УДК 517.5

Я.Г. Іващук (Нац. ун-т водного господарства та природокористування, Рівне)

ОЦІНКИ ЗБІЖНОСТІ АЛГОРИТМУ РЕМЕЗОВОГО ТИПУ ДЛЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ КЛАСІВ

Quadratical convergence of Remez type algorithm for the best approximation by unisolvent function is proven under conditions equivalent to ones for quadratical convergence of Remez algorithm for polinomials.

В статті доведено квадратичну збіжність алгоритму ремезового типу для інтерполяційних класів при умовах, аналогічних тим, при яких забезпечується квадратична збіжність алгоритму Ремеза для поліномів.

Вступ. На відрізку $[a,\, b]$ розглядається простір $C\,[a, b]$ неперервних функцій та інтерполяційний клас F порядку $n-1$, елементи якого неперервні по змінній x і неперервно диференційовні по параметрах c_j, $j = \overline{1,n}$. Інтерполяційним класом F порядку $n-1$ називається множина неперервних по $x \in [a,b]$ функцій $y = F\,(\,x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, залежних від параметрів $c_1, c_2, ..., c_n$, в якому однозначно розв'язується інтерполяційна задача в n довільних точках відрізка $[a,\, b]$ [1, с. 25]. Оператор $\mathrm{P}:\ C\,[a,b] \to F$, який у відповідність кожній неперервній функції $f \in C\,[a,b]$ ставить елемент її найкращого рівномірного наближення $\mathrm{P}\,(f,x) \in F$, називаємо оператором найкращого наближення. Величину найкращого рівномірного наближення функції $f \in C\,[a,b]$ позначимо через $E\,(f)$, тобто $E\,(f) = \|\, f - \mathrm{P}\,(f)\,\|_{C[a,b]}$.

Як відомо, алгоритм Ремеза [1, с. 28] передбачає ітераційний процес, де на кожній ітерації будується елемент найкращого наближення на скінченній множині із $n+1$ точки (чебишовська інтерполяція). У випадку нелінійних інтерполяційних класів побудова такого найкращого наближення в свою чергу потребує додатково ітераційного процесу на кожній скінченній множині із $n+1$ точки. Таким чином класичний алгоритм Ремеза для інтерполяційних класів складається із двох вкладених ітераційних процесів [2, с. 196].

Запропонований алгоритм ремезового типу реалізується одним ітераційним процесом.

1. Основні позначення і стислий опис алгоритму. Алгоритм побудови елемента найкращого рівномірного наближення в інтерполяційному класі описано у [2, с. 197]. Там же доведено його лінійну збіжність. Ітераційний процес може розпочинатися з довільного початкового елемента $F(x, c^0)$ з інтерполяційного класу та довільної початкової множини точок $X^0 = \{x_1^0, x_2^0, ..., x_{n+1}^0\}$. Виконуючи ітерацію s знаходимо точку $x_*^s \in [a, b]$, у якій різниця $f - F\left(x, c^{s-1}\right)$ набуває найбільшого за модулем значення, і будуємо множину $X^s = X^{s-1} \setminus \left\{x_{j_0}^{s-1}\right\} \cup \{x_*^s\}$, виключаючи таку точку $x_{j_0}^{s-1}$, щоб на новій множині X^s різниця $f - F\left(x, c^{s-1}\right)$ зберігала альтернанс. Позначимо:

$$E^s = \|f - F(x, c^s)\|_{C[a,b]}, e^s = \min\{|f - F(x, c^s)|, \ x \in \mathrm{X}^s\}.$$

Побудуємо на множині X^s допоміжну функцію g_s так, щоб елемент $F(x, c^{s-1})$ був найкращим рівномірним наближенням функції $f + g_s$ на цій множині, і при цьому виконувалась умова:

$$\left\|f - F\left(x, c^{s-1}\right)\right\|_{C[a,b]} = \left\|f(x) + g_s - F\left(x, c^{s-1}\right)\right\|_{C(\mathrm{X}^s)}.$$

