Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, Т.10, №1, 110-125

УДК 517.5

Г. А. Дзюбенко (Міжнародний математичний центр ім. Ю. О. Митропольського НАН України, Київ)

ПОРЯДКИ КОМОНОТОННОГО НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

If a continuously differentiable on a real axe $\mathbb{R}$ $2\pi-$*periodic function* f *changes its monotonicity at different fixed points* $y_i \in [-\pi, \pi)$, $i = 1, ..., 2s$, $s \in \mathbb{N}$, *(i.e., on* $\mathbb{R}$ *there is a set* $Y := \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *of points* $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ *such that on* $[y_i, y_{i-1}]$ f *is nondecreasing if* i *is odd, and nonincreasing if* i *is even), then for each natural number* n, $n \geq N(Y) = const$, *in the article a trigonometric polynomial* T_n *of order* $\leq n$, *which changes its monotonicity at the same points* $y_i \in Y$, *like* f, *is found such that*

$$\|f - T_n\| \leq \frac{c(s)}{n}\,\omega_3\left(f', 1/n\right),$$

where $N(Y)$ *depends only on* Y, $c(s)-$ *constant which is depending only on* s, $\omega_3(f, \cdot) -$ *modulus of smoothness of order* 3 *of the function* f *and* $\|\cdot\|-\max$-*norm. Also the other estimates that are possible in this kind of approximation are listed.*

Якщо неперервно диференційовна на дійсній осі $\mathbb{R}$ $2\pi-$*періодична функція* f *змінює монотонність в різних фіксованих точках* $y_i \in [-\pi, \pi)$, $i = 1, ..., 2s$, $s \in \mathbb{N}$, *(тобто, на* $\mathbb{R}$ *є множина* $Y := \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *точок* $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ *таких, що на* $[y_i, y_{i-1}]$ f *не спадає, якщо* i *не парне, і не зростає, якщо* i *парне), то для кожного натурального* n, $n \geq N(Y) = const$, *в статті знайдено тригонометричний поліном* T_n *порядку* $\leq n$, *який змінює свою монотонність в тих самих точках* $y_i \in Y$, *що і* f, *і такий, що*

$$\|f - T_n\| \leq \frac{c(s)}{n}\,\omega_3\left(f', 1/n\right),$$

де $N(Y)$ *залежить тільки від* Y, $c(s)-$ *стала, яка залежать тільки від* s, $\omega_3(f, \cdot) -$ *модуль гладкості порядку* 3 *функції* f *і* $\|\cdot\| - \max$-*норма. Також наведено інші оцінки, які можливі при такому наближенні.*

1. Вступ. Нехай C – простір неперервних $2\pi-$періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\|f\| := \|f\|_{\mathbb{R}} := \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, і $\mathbb{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$, – простір тригонометричних поліномів $t_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j \cos jx + b_j \sin jx)$ порядку $\le n$, де $a_j,\ b_j \in \mathbb{R}$. Нагадаємо класичну теорему Джексона-Зігмунда-Ахієзера-Стечкіна (див., наприклад, [1], с. 204 – 212): *при кожних натуральних k і n для будь-якої функції $f \in C$ знайдеться поліном $\sigma_n \in \mathbb{T}_n$ такий, що*

$$\|f - \sigma_n\| \le c(k)\, \omega_k\left(f, 1/n\right), \tag{1}$$

де $c(k)-$ стала, яка залежить лише від k і $\omega_k(f,\cdot)-$ модуль гладкості порядку k функції f. Крім того, якщо $f \in C^{(r)} := \left\{f :\ f^{(r)} \in C\right\},\ r \in \mathbb{N}$, то наслідком (1) є нерівність

$$\|f - \sigma_n\| \le \frac{c(r+k)}{n^r}\, \omega_k\left(f^{(r)}, 1/n\right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

В цій статті, в Теоремі $1'$ наведено комонотонні аналоги нерівностей (1) і (2). Для точного їх формулювання дамо необхідні позначення. Нехай на $[-\pi, \pi)$ зафіксовано $2s,\ s \in \mathbb{N}$, точок y_i :

$$-\pi \le y_{2s} < y_{2s-1} < \cdots < y_1 < \pi,$$

а для решти індексів $i \in \mathbb{Z}$, точки y_i визначаються рівністю $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ (тобто, $y_0 = y_{2s} + 2\pi, ..., y_{2s+1} = y_1 - 2\pi, ...$). Позначимо $Y := \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $\Delta^{(1)}(Y)-$ множина всіх функцій f, які не спадають на $[y_1, y_0]$, не зростають на $[y_2, y_1]$, не спадають на $[y_3, y_2]$ і т.д.. Замітимо, якщо періодична функція f диференційовна, то $f \in \Delta^{(1)}(Y) \iff f'(x)\Pi(x) \ge 0,\ x \in \mathbb{R}$, де

$$\Pi(x) := \Pi(x, Y) := \prod_{i=1}^{2s} \sin\frac{x - y_i}{2}, \qquad \left(\Pi(x) > 0,\ x \in (y_1, y_0)\right).$$

В цій статті ми доводимо нерівність (4) наступної Теореми 1, нерівність (3) доведено в [2], а (5) – в [3].

