = P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi}\arg\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k = 2$.

Данная работа базируется на применении кусочно-разделяющего преобразования, развитого в [1, с. 48 – 50], [3, с. 120]. Пусть $\zeta = \pi_k(w)$ обозначает ту однозначную ветвь многозначной аналитической функции $-i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1,n}$, которая осуществляет однолистное и конформное отображение P_k на правую полуплоскость $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$.

3. Основные результаты. Целью данной работы является получение точных оценок сверху для функционала следующего вида

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \tag{1}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — система точек расположенная на единичной окружности, $a_0 = 0$, $\{B_k\}_{k=0}^n$ — система неналегающих областей таких, что $a_k \in B_k$ при $k = \overline{0, n}$.

Пусть

$$F_\delta(x) = 2^{x^2+6} \cdot x^{x^2+2-2\delta} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},$$

$$x \in (0, 2], \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 0,7.$$

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0, 1]$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0,7$. Тогда для любой системы различных точек единичной окружности $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и любого набора взаимно неналегающих областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, справедливо неравенство*

$$J_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-\frac{\delta \cdot n}{2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{\delta} \cdot \left[F_\delta\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{n}{2}}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k, $k = \overline{0, n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 существенно используются идеи доказательства теоремы 4 [2] (см. также [7]) и свойства разделяющего преобразования [1–3]. Повторяя рассуждения, приведенные в [4] при доказательстве теоремы 5.2.3, и учитывая определения пункта 2 для наборов областей $\{P_k\}_{k=1}^n$, функций $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ и чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, получим неравенство для функционала (1)

$$J_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-\frac{\delta n}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{\delta} \left[\prod_{k=1}^{n} F_\delta\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2} \quad \delta \in [0; 0,7]. \tag{2}$$

Теперь рассмотрим вспомогательный функционал

$$\tilde{J}_n(\gamma) = \gamma^{\frac{\delta n}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right)^{-\delta} J_n^{(\gamma)}.$$

Из неравенства (2) следует, что

$$\tilde{J}_n(\gamma) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} F_\delta \left(\alpha_k \sqrt{\gamma} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Далее мы используем метод, предложенный в работе [7]. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{k=1}^{n} F_\delta(x_k) \longrightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma}, \quad x_k = \alpha_k \sqrt{\gamma}$$

$$0 < x_k \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 0,7.$$

Пусть $\Psi_\delta(x) = \ln \left(F_\delta(x) \right)$ и $X^{(0)} = \left\{ x_k^{(0)} \right\}_{k=1}^{n}$ — произвольный экстремальный набор точек выше указанной задачи.

Поскольку экстремальный набор точек $\left\{ x_k^{(0)} \right\}_{k=1}^{n}$ зависит, вообще говоря, от параметров γ и δ, то в дальнейшем, там, где это необходимо, мы будем явно обозначать зависимость этих точек от указанных параметров.

Известно [4, 12], что экстремальные конфигурации могут реализоваться только при условии $0 < x_k < 2$, $k = \overline{1, n}$. Повторяя рассуждения работы [7], получаем утверждение: если $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, $k \neq j$, тогда имеет место следующее соотношение

$$\Psi'_\delta(x_k^{(0)}) = \Psi'_\delta(x_j^{(0)}), \tag{3}$$

где $k, j = \overline{1, n}$, $k \neq j$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0,7$. Покажем, что на основании соотношения (3) при условиях теоремы 1 выполняется равенство

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}.$$

Положим $\sigma_1 := \sigma_1(\delta, \gamma) = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k^{(0)}(\delta, \gamma)$, $\sigma_0 := \sigma_0(\delta, \gamma) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k^{(0)}(\delta, \gamma)$, $\sigma_1 \leqslant \sigma_k \leqslant \sigma_0$, $k = \overline{1, n}$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0,7$, $\gamma \in (0, 1]$.

Функция

$$\Psi'_\delta(x) = 2x\ln(2x) + (2-x)\ln(2-x) - (2+x)\ln(2+x) + \frac{2}{x} - \frac{2\delta}{x}$$

убывает на промежутке $(0, x_0(\delta,\gamma)]$, $x_0(0,7;\gamma) \leqslant x_0(\delta,\gamma) \leqslant x_0(0,\gamma)$, $(x_0(0,7;\gamma) \approx 1,08441, \quad x_0(0,\gamma) \approx 1,324664)$ и возрастает на $[x_0(\delta,\gamma), 2)$ (см. Рис. 1).

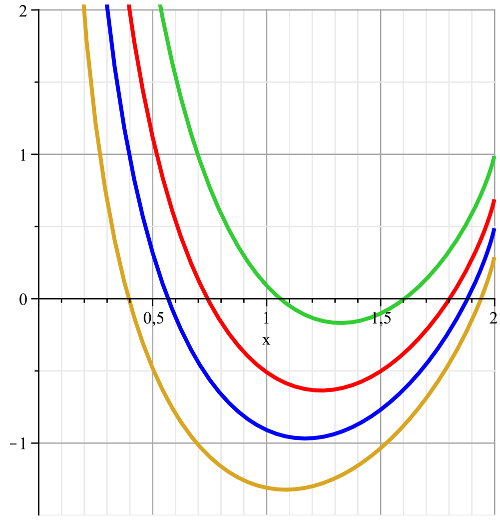

Рис. 1: График функции $\Psi'_\delta(x)$

Функция $\Psi''_\delta(x)$ строго возрастает на $(0,2)$, таким образом выполняется соотношение $\mathrm{sign}\,\Psi''_\delta(\mathrm{x}) \equiv \mathrm{sign}\,(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0(\delta,\gamma))$.