Для цього достатньо покласти в усіх точках x_j^s множини X^s:

$$g_s\left(x_j^s\right) = E^{s-1} sign\left(f\left(x_j^s\right) - F\left(x_j^s, c^{s-1}\right)\right) - \left(f\left(x_j^s\right) - F\left(x_j^s, c^{s-1}\right)\right).$$

Далі, повторюючи кроки нового алгоритму побудови елемента найкращого наближення на множині з $n+1$ точки [2, с. 192, 193], знаходимо коефіцієнти похідної-полінома $D_s\left(f + g_s, -g_s\right) = \sum_{k=1}^{n} d_k^s \frac{\partial F\left(x, c^{s-1}\right)}{\partial c_k^{s-1}}$ та величину α_s найкращого наближення функції $-g_s(x)$ цим поліномом на множині X^s із системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$D\left(f + g_s, -g_s, x_j^s\right) + \alpha_s (-1)^j \theta = -g_s\left(x_j^s\right), \ \theta \in \{-1, 1\}, \qquad (1)$$

підбираємо величину кроку t_s як зазначено у [2, с. 197] та знаходимо параметри наступного елемента $F^s(x, c^s)$ за формулою $c_k^s = c_k^{s-1} +$

$t_s d_k^s$. Як доведено у [2, с. 198], починаючи з деякої ітерації s значення кроку $t_s = 1$.

В результаті отримуємо послідовність функцій $F^s(x, c^s)$, $s = 0, 1, \ldots$, інтерполяційного класу F збіжну до елемента $F^*(x, c^*) = \mathrm{P}\,(f, x)$ зі швидкістю геометричної прогресії.

Через P позначимо оператор найкращого наближення елементами інтерполяційного класу. У [3, с. 178] доведено, що оператор P задовольняє умову Ліпшиця, а у [4, с. 72] доведено його диференційовність за напрямком, а також слабку диференційовність (по Гато) у випадку, коли множина точок максимального відхилення містить рівно $n + 1$ точку.

2. Основний результат.

Теорема. *Нехай задана на $[a, b]$ функція $f(x)$ є двічі неперервно диференційовною, а функції $F\,(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ інтерполяційного класу F двічі неперервно диференційовні по x та по параметрах c_1, c_2, $\ldots$, c_n і нехай $P\,(f, x)$ є елементом найкращого рівномірного наближення функції $f\,(x)$. Якщо модуль різниці $f\,(x) - P\,(f, x)$ досягає свого максимуму рівно в $n + 1$ точці $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, які утворюють чебишовський альтернанс цієї різниці на відрізку $[a, b]$, і в кожній такій точці виконується умова*

$$f''\,(x_j) - P''_{xx}\,(f, x_j) \neq 0, \quad j = 1, 2, \ \ldots \ , n + 1,$$

то послідовність елементів $F^s\,(x, c_1^s, c_2^s, \ldots, c_n^s)$ побудована за алгоритмом ремезового типу, починаючи з деякого номера s, збігається до елемента найкращого наближення функції $f(x)$ з квадратичною швидкістю.

Доведення. Надалі будемо розглядати оцінки в нормі простору $C[a, b]$, якщо не зазначено норму іншого простору.

Будемо доводити, що, починаючи з деякої ітерації, виконується нерівність

$$\|\mathrm{P}(f) - F^s\| \leq K \left\|\mathrm{P}(f) - F^{s-1}\right\|^2, \quad K = \mathrm{const} > 0.$$

На s-му кроці ітерації алгоритму функція g_s задається на скінченній множині X^s. При виконанні умов 1)-2) можна продовжити цю функцію до двічі неперервно диференційної на всьому відрізку $[a, b]$

із збереженням норми і забезпеченням рівності

$$\|f + g_s - F^s\|_{C(X^s)} = \|f + g_s - F^s\|_{C[a,b]} = \|f + g_s - F^s\| .$$

Оскільки алгоритм збігається [2, с. 197 – 198], то, починаючи з деякої s-ї ітерації, будуть виконуватися такі умови:

1) в точках множини X^s різниця $f(x) - F^{s-1}(x)$ змінює знак (альтернує);

2) різниця $f + (1-t)g_s - \mathrm{P}(f + (1-t)g_s)$ матиме рівно $n+1$ екстремальну точку при кожному t, $\quad 0 \le t \le 1$, і відповідно оператор найкращого наближення буде диференційований по Гато у кожній точці $f + (1-t)g_s$;

3) значення кроку $t_s = 1$;

4) $\|g_s\| < 1$.