Теорема 1. *Для будь-якої функції $f \in \Delta^{(1)}(Y)$ знайдуться поліноми $T_n,\ P_n$ і R_n з $\mathbb{T}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$ такі, що*

$$\|f - T_n\| \le c(2,s)\, \omega_2\left(f, 1/n\right), \quad f \in C, \quad n \ge N(2, Y), \tag{3}$$

$$\|f-P_n\| \le \frac{c(3,s)}{n}\,\omega_3\left(f',1/n\right), \quad f\in C^{(1)}, \quad n\ge N(3,Y), \qquad (4)$$

$$\|f-R_n\| \le \frac{c(k,s)}{n^2}\,\omega_k\left(f'',1/n\right), \quad f\in C^{(2)}, \quad n\ge N(k,Y), \qquad (5)$$

$$\left(\|f-R_n\| \le \frac{c(r+k,s)}{n^r}\omega_k(f^{(r)},1/n),\ f\in C^{(r)},\ r\ge 2,\ n\ge N(r+k,Y)\right)$$

де $k\in\mathbb{N}$, $c(k,s)-$ *сталі, які залежать тільки від* k *і* s, $N(k,Y)-$ *сталі, які залежать тільки від* k *і* Y *(тобто від* $\min\limits_{i=1,\ldots,2s}\{y_{i+1}-y_i\}$*).*

Наслідком Теореми 1 і нерівності Уітні [4] $||f-f(0)||\le$ $\le k\,\omega_k(f,k\pi),\ k\in\mathbb{N}$, є

Теорема 1′. *При кожному натуральному* n *для будь-якої функції* $f\in\Delta^{(1)}(Y)$ *знайдуться поліноми* $T_n,\ P_n$ *і* R_n *з* $\mathbb{T}_n\cap\Delta^{(1)}(Y)$ *такі, що*

$$\|f-T_n\|\le C(2,Y)\,\omega_2\left(f,1/n\right), \quad f\in C, \qquad (3')$$

$$\|f-P_n\|\le \frac{C(3,Y)}{n}\,\omega_3\left(f',1/n\right), \quad f\in C^{(1)}, \qquad (4')$$

$$\|f-R_n\|\le \frac{C(k,Y)}{n^2}\,\omega_k\left(f'',1/n\right), \quad f\in C^{(2)}, \qquad (5')$$

$$\left(\|f-R_n\|\le \frac{C(r+k,Y)}{n^r}\omega_k(f^{(r)},1/n), \quad f\in C^{(r)},\ r\ge 2\right)$$

де $k\in\mathbb{N}$, *а* $C(k,Y)-$ *сталі, які залежать тільки від* k *і* Y.

В [5, с. 64 – 83] і [6] побудовано контрприклади, які вказують на те, що ω_2 в (3′) (і (3)) і ω_3 в (4′) (і (4)) неможливо замінити на ω_k з $k>2$ і $k>3$, відповідно.

***Зауваження* 1**. Ми припускаємо, що сталі $N(k,Y)$ в (3) – (5), а також сталі $C(k,Y)$ в (3′) – (5′), неможливо замінити сталими, які не залежать від Y, а залежать, скажімо, від s. Це припущення не розглядається в цій статті.

В [7] при кожному $n\in\mathbb{N}$ для будь-якої $f\in\Delta^{(1)}(Y)$ означено $T_n\in\mathbb{T}_n\cap\Delta^{(1)}(Y)$ такий, що

$$\|f-T_n\|\le c(1,s)\,\omega_1\left(f,1/n\right), \quad f\in C, \qquad (6)$$

і в [5, розділ 2] доведено окремий випадок нерівності ($5'$): якщо $f \in W^{(r)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$ (де $W^{(r)}-$ множина функцій g з абсолютно неперервними $g^{(r-1)}$ і з $|g^{(r)}(x)| \le 1$ м. с. на $\mathbb{R}$), то знайдеться $T_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$ такий, що

$$\|f - T_n\| \le \frac{C(r, Y)}{n^r} \quad n \in \mathbb{N},\ r \ge 2,$$

де $C(r, Y)-$ стала, яка залежать тільки від r і Y. Для $r = 1$ це твердження є окремим випадком нерівності (6).

2. Доведення нерівності (4). Нерівність (4) доведем у наступний спосіб: функцію f представимо сумою $f = f_1 + f_2$, де $\|f_1'\|$ буде "маленькою" скрізь на $\mathbb{R}$, а $|f_2'(x)|$ буде "великим" на "більшій" частині деякої множини F. Тоді, означимо поліном P_n, як суму п'яти поліномів, перший з яких τ_n буде наближати f_1 (як треба) і буде комонотонним, а другий $\hat{\sigma}_n$ буде (теж як треба) наближати f_2 і, що важливо, f_2' (своєю похідною, звісно), але він не буде комонотонним. Натомість його похідна (завдяки спільному наближенню) буде "великою" там де "велика" f_2'. Три інші поліноми $U_n,\ Q$ і M будуть мати "маленькі" норми (рівні за порядком оцінці (4)) і будуть "виправляти" поліном $\hat{\sigma}_n'$ (кожен на своїй множині) так, щоб їх спільна з $\hat{\sigma}_n$ сума вже була комонотонним поліномом. Це можливо завдяки існуванню ділянок, де $|\hat{\sigma}_n'(x)|$ "великий" і тому на цих ділянках, виправляючі поліноми можуть порушувати свою особисту комонотонність (на величину не більшу ніж $|\hat{\sigma}_n'(x)|$ разом). Без такого порушення, зробити їх норми маленькими не можливо, принципово. Ще зауважемо, що доведення оцінки (4) грунтується на фактах і на схемі статті [3], де доведено оцінку (5).

