Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 9–16

УДК 517.5

Е. С. Афанасьева [1], ***Р. Р. Салимов*** [2]

[1] *(Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск)*

[2] *(Институт математики НАН Украины, Киев)*
[2] **ruslan623@yandex.ru**

Асимптотическое поведение решений уравнения Бельтрами

We study an asymptotic behavior (as $|z| \to \infty$) of homeomorphic solutions of the Beltrami equation by different conditions on the dilatation.

В данной статье исследуется асимптотическое поведение при $|z| \to \infty$ гомеоморфных решений уравнения Бельтрами с различными условиями на дилатацию.

1. Введение. Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е. связное открытое подмножество $\mathbb{C}$ и пусть $\mu(z)\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. (почти всюду) в D. *Уравнением Бельтрами* называется уравнение вида

$$f_{\bar z} = \mu(z)\, f_z, \tag{1}$$

где $f_{\bar z} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y частные производные отображения f по x и y, соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \tag{2}$$

дилатационным отношением уравнения (1). Уравнение Бельтрами (1) называется *вырожденным*, если $\operatorname{ess\,sup} K_\mu(z) = \infty$.

Существование гомеоморфного $W^{1,1}_{\rm loc}$ решения было недавно установлено для многих вырожденных уравнений Бельтрами, см., напр., соответствующие ссылки в монографиях [1, 2].

2. Предварительные сведения. Напомним некоторые определения. Борелева функция $\rho\colon \mathbb{C} \longrightarrow [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{C}$, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(z)\,|dz| \geqslant 1 \tag{3}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Тогда *модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$\mathcal{M}(\Gamma) = \inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \rho^2(z)\,dm(z), \tag{4}$$

здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{C}$.

Следуя работе [3], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и C — непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором*. Конденсатор $\mathcal{E}$ называется *кольцевым конденсатором*, если $G = A \setminus C$ — кольцо, т.е., если G — область, дополнение которой $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ состоит в точности из двух компонент. Говорят также, что конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежит в области D, если $A \subset D$. Очевидно, что если $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ — непрерывное, открытое отображение и $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор в D, то (fA, fC) также конденсатор в fD. Далее $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Функция $u\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна на прямой*, имеющей непустое пересечение с A, если она абсолютно непрерывна на любом отрезке этой прямой, заключенном в A. Функция $u\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу ACL (*абсолютно непрерывна на почти всех прямых*), если она абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси.

Обозначим через $C_0(A)$ множество непрерывных функций $u\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем, $W_0(\mathcal{E}) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных функций $u\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ таких, что: 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(z) \geqslant 1$ для $z \in C$ и 3) u принадлежит классу ACL. Также обозначим

$$|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\,. \qquad (5)$$

Величину

$$\operatorname{cap}\mathcal{E} = \operatorname{cap}(A, C) = \inf_{u\in W_0(\mathcal{E})} \int\limits_A |\nabla u|^2\, dm(z) \qquad (6)$$

называют *ёмкостью* конденсатора $\mathcal{E}$.

Пусть D — область в $\mathbb{C}$, а $E\,,F \subseteq D$ — произвольные ее подмножества. Обозначим через $\Delta(E,F;D)$ семейство всех кривых $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, которые соединяют E и F в D, т.е., $\gamma(a) \in E\,, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$.

В дальнейшем мы будем использовать равенство (см. теорему 1 в [5]):

$$\operatorname{cap}\mathcal{E} = \mathcal{M}(\Delta(\partial A, \partial C; A\setminus C)). \qquad (7)$$

Известно (см., напр., неравенство (8.9) в [4]), что

$$\operatorname{cap}\mathcal{E} \geqslant \frac{4\pi}{\ln\frac{m(A)}{m(C)}}. \qquad (8)$$

Напомним следующие термины. Пусть $d_0 = \operatorname{dist}(\mathrm{z_0}, \partial \mathrm{D})$ и пусть $Q\colon D \longrightarrow [0\,,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Положим

$$\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}\,, \qquad (9)$$

$$S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i\}\,, \quad i = 1, 2. \qquad (10)$$

Будем говорить, что гомеоморфизм $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке $z_0 \in D$*, если соотношение

$$\mathcal{M}\left(\Delta\left(fS_1, fS_2, fD\right)\right) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}} Q(z)\cdot \eta^2(|z-z_0|)\, dm(z) \qquad (11)$$

выполнено для любого кольца $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$ и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \longrightarrow [0, \infty]$, такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,. \qquad (12)$$

Говорят, что гомеоморфизм $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в области D*, если условие (11) выполнено для всех точек $z_0 \in D$.

Следующее утверждение можно найти в работе [6], теорема 5.1.