Похідна оператора найкращого наближення у точці $f + (1-t)g_s$, $0 \le t \le 1$, за напрямком $-g_s$ знаходиться із системи рівнянь

$$D\left(x_j\left(t\right)\right) + \left(-1\right)^j \theta\, \alpha\left(t\right) = -g_s\left(x_j\left(t\right)\right),\ \theta \in \{-1, 1\}, \tag{2}$$

де $x_j(t)$, $j = 1, ..., n$, є точками альтернансу різниці $f + (1-t)g_s - \mathrm{P}(f + (1-t)g_s)$, а $\alpha(t) = E^{'}(t) = \frac{d\|f+(1-t)g_s - \mathrm{P}(f+(1-t)g_s)\|}{dt}$ — похідна від величини найкращого наближення по параметру t [2, с. 194].

Зокрема, при $t = 0$ похідна $D(f + g_s, -g_s)$ знаходиться із системи рівнянь (1).

Оскільки при виконанні умов 1)-3) визначник матриці системи (2) відокремлений від нуля для всіх значень $t \in [0, 1]$, то коефіцієнти $d_i\left(t\right)$ полінома похідної D задовольняють нерівність

$$\left|d_i\left(t\right)\right| \le k_2 \left\|g_s\right\| . \tag{3}$$

З іншої системи рівнянь

$$f_x^{'}(x_j(t)) + (1-t){g_s}_x^{'}(x_j(t)) - \mathrm{P}_x^{'}(x_j(t), t) = 0,$$

випливає, що всі функції $x_j\left(t\right)$ диференційовані по t і їхні похідні також є обмеженими. Справді, за теоремою про неявну функцію, нерівністю (3) в умовах теореми маємо:

$$\left|\frac{d\,x_j\,(t)}{dt}\right| = \left|-\frac{\left(f'_x + (1-t)\cdot {g_s}'_x - \mathrm{P}'_x\,(x_j\,(t))\right)'_t}{\left(f'_x + (1-t)\cdot {g_s}'_x - \mathrm{P}'_x\,(x_j\,(t))\right)'_x}\right| =$$

$$= \left|\frac{-{g_s}'_x\,(x_j\,(t)) - D'_x\,(x_j\,(t))}{f''_{xx} + (1-t)\cdot {g_s}''_{xx}\,(x_j\,(t)) - \mathrm{P}''_{xx}\,(x_j\,(t))}\right|,$$

а оскільки за умовою теореми $f''_{xx} + (1-t)\cdot {g_s}''_{xx}\,(x_j\,(t)) - -\mathrm{P}''_{xx}\,(x_j\,(t)) \neq 0$, то

$$\left|\frac{d\,x_j\,(t)}{dt}\right| \le k_3\,\|g_s\|\,, \quad k_3 = \mathrm{const} > 0. \tag{4}$$

Оскільки поліноми $D(x,t)$ здійснюють чебишовську інтерполяцію функції $-g_s\,(x)$ у точках $x_j(t)$ і є неперервно диференційовними по змінній x, то з (4) випливає нерівність

$$\|D\,(f+g_s,-g_s)\| \le k_1\,\|g_s\|\,.$$

Із того факту, що елементи інтерполяційного класу є двічі неперевно диференційованим за параметрами, випливає, що залишковий член R_{s1} формули скінченних приростів

$$F^s = F(c^{s-1}+d^s) = F(c^{s-1}) + D(f+g_s,-g_s) + R_{s1}$$

задовольняє нерівність

$$\|R_{s1}\| \le A_0 \max \|d_i^s\|^2 \le A_1\ \|g_s\|^2\,. \tag{5}$$

За нерівністю трикутника з використанням формули скінченних приростів із залишковим членом [5, с. 649] маємо:

$$\|\mathrm{P}(f) - F^s\| \le \left\|\mathrm{P}(f) - F^{s-1} - D(f+g_s,-g_s)\right\| + A_1\ \|g_s\|^2 \le$$

$$\le \sup_{0\le\theta\le1} \left\|\mathrm{P}'(f) - \mathrm{P}'(f+\theta g_s)\right\| \|g_s\| + A_1\ \|g_s\|^2\,. \tag{6}$$