1°. Нехай

$$J_{n,l}(x) := \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^{2l}, \quad K_{n,l}(x) := J_{n,l}(x)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{n,l}(x)dx\right)^{-1}$$

$-$ парне і невід'ємне ядро типу Джексона, $n \in \mathbb{N},\ l \in \mathbb{N}$, і

$$\sigma_{n,l}(f, x) := (-1)^{k+1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_{n,l}(t) \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + it)dt \qquad (6)$$

$-$ поліном з $\mathbb{T}_{l(n-1)}$, запропонований Стєчкіним [8] для доведення нерівності (1) з $f \in C$ і $k \in \mathbb{N}$. Позначимо

$$h := h_n := \frac{\pi}{n}, \quad x_j := x_{j,n} := -j\,h, \quad I_j := I_{j,n} := [x_j, x_{j-1}], \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$J_j(x) := \Big(J_{2n,1}(x - (x_j + \pi/(4n))) + J_{2n,1}(x - (x_j + 3\pi/(4n))) \Big)^b$$

$-$строго додатнє ядро, як сума двох "сусідніх" невід'ємних з $b \in \mathbb{N}$, і

$$^{+}t_j(x) :=^{+} t_{j,n}(x, b, Y) := \int\limits_{x_j-\pi}^{x} J_j(u)\Pi(u)du \left(\int\limits_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} J_j(u)\Pi(u)du \right)^{-1},$$

$$^{-}t_j(x) :=^{-} t_{j,n}(x, b, Y) := \int\limits_{x_j-\pi}^{x} \Pi_j(u)J_j(u)du \left(\int\limits_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} \Pi_j(u)J_j(u)du \right)^{-1},$$

$-$ дві функції вігляду $\frac{1}{2\pi}x +^{\pm} R_j(x)$ з $^{\pm}R_j \in \mathbb{T}_{c_1 n}$ і $\Pi_j(x) := -\Pi(x, Y \cup \cup \{x_j, x_{j-1}\})$. Тут і далі c_ν, $\nu = 1, ..., 23$, позначатимуть додатні сталі, які можуть залежити тільки від k, s і $b \in \mathbb{N}$. Позначимо

$$O_i := (x_{j+5}, x_{j-5}), \quad \text{якщо} \quad y_i \in [x_j, x_{j-1}), \quad O := \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} O_i \qquad (7)$$

і будемо писати $j \in H := H(Y, n)$, якщо $x_j \in \mathbb{R} \setminus O$. Виберемо $N(Y) \in \mathbb{N}$ таке, що кожен відрізок $[y_i, y_{i-1}]$, $i = 1, \cdots, 2s$, містить принаймні 10 різних відрізків I_j, для всіх $n \geq N(Y)$. Далі $n \geq N(Y)$ і для зручності $y_{2s} = -\pi$. Для $x, a \in \mathbb{R}$ нехай

$$\chi(x, a) := \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leq a, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > a, \end{cases} \qquad \chi_j(x) := \chi(x, x_j), \qquad (8)$$

$$\check{\Gamma}_n(x) := \min\left\{1, \frac{1}{n\,|\sin(x/2)|}\right\}, \quad \Gamma_j(x) := \check{\Gamma}_n\left(x - (x_j + h/2)\right), \; j \in \mathbb{Z}.$$

Лема 1 [3]. *Якщо $j \in H$ і $b \geq s + 4$, то*

$$^{+}t_j'(x)\,\Pi(x)\,\Pi(x_j) \geq 0, \quad x \in [x_{j-1} - 2\pi, x_j + 2\pi], \qquad (9)$$

$$ {}^{-}t_j'(x)\,\Pi(x)\,\Pi(x_j) \le 0, \quad x \in [x_{j-1} - 2\pi, x_j + 2\pi] \setminus I_j, \tag{10} $$

$$ \left|\chi_j(x) - {}^{\pm}t_j(x)\right| \le c_2\left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-s-1}, \quad x \in [x_{j-1} - 2\pi, x_j + 2\pi], \tag{11} $$

$$ \left|{}^{\pm}t_j'(x)\right| \le c_3\frac{1}{h}\left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-s}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{12} $$

$$ \left|{}^{+}t_j'(x)\right| \ge c_4\frac{1}{h}\,\left(\Gamma_j(x)\right)^{2b+2s}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus O, \tag{13} $$

$$ \left|{}^{-}t_j'(x)\right| \ge c_4\frac{1}{h}\left(\Gamma_j(x)\right)^{2b+2s}\left|\frac{x - y_i}{x_j - y_i}\right|, \quad x \in O_i,\ i \in \mathbb{Z}. \tag{14} $$

Далі $b = s + 4$. Нехай

$$ \omega_k(f', t) \le \varphi(t) \le 2^k\omega_k(f', t), \quad t \ge 0, $$

тобто, φ – k-мажоранта. Позначимо $\{z_q\}_{q=0}^{n^*} := \{x_j : j \in H,\ |j| < n\} \cup \{y_i\}_{i=0}^{2s}$, $n^* := 2n + 1 - 8(2s + 1)$ і точки z_q упорядковано за спаданням. Нехай $j(q) := j$, якщо $z_q = x_j$. Покладем $j(q) = j(q-1)$, якщо $z_q = y_i$.