Теорема 1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$, и $f\colon D \longrightarrow D'$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ и $K_\mu \in L^1_{\rm loc}(D)$. Тогда f является кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $z_0 \in D$ с $Q(z) = K_\mu(z)$.*

3. Поведение на бесконечности. Асимптотическое поведение на бесконечности кольцевых Q-гомеоморфизмов при оптимальных условиях исследовалось в работе [7]. Пусть r_0 — произвольное фиксированное положительное число. Для гомеоморфизма $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, полагаем

$$M(R,f) = \max_{|z-z_0|=R} |f(z) - f(z_0)|\,. \tag{13}$$

Лемма 1. *Пусть $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса $W^{1,1}_{\rm loc}$. Если $K_\mu \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{C})$, тогда*

$$\mathcal{M}\,\left(\Delta\left(fS_1, fS_2, f\mathbb{A}\right)\right)\ \leqslant \Lambda(R)\,, \tag{14}$$

где $S_1 = S(z_0, r_0)$, $S_1 = S(z_0, R)$, $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_0, R)$ и

$$\Lambda(R) = \left(\int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\, dt\right)^{-2} \cdot \int\limits_{\mathbb{A}} K_\mu(z)\, \psi^2(|z-z_0|)\, dm(z) \tag{15}$$

для любой измеримой (по Лебегу) функции $\psi\colon [0,\infty] \longrightarrow [0,\infty]$, такой, что

$$0 < \int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\, dt < \infty \qquad \forall\ R > r_0\,. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_0, R)$, $0 < r_0 < R$. Рассмотрим измеримую функцию

$$\eta(t)\ =\ \begin{cases} \dfrac{\psi(t)}{\int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\, dt}\,, & t \in (r_0, R) \\ 0\,, & t \in \mathbb{R} \setminus (r_0, R). \end{cases} \tag{17}$$

Отметим, что функция $\eta(t)$ удовлетворяет условию (12). Тогда из теоремы 1 следует оценка (14).

Лемма 2. *Пусть $\mu\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в., такая, что $K_\mu \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{C})$. Тогда уравнение (1) не имеет гомеоморфного решения $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с асимптотикой*

$$\liminf_{R\to\infty} M(z_0, f, R)\, e^{-\frac{2\pi}{\Lambda(R)}} = 0\,. \tag{18}$$

Доказательство. Предположим противное, а именно, что существует гомеоморфное решение $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ класса $W^{1,1}_{\rm loc}$.

Рассмотрим кольцо $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_0, R)$ с $0 < r_0 < R$. Тогда $\left(fB_R, f\overline{B}_{r_0}\right)$ — кольцевой конденсатор в $\mathbb{C}$ и, согласно (7), имеем равенство

$$\operatorname{cap}\left(fB_R, f\overline{B}_{r_0}\right) = \mathcal{M}(\triangle(\partial fB_R, \partial fB_{r_0}; f\mathbb{A})),$$

а ввиду гомеоморфности f, равенство

$$\triangle\left(\partial fB_R, \partial fB_{r_0}; f\mathbb{A}\right) = f\left(\triangle\left(\partial B_R, \partial B_{r_0}; \mathbb{A}\right)\right).$$

В силу леммы 2 имеем

$$\operatorname{cap}\ \left(fB_R, \overline{fB}_{r_0}\right) \leqslant \Lambda(R)\ . \tag{19}$$

С другой стороны, в силу неравенства (8) вытекает оценка

$$\operatorname{cap}\ \left(fB_R, \overline{fB}_{r_0}\right) \geqslant \frac{4\pi}{\ln \frac{m(fB_R)}{m\left(\overline{fB}_{r_0}\right)}}\,. \tag{20}$$

Комбинируя (19) и (20), получаем, что

$$m\left(\overline{fB}_{r_0}\right) \leqslant m\left(fB_R\right) e^{-\frac{4\pi}{\Lambda(R)}}\ . \tag{21}$$

Заметим, что $m\left(fB_R\right) \leqslant \pi M^2(z_0, f, R)$, поэтому из неравенства (21) вытекает следующая оценка

$$\sqrt{\frac{m\left(\overline{fB}_{r_0}\right)}{\pi}} \leqslant M(z_0, f, R)\, e^{-\frac{2\pi}{\Lambda(R)}}\ . \tag{22}$$

Очевидно, $M_0 = \sqrt{\frac{m\left(\overline{fB}_{r_0}\right)}{\pi}} > 0$ и не зависит от R. Переходя к нижнему пределу при $R \to \infty$ и учитывая условие (18), получаем $m(fB_{r_0}) = 0$, что противоречит гомеоморфности отображения f.