Если $\sigma_0 \leqslant x_0(\delta,\gamma)$, то в силу строгой монотонности $\Psi'_\delta(x)$ на $[0,\, x_0(\delta,\gamma)]$, получаем, что $x_1^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$.

Предположим, что $x_0(\delta,\gamma) \leqslant \sigma_0 < 1,9$, тогда

$$\sigma_1 \leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} x_k^{(0)} = \frac{2\sqrt{\gamma} - \sigma_0}{n-1} \leqslant \frac{2-\sigma_0}{n-1}.$$

Следовательно для $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0,1]$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0,7$, выполняются неравенства

$$\sigma_1 \leqslant (2\sqrt{\gamma}-\sigma_0)/(n-1) \leqslant (2-x_0(\delta,\gamma))/3 \leqslant (2-1,08441)/3 < 0,305197.$$

В силу убывания $\Psi'_\delta(x)$ на $(0,\, x_0(\delta,\gamma))$ имеем

$$\Psi'_\delta(\sigma_1) > \Psi'_\delta(0,305197) > \Psi'_{0,7}(0,305197) = 0,633521 >$$
$$> 0,587569 = \Psi'_0(1,9) \geqslant \Psi'_\delta(\sigma_0),$$

что противоречит соотношению (3). Следовательно, получаем противоречие с экстремальностью набора $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ и, таким образом, σ_0 не может принадлежать $[x_0(\delta,\gamma);\, 1,9)$.

Допустим, что $1,9 \leqslant \sigma_0 \leqslant 2$. Тогда для $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0,1]$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0,7$, имеем

$$\sigma_1 \leqslant (2\sqrt{\gamma}-\sigma_0)/(n-1) \leqslant (2-1,9)/3 < 0,033333.$$

То есть,

$$\Psi'_\delta(\sigma_1) > \Psi'_\delta(0,033333) > \Psi'_{0,7}(0,033333) = 17,706772 >$$
$$> 1 = \Psi'_0(2) \geqslant \Psi'_\delta(\sigma_0),$$

что противоречит условию (3). Таким образом, σ_0 также не может принадлежать выше указанному промежутку $[x_0(\delta,\gamma);\, 2)$. Следовательно, для экстремального набора $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ возможен только случай $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$. В силу логарифмичной выпуклости, справедливо соотношение $\prod\limits_{k=1}^{n} F_\delta\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right) \leqslant \left[F_\delta\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^n$. Утверждение о достижимости знака равенства проверяется непосредственно. Теорема 1 доказана.

Список литературы

[1] *Дубинин В.Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1994. — 49, № 1(295). — С. 3 – 76.

[2] *Дубинин В.Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — 168. — С. 48 – 66.

[3] *Дубинин В.Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. — Владивосток: Дальнаука, ДВО РАН, 2009. – 390 с.

[4] *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. — Праці Ін-ту мат-ки НАН Укр. — К.: Ін-т математики НАН України. — 2008. — 308 с.

[5] *Бахтін О. К.* Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 5. — С. 596 – 610.

[6] *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Подвысоцкий Р.В.* Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Доп. НАН України. — 2009. — №9. — С. 7 – 11.

[7] *Ковалев Л.В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневост. мат. сб. — 1996. — 2. — С. 96 – 98.

[8] *Кузъмина Г.В.* О связи различных задач об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 1998. — **254.** — С. 116 – 131.

[9] *Подвысоцкий Р.В.* Об одном неравенстве для внутренних радиусов неналегающих областей // Доп. НАН України. — 2009. — № 12. — С. 33 – 37.

[10] *Bakhtin A.K., Bakhtina G.P., Denega I.V.* Inequalities in problems on non-overlapping domains // arXiv preprint /arXiv:1108.2383 [math.CV]/. — 2011. (in Russian).

[11] *Заболотний Я.В.* Про одну екстремальну задачу В.М. Дубиніна // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, №1. — С. 24 – 31.

[12] *Денега И.В.* Квадратичные дифференциалы и разделяющее преобразование в экстремальных задачах о неналегающих областях // Доп. НАН України. — 2012. — №4. — С. 15 – 19.

[13] *Колбина Л.И.* Конформное отображение единичного круга на неналегающие области // Вестник Ленинград. ун-та. — 1955. — 5. — С. 37 – 43.

[14] *Лаврентьев М.А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — 5. — С. 159 – 245.

[15] *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.:Наука, 1966. — 628 с.

[16] *Дженкинс Дж.А.* Однолистные функции и конформные отображения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.

[17] *Бахтина Г.П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1975. — 11 с.