Лема 2 [3]. *Якщо f' є 2π-періодичною, $\|f'\| \le \varphi(h)$ і $f'(x)\Pi(x) \ge 0$, $x \in \mathbb{R}$, то функція*

$$ \tau_n(f, x) := f(-\pi) + \sum_{q=1}^{n^*}\left(f(z_{q-1}) - f(z_q)\right)\,{}^{+}t_{j(q)}(x) $$

задовольняє нерівності

$$ \|f - \tau_n(f, \cdot)\| \le c_5 h\varphi(h), \tag{15} $$

$$ \tau_n'(f, x)\Pi(x) \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{16} $$

Крім того, якщо для $A = const$, $f(x) - Ax$ є періодичною, то $\tau_n(f, x) - Ax \in \mathbb{T}_{c_1 n}$.

Лівий і правий кінці проміжку O_i позначимо через $(\underline{y}_i, \overline{y}_i) =: (x_{\underline{j}(i)}, x_{\overline{j}(i)})$.

Лема 3 [3]. *Функція*

$$U_n(x) := h\,\varphi(h) \sum_{i=1}^{2s} \Big({}^{+}t_{\underline{j}(i)}(x)\,\mathrm{sgn}\Pi(\underline{y}_i) + {}^{+}t_{\overline{j}(i)}(x)\,\mathrm{sgn}\Pi(\overline{y}_i) \Big)$$

є поліномом з $\mathbb{T}_{c_1 n} \cap \Delta^{(1)}(Y)$ *таким, що*

$$\|U_n\| \le c_6 h\varphi(h), \tag{17}$$

$$|U_n'(x)| \ge c_7 \varphi(h) \Big(\check{\Gamma}_n\,(\,\mathrm{dist}(x, O)) \Big)^{4(s+2)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus O, \tag{18}$$

$$|U_n'(x)| \ge \frac{c_7}{h} \varphi(h)\,|x - y_i|\,, \quad x \in O_i,\ i \in \mathbb{Z}. \tag{19}$$

Нехай $L_k(g, x, [a, b])$ позначає многочлен Лагранжа степеня $\le k$, який на $[a, b]$ інтерполює функцію $g = g(x)$ у рівновіддалених точках $a + \nu(b - a)/k,\ \nu = 0, ..., k$. Для $i \in \mathbb{Z}$ покладемо

$$J_i := [y_i - h, y_i + h], \quad Y_i := \big(Y \setminus \{y_i + 2\pi\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}} \big) \cup \{\underline{y}_i + 2\pi\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}},$$

$$\hat{t}_i(x) := {}^{+}t_{\overline{j}(i)}(x, b, Y_i) - {}^{-}t_{\overline{j}(i)}(x, b, Y_i).$$

Лема 4 [3]. *Якщо* $f \in C^{(1)}$ *і для всіх* $i \in \mathbb{Z}$ $f'(y_i) = A = const$, *то поліном*

$$\hat{\sigma}_n(f, x) := \sigma_{n,l}(f, x) - \sum_{i=1}^{2s} \frac{\sigma_{n,l}'(f, y_i) - A}{\hat{t}_i'(y_i)} \hat{t}_i(x),$$

$l = \left[\frac{k+2}{2}\right] + 2(s+2) + 1$, *порядку* $c_1 n$ *при будь-яких* $\delta > 0$ *задовольняє нерівності*

$$\|f - \hat{\sigma}_n(f, \cdot)\| \le c_8 h\varphi(h), \tag{20}$$

$$|f'(x) - \hat{\sigma}_n'(f, x)| \le$$

$$\le c_9 \left(\omega_k(f', h, [x - \delta, x + \delta]) + \left(\frac{1}{n\delta} \right)^{4(s+2)+1} \varphi(h) \right),\ x \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

$$\|f' - \hat{\sigma}_n'(f, \cdot)\| \le c_9 \varphi(h), \tag{22}$$

$$|L_{k-1}(f', x, J_i) - L_{k-1}(f', y_i, J_i) - \hat{\sigma}'_n(f, x) + A| \le \le \frac{c_{10}}{h}\varphi(h)|x - y_i|, \quad x \in J_i, \tag{23}$$

зокрема, $\hat{\sigma}'_n(f, y_i) = A,\ i \in \mathbb{Z}$.