Лемма 3. *Пусть* $\mu\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *— измеримая функция с* $|\mu(z)| < 1$ *п.в. и* $K_\mu \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$. *Пусть существует неотрицательная измеримая (по Лебегу) функция, такая, что*

$$0 < I(R) = \int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\, dt < \infty \qquad \forall\ R\ > r_0\,, \tag{23}$$

и при $R \to \infty$

$$\int\limits_{\mathbb{A}(z_0,r_0,R)} K_\mu(z)\psi^2(|z-z_0|)\, dm(z) \leqslant c \cdot I^p(R)\,, \tag{24}$$

где $p \leqslant 2$. *Тогда уравнение* (1) *не имеет гомеоморфного решения* $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *класса Соболева* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *с асимптотикой*

$$\liminf_{R\to\infty} M(z_0, f, R) \exp\left(-\frac{2\pi}{c}\, I^{2-p}(R)\right) = 0\,. \tag{25}$$

Доказательство. Ввиду условия (24), получаем

$$\Lambda(R) = \frac{\int\limits_{\mathbb{A}(z_0,r_0,R)} K_\mu(z)\, \psi^2(|z-z_0|)\, dm(z)}{\left(\int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\, dt\right)^2} \leqslant c I^{p-2}(R)\,. \tag{26}$$

Отсюда следует, что

$$\exp\left\{-\frac{2\pi}{\Lambda(R)}\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{2\pi}{c}\, I^{2-p}(R)\right\}. \tag{27}$$

Таким образом, лемма 4 следует из леммы 3.

В дальнейшем, для целых $k \geqslant 0$ полагаем

$$e_0 = 1, \quad e_1 = e, \quad e_2 = e^e,\ \ldots,\ e_{k+1} = \exp\{e_k\}, \tag{28}$$

$$\ln_0 t = t, \quad \ln_1 t = \ln t, \quad \ln_2 t = \ln\ln t,\ \ldots,\ \ln_{k+1} t = \ln\ln_k t\,. \tag{29}$$

Под N будем понимать произвольное натуральное число или ноль, а под произведением вида $\prod\limits_{k=0}^{N}(*)$ при $N = 0$ — выражение $*$, стоящее в скобках.

Лемма 4. *При $R > e_N$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{e_N}^{R} \frac{dt}{\prod\limits_{k=0}^{N} \ln_k t} = \ln_{N+1} R\,. \tag{30}$$

Доказательство. Действительно, выполнив замену переменных $s = \ln_N t$, получим: $\int\limits_{e_N}^{R} \frac{dt}{\prod\limits_{k=0}^{N} \ln_k t} = \int\limits_{1}^{\ln_N R} \frac{ds}{s} = \ln \ln_N R = \ln_{N+1} R$.

Положив в лемме 4, $\psi(t) = \left(\prod\limits_{k=0}^{N} \ln_k t\right)^{-1}$, $r_0 = e_N$ и $p = 1$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть $\mu\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в., такая, что $K_\mu \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{C})$ и*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(z_0,\, e_N,\, R)} \frac{K_\mu(z)\, dm(z)}{\left(\prod\limits_{k=0}^{N} \ln_k |z - z_0|\right)^2} \leqslant c \cdot \ln_{N+1}(R) \qquad \forall\ R > e_N\,. \tag{31}$$

Тогда уравнение (1) не имеет гомеоморфного решения $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с асимптотикой

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{M(z_0, f, R)}{\ln_N^{\gamma}(R)} = 0\,, \tag{32}$$

где $\gamma = \frac{2\pi}{C}$.

В теореме 2, положив $N = 0$, приходим к следующему следствию.

Следствие 1. *Пусть $\mu\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в., такая, что $K_\mu \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{C})$ и*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(z_0,\, 1,\, R)} \frac{K_\mu(z)\, dm(x)}{|z - z_0|^2} \leqslant c \cdot \ln R \qquad \forall\ R > 1\,, \tag{33}$$

Тогда уравнение (1) не имеет гомеоморфного решения $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с асимптотикой

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{M(z_0, f, R)}{R^{\frac{2\pi}{c}}} = 0\,. \tag{34}$$

Следствие 2. *Пусть* $\mu\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *— измеримая функция с* $|\mu(z)| < 1$ *п.в., такая, что* $K_\mu \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ *и*

$$\frac{1}{2\pi R} \int\limits_{S(z_0,R)} K_\mu(z)\,|dz| \leqslant K \qquad \forall\ R > 1\,. \tag{35}$$

Тогда уравнение (1) *не имеет гомеоморфного решения* $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *класса Соболева* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *с асимптотикой*

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{M(z_0,f,R)}{R^{1/K}} = 0\,.$$

Список литературы

[1] *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation: A Geometric Approach. Springer Advances in Mathematics. ISBN 978-1-4614-3190-9, Due: May 31, 2012.

[2] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory / Springer Monographs in Mathematics /. — New York: Springer, 2009.

[3] *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. — 1969. — Vol. 448. — P. 1 – 40.

[4] *Maz'ya V.* Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces // Contemp. Math. — 2003. — **338**. — P. 307 — 340.

[5] *Шлык В.А.* О равенстве p-емкости и p-модуля // Сиб. мат. ж. — 1993. — **34**, № 6. — С. 216 — 221.

[6] *Ковтонюк Д.А., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А.* К теории отображений классов Соболева и Орлича-Соболева. — К.: Наук. думка, 2013. — 303 с.

[7] *Салимов Р.Р., Смоловая Е.С.* О порядке роста кольцевых Q-гомеоморфизмов на бесконечности // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 6. — С. 829 – 836.