Похідною оператора P найкращого наближення в напрямку функції $-g_s$ є лінійний оператор, який здійснює чебишовську інтерполяцію функції $-g_s$ на множині точок альтернансу. На основі нерівності (4) віддаль між відповідними точками альтернансу для найкращих наближень функцій f та $f + \theta\, g_s$ по порядку не перевищує норми $\|g_s\|$, тому маємо нерівність

$$\sup_{0\le\theta\le 1}\left\|\mathrm{P}^{'}(f) - \mathrm{P}^{'}(f+\theta g_s)\right\| \le A_2\,\|g_s\|\,.$$

В підсумку із (5), (6) та останньої нерівності випливає нерівність

$$\|\mathrm{P}(f) - F^s\| \le A\,\|g_s\|^2\,. \tag{7}$$

Покажемо, що

$$c\,\|g_s\| \le \left\|\mathrm{P}(f) - F^{s-1}\right\|, \quad c = \mathrm{const} > 0. \tag{8}$$

Міркуючи як і при доведенні нерівності (6), отримуємо

$$\mathrm{P}(f) - \mathrm{P}(f+g_s) = D(f+g_s, -g_s) + R_{s2},$$

$$\|\mathrm{P}(f) - \mathrm{P}(f+g_s)\| \ge \|D(f+g_s,-g_s)\| - A_2\;\|g_s\|^2\,.$$

Оскільки різниця $f(x) - F^{s-1}(x, c^{s-1})$ у точках множини X^s змінює знак, то знакозмінною у цих точках буде і функція $-g_s$ (якщо її нульовим значенням при потребі приписати знаки плюс чи мінус). Тому поліном $D(f+g_s,-g_s)$ найкращого наближення цієї функції на множині X^s задовольняє нерівність

$$\|D(f+g_s,-g_s)\| \ge c_0\,\|g_s\|_{C[a,b]} = c_0\,\|g_s\|\,.$$

У підсумку отримуємо потрібну нерівність (8):

$$\|\mathrm{P}(f) - \mathrm{P}(f+g_s)\| \ge c\,\|g_s\|\,, \quad c = \mathrm{const} > 0.$$

З нерівностей (7) та (8) випливає нерівність:

$$\|\mathrm{P}(f) - F^s\| \le A\;\|g_s\|^2 \le \frac{A}{c^2}\;\left\|\mathrm{P}(f) - F^{s-1}\right\|^2 = K\;\left\|\mathrm{P}(f) - F^{s-1}\right\|^2.$$

Теорему доведено.

1. *Ремез Е.Я., Гаврилюк В.Т.* О построении чебышевских приближений функциями интерполяционных классов // Укр. мат. жур. — 1971. — **23**, №1. — С. 25 – 33.

2. *Іващук Я.Г.* Алгоритми найкращих наближень функцій інтерполяційними класами // Теорія наближень функцій та її застосування: Праці Інституту математики НАН України. — 2000. — **31**. — С. 190 – 200.

3. *Angelos J.R., Henry M.S., Kaufman E.H., Kroo A., Lenker T.D.* Local Lipschitz and Strong Unicity Constants for Certain Nonlinear Famlies // Journal of aproximation theory. — 1989. — **58**. — P. 164 – 183.

4. *Іващук Я.Г., Ковтунець В.В.* Диференціальні властивості оператора найкращого рівномірного наближення функцій елементами інтерполяційного класу // Волинський математичний вісник. – 1999. — **6**. — С. 69 – 75.

5. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984. — 752 с.