2°. Для $j \in \mathbb{Z}$ будемо писати $j \in V$, якщо на I_j існує точка x така, що

$$|f'(x)| \le 2c_9\varphi(h). \tag{24}$$

Позначимо $c_{11} := 96k[c_3/c_4 + 1]$ і $c := c_{11} + 20s + 15$. Без втрати загальності будемо вважати, що n ділеться на c, тобто $n = pc$ з $p \in \mathbb{N}$. Покладемо $\nu_p = n + 8$ і $\nu_{-p} = 8 - n$. Для кожного $q = p-1, ..., 0, ..., 1-p$ нехай ν_q позначає найменше ціле серед цілих $j \ge cq$ для яких $[x_{j+3}, x_{j-3}] \cap O = \emptyset$. Позначимо

$$E_q := [x_{\nu_q}, x_{\nu_{q-1}}] \quad \left(= I_{\nu_q} \cup I_{\nu_q - 1} \cup ... \cup I_{\nu_{q-1}+1}\right), \quad q = \overline{1-p, p}.$$

Отже, кінці кожного відрізку E_q відстоять від O принаймні на три різних I_j і кожен E_q складається принаймні з $c_{11} + 20s$ і не більше ніж з $c_{11} + 20s + 30$ різних I_j ($cq + 15 \ge \nu_q \ge cq$).

Далі будемо вважати, що $q \in \mathbb{Z}$ (оскільки f є періодичною). Будемо писати $q \in W$, якщо E_q містить принаймні $2k - 1$ проміжків I_j таких, що $j \in V$. Зауважимо, що якщо $q \in W$, то з (24) і нерівності Уітні випливае оцінка

$$|f'(x)| \le c_{12}\varphi(h), \quad x \in E_q. \tag{25}$$

Для довільної непорожньої множини $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}$, через $\mathbf{E}^*$ позначимо об'єднання всіх $I_j,\ j \in \mathbb{Z}$, таких, що $I_j \cap \mathbf{E} \ne \emptyset$. Аналогічно, $\mathbf{E}^{**} := (\mathbf{E}^*)^*$ і т.д. ($\mathbf{E} \subset \mathbf{E}^* \subset \mathbf{E}^{**} \subset ...$). Тепер нехай

$$E := \cup_{q \notin W} E_q$$

і для $x \in I_j,\ j \in \mathbb{Z}$, покладемо

$$g_1(x) := \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad I_j \subset E^*, \\ f'(x), & \text{якщо} \quad I_j \subset \overline{\mathbb{R} \setminus E^{**}}, \\ f'(x)S_j(x), & \text{якщо} \quad I_j \subset \overline{E^{**} \setminus E^*} \text{ і } x_j \in E^*, \\ f'(x)(1 - S_j(x)), & \text{якщо} \quad I_j \subset \overline{E^{**} \setminus E^*} \text{ і } x_j \notin E^*, \end{cases}$$

де $S_j(x) := \int\limits_{x_j}^{x} (u-x_j)^k (x_{j-1}-u)^k du \left(\int\limits_{x_j}^{x_{j-1}} (u-x_j)^k (x_{j-1}-u)^k du \right)^{-1}$.
Нехай

$$g_2(x) := f'(x) - g_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Лема 5 [3]. *Мають місце нерівності*

$$\|g_1\| \le c_{12}\varphi(h), \quad \omega_k(g_1,t) \le c_{13}\varphi(t), \quad \omega_k(g_2,t) \le c_{14}\varphi(t).$$

Позначимо $c_{15} := [c_{14}+1]$. Без втрати загальності будемо вважати, що $p \ge 4c_{15}$. Подамо множину $E \ne \mathbb{R}$ у вигляді об'єднення відрізків $F_m := [a_m, b_m]$, $m \in \mathbb{Z}$, що не перетинаються. Будемо писати $m \in X$, якщо F_m складається не більше ніж з c_{15} різних відрізків E_q (або, що те саме, не більше ніж з $c_{15}c + 15$ різних відрізків I_j). Якщо $m \notin X$, то F_m містить принаймні $c_{15}c + c_{11}$ різних I_j. Покладемо

$$g_3(x) := \begin{cases} g_2(x), & x \in (\cup_{m\in X} F_m)^{**}, \\ 0, & x \in \overline{\mathbb{R} \setminus (\cup_{m\in X} F_m)^{**}}, \end{cases}$$

$$g_4(x) := g_2(x) - g_3(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Лема 6 [3]. *Мають місце нерівності*

$$\|g_3\| \le c_{16}\varphi(h), \quad \omega_k(g_3,t) \le c_{17}\varphi(t), \quad \omega_k(g_4,t) \le (c_{14}+c_{17})\varphi(t).$$

Позначимо

$$f_1(x) := f(0) + \int\limits_0^x (g_1(u) + g_3(u) - A)\, du, \quad f_2(x) := \int\limits_0^x (g_4(u) + A)\, du,$$

так що $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ і де дійсне число A, $|A| \le \varphi(h) \max\{c_{12}, c_{16}\}/2$, вибрано з умови $f_1(0) = f_1(2\pi)$ (або, що те саме, $f_2(0) = f_2(2\pi)$). Якщо $g_4(x) \equiv 0$, то $f_1(x) \equiv f(x)$ $(A=0)$ і тоді нерівність (4) є наслідком Лем 5, 6 і 2.

3°. Задача звелася до наближення функції $f_2(x)$. Нехай для визначеності $A \ge 0$. Позначимо

$$F := \cup_{m \notin X} F_m.$$

Нагадаємо, що за побудовою

$$f_2'(x) = \begin{cases} f'(x) + A, & x \in F^*, \\ A, & x \notin F^{**}, \end{cases}$$

і на більшій частині множини F маємо $|f_2'(x) - A| > 2c_9\varphi(h)$. Тому, згідно (22), $|\hat{\sigma}'_{n_1}(f_2, x) - A| > c_9\varphi(h_n)$ при $n_1 > n$. Однак можуть існувати і "погані" точки x (на F зокрема) в яких $(\hat{\sigma}'_{n_1}(f_2, x) - A)\Pi(x) < 0$. В усіх "поганих" точках $x \in F \setminus O$, $x \in (\overline{\mathbb{R} \setminus F}) \setminus O$ і $x \in O$ ми "виправимо" поліном $\hat{\sigma}'_{n_1}(f_2, x)$ за допомогою поліномів $Q'(x)$ (Лема 7), $M'(x)$ (Лема 8) і $U_n'(x)$ (Лема 3), відповідно.

Нехай $\delta_j := \operatorname{sgn}\Pi(x_j)$. Для кожного $E_q \subset F$, $q = \overline{1-p, p}$, такого, що $E_q \cap O \neq \emptyset$, через ν_q^+ і ν_q^- позначимо найбільше $j \in H$ з $I_j \subset E_q$ для якого $\delta_j > 0$ і $\delta_j < 0$, відповідно.

Означення 1. Для кожного $q = \overline{1-p, p}$, покладемо $Q_q(x) :\equiv 0$, якщо $E_q \not\subset F$, або $E_q \subset F$ і E_q не містить відрізків I_j з $j \in V \cap H$. Для решти E_q, тобто для $E_q \subset F$ і E_q містить I_j з $j \in V \cap H$, покладемо

$$Q_q(x) :=$$

$$\begin{cases} \dfrac{2c_9}{c_4} \displaystyle\sum_{j=\nu_{q-1}+1,\, j \in V}^{\nu_q} {}^{+}t_j(x)\delta_j - \alpha_q \dfrac{c_9}{2c_3} \displaystyle\sum_{j=\nu_{q-1}+1,\, j \notin V}^{\nu_q} {}^{-}t_j(x)\delta_j, \; E_q \cap O = \emptyset, \\ \dfrac{2c_9}{c_4} \left(\displaystyle\sum_{j=\nu_{q-1}+1,\, j \in V \cap H}^{\nu_q} {}^{+}t_j(x)\delta_j + \beta_q {}^{+}t_{\nu_q^+}(x) - \gamma_q {}^{+}t_{\nu_q^-}(x) \right), \; E_q \cap O \neq \emptyset, \end{cases}$$

де числа $\alpha_q > 0$, $\beta_q \geq 0$ і $\gamma_q \geq 0$ вибрано так, що $Q_q(-\pi) = Q_q(\pi)$ і $\beta_q\gamma_q = 0$.

Позначимо

$$\mathcal{F}_1 := \bigcup_{j:\, I_j \subset F, j \in V \cap H} I_j, \quad \mathcal{F}_2 := \bigcup_{j:\, I_j \subset F, j \notin V, j \in H} I_j,$$

так, що $F \setminus (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \subset O$.

Лема 7 [3]. *Функція*

$$Q(x) := h\,\varphi(h) \sum_{q=1-p}^{p} Q_q(x)$$

є поліномом порядку $c_1 n$ таким, що

$$\|Q\| \le c_{18} h\varphi(h), \tag{28}$$

$$|Q'(x)| \ge 2c_9\varphi(h), \quad x \in \mathcal{F}_1, \tag{27}$$

$$Q'(x)\,\mathrm{sgn}\Pi(x) \ge -\frac{c_9}{2}\varphi(h), \quad x \in \mathcal{F}_2, \tag{28}$$

$$Q'(x)\Pi(x) \ge 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{F}_2. \tag{29}$$

Нагадаємо, що $F = \cup_{m \notin X} F_m$, де $F_m = [a_m, b_m]$ не перетинаються і кожен F_m містить принаймні $c_{15}c + c_{11} =: c_{19}$ різних I_j ($c_{15}+1$ різних E_q). Будемо писати $m \in X_0$, якщо $m \notin X$ і $F_m \cap [a_0, a_0 + 2\pi] = F_m$. Для кожного $m \in X_0$ позначимо

$$[x_{j_{a,m}}, x_{j_{b,m}}] := [a_m, b_m] = F_m,$$

$$F_{a,m} := [x_{j_{a,m}}, x_{j_{a,m} - c_{19}}], \quad F_{b,m} := [x_{j_{b,m} + c_{19}}, x_{j_{b,m}}],$$

(тобто дві пачки різних I_j-х, по c_{18} штук, на кінцях кожного F_m, який не виходить за межі відрізку довжиною 2π від початку F_0). Для кожного $m \in X_0$ такого, що $F_{a,m} \cap O \ne \emptyset$ ($F_{b,m} \cap O \ne \emptyset$), через $\nu^+_{a,m}$ і $\nu^-_{a,m}$ ($\nu^+_{b,m}$ і $\nu^-_{b,m}$) позначимо два найбільші цілі $j \in H$ з $I_j \subset F_{a,m}$ ($I_j \subset F_{b,m}$) для яких $\delta_j > 0$ і $\delta_j < 0$, відповідно.

Означення 2. Для кожного $m \in X_0$ покладемо

$$M_{a,m}(x) :=$$

$$\begin{cases} \dfrac{2c_9c_{14}}{c_4} \displaystyle\sum_{j=j_{a,m}+1}^{j_{a,m}+3} {}^+t_j(x)\delta_j - \mu_{a,m}\frac{c_9}{2c_3} \sum_{j=j_{a,m}-c_{19}+1, j\notin V}^{j_{a,m}} {}^-t_j(x)\delta_j, \\ \hfill F_{a,m} \cap O = \emptyset, \\ \dfrac{2c_9c_{14}}{c_4} \left(\displaystyle\sum_{j=j_{a,m}+1}^{j_{a,m}+3} {}^+t_j(x)\delta_j + \mu^+_{a,m} 3\, {}^+t_{\nu^+_{a,m}}(x) - \mu^-_{a,m} 3\, {}^+t_{\nu^-_{a,m}}(x) \right), \\ \hfill F_{a,m} \cap O \ne \emptyset, \end{cases}$$

$$M_{b,m}(x) :=$$

$$\begin{cases} \dfrac{2c_9c_{14}}{c_4}\displaystyle\sum_{j=j_{b,m}-2}^{j_{b,m}} {}^+t_j(x)\delta_j - \mu_{b,m}\frac{c_9}{2c_3}\sum_{j=j_{b,m}+1, j\notin V}^{j_{b,m}+c_{19}} {}^-t_j(x)\delta_j, \\ \hfill F_{b,m}\cap O=\emptyset, \\ \dfrac{2c_9c_{14}}{c_4}\left(\displaystyle\sum_{j=j_{b,m}-2}^{j_{b,m}} {}^+t_j(x)\delta_j + \mu^+_{b,m}3\,{}^+t_{\nu^+_{b,m}}(x) - \mu^-_{b,m}3\,{}^+t_{\nu^-_{b,m}}(x)\right), \\ \hfill F_{b,m}\cap O\neq\emptyset, \end{cases}$$

де числа $\mu_{a,m} > 0$, $\mu^{\pm}_{a,m} \geq 0$, $\mu_{b,m} > 0$ і $\mu^{\pm}_{b,m} \geq 0$ вибрано так, що $M_{a,m}(-\pi) = M_{a,m}(\pi)$, $\mu^+_{a,m}\mu^-_{a,m} = 0$, $M_{b,m}(-\pi) = M_{b,m}(\pi)$ і $\mu^+_{b,m}\mu^-_{b,m} = 0$.

Позначимо

$$\mathcal{F}_3 := \overline{F^{***}\setminus F}.$$

Лема 8 [3]. *Функція*

$$M(x) := h\,\varphi(h)\sum_{m\in X_0}(M_{a,m}(x)+M_{b,m}(x))$$

є поліномом порядку c_1n таким, що

$$\|M\| \leq c_{20}h\varphi(h), \tag{30}$$

$$|M'(x)| \geq 2c_9c_{14}\varphi(h)\Big(\check{\Gamma}_n(\,\mathrm{dist}(x,\mathcal{F}_3))\Big)^{4(s+2)}, \quad x\in\mathbb{R}\setminus(F\cup O), \tag{31}$$

$$M'(x)\,\mathrm{sgn}\Pi(x) \geq -\frac{c_9}{4}\varphi(h), \quad x\in\mathcal{F}_2, \tag{32}$$

$$M'(x)\Pi(x)\geq 0, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathcal{F}_2. \tag{33}$$

4°. Позначимо

$$c_{21} := 4\pi(c_{14}+c_{17}), \quad n_1 := c_{21}n, \quad h_1 := \frac{\pi}{n_1}, \tag{34}$$

$$c_{22} := \frac{\max\{c_9,c_{10}\}(c_{14}+c_{17})c_{21}}{c_7},$$

$$P_{n_1}(x) := \tau_n(f_1+Ax,x) - Ax + \hat{\sigma}_{n_1}(f_2,x) + Q(x) + M(x) + c_{22}U_n(x).$$

Покажемо, що P_{n_1} – шуканий поліном. Врахуємо Леми 5 і 6 і зберемо (15), (20), (26), (30) і (17) в оцінку

$$\|f-P_{n_1}\| = \|f_1+f_2-P_{n_1}\| \le \|f_1-\tau_n(f_1+Ax,\cdot)+A\cdot\|+\|f_2-\hat{\sigma}_{n_1}(f_2,\cdot)\|+$$

$$+\|Q\|+\|M\|+c_{22}\|U_n\| \le$$

$$\le c_5 h \max\{c_{12},c_{16}\}(c_{13}+c_{17})\varphi(h)+c_8 h_1(c_{14}+c_{17})\varphi(h_1)+$$

$$+(c_{18}+c_{20}+c_{22}c_6)\,h\varphi(h) \le c_{23}h\varphi(h). \tag{35}$$

Перевіремо нерівність

$$P'_{n_1}(x)\Pi(x) \ge 0, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{36}$$

використавши рівність

$$P'_{n_1}(x)\,\mathrm{sgn}\Pi(x) = \tau'_n(f_1+Ax,x)\,\mathrm{sgn}\Pi(x)+(f'_2(x)-A)\ \mathrm{sgn}\Pi(x)+$$

$$+\left(\hat{\sigma}'_{n_1}(f_2,x)-f'_2(x)\right)\ \mathrm{sgn}\Pi(x)+$$

$$+(Q'(x)+M'(x))\ \mathrm{sgn}\Pi(x)+c_{22}U'_n(x)\,\mathrm{sgn}\Pi(x) =: \sum_{\nu=1}^{5}\Psi_\nu(x).$$

З (16), побудови f_2 і U_n видно, що

$$\Psi_1(x)\ge 0, \quad \Psi_2(x)\ge 0, \quad \Psi_5(x)\ge 0, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Нехай $\mathcal{F}_4 := \overline{\mathbb{R}\setminus(F\cup\mathcal{F}_3\cup O)}$, так що $\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2\cup\mathcal{F}_3\cup\mathcal{F}_4\cup O = \mathbb{R}$. Розглянемо п'ять випадків.

1) $x\in\mathcal{F}_1$. Для $u\in\mathcal{F}_1^*$ функція $f'_2(u)=f'(u)+A$. Беручи до уваги (21) з $\delta=h$, (29), (27), (33), Лему 6 і (34), записуємо

$$\Psi_3(x)+\Psi_4(x) \ge -c_9\omega_k(f'+A,h_1)-c_9\omega_k(f'_2,h_1)\left(\frac{1}{n_1 h}\right)^{4(s+2)+1}+$$

$$+2c_9\varphi(h)+0 \ge \varphi(h)c_9\left(1-\pi(c_{14}+c_{17})\frac{n}{n_1}\right)\ge 0.$$

2) $x \in \mathcal{F}_2$. Для $u \in \mathcal{F}_2^*$ функція $f_2'(u) = f'(u) + A$. Більш того, $|f_2'(x) - A| \geq 2c_9\varphi(h),\ x \in \mathcal{F}_2$. Тепер із нерівності (21) з $\delta = h$, (28), (32), Леми 6 і (34) отримуємо нерівність

$$\Psi_2(x) + \Psi_3(x) + \Psi_4(x) \geq 2c_9\varphi(h) - c_9\omega_k(f' + A, h_1) - c_9\omega_k(f_2', h_1)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{n_1 h}\right)^{4(s+2)+1} - \frac{c_9}{2}\varphi(h) - \frac{c_9}{4}\varphi(h) \geq \varphi(h)c_9\left(\frac{1}{4} - \pi(c_{14} + c_{17})\frac{n}{n_1}\right) \geq 0.$$

3) $x \in \mathcal{F}_3$. Для $u \in \mathcal{F}_3^*$ функція $f_2'(u) = g_2(u) + A$ і нерівність (21) з $\delta = h$, (29), (33), (31), Леми 5, 6 і (34) породжують нерівність

$$\Psi_3(x) + \Psi_4(x) \geq -c_9\omega_k(g_2 + A, h_1) - c_9(c_{14} + c_{17})\varphi(h_1)\left(\frac{1}{n_1 h}\right)^{4(s+2)+1} +$$

$$+0 + 2c_9c_{14}\varphi(h) \geq \varphi(h)c_9\left(c_{14} - \pi(c_{14} + c_{17})\frac{n}{n_1}\right) \geq 0.$$

4) $x \in \mathcal{F}_4$. Для $u \in \mathcal{F}_4^*$ функція $f_2'(u) = A$. Тому $\omega_k(f_2', t, \mathcal{F}_4) \equiv 0$. Використовуючи (21) з $\delta = \operatorname{dist}(x, F^{**})$, Лему 6, (29), (33), (31), (34) і нерівність

$$\frac{1}{n_1 \operatorname{dist}(x, F^{**})} < \check{\Gamma}_n(\operatorname{dist}(x, \mathcal{F}_3)),$$

записуємо

$$\Psi_3(x) + \Psi_4(x) \geq -c_9\cdot 0 - c_9(c_{14} + c_{17})\varphi(h_1)\left(\frac{1}{n_1 \operatorname{dist}(x, F^{**})}\right)^{4(s+2)+1} +$$

$$+0 + 2c_9c_{14}\varphi(h)\Big(\check{\Gamma}_n(\operatorname{dist}(x, \mathcal{F}_3))\Big)^{4(s+2)} \geq$$

$$\geq \varphi(h)c_9\Big(\check{\Gamma}_n(\operatorname{dist}(x, \mathcal{F}_3))\Big)^{4(s+2)}\left(2c_{14} - \pi(c_{14} + c_{17})\frac{n}{n_1}\right) \geq 0.$$

5) $x \in O$. Згідно (29) і (33) маємо $\Psi_4(x) \geq 0$. Для $x \in O_i$ такої, що $O_i \cap F = \emptyset$, функція $f_2'(x) = A$, тому комонотонність U_n, (19), (34), Лема 6 і, відповідно, (23) і (22) породжують нерівності

$$\Psi_5(x) + \Psi_3(x) \geq \frac{c_{22}c_7}{h}\varphi(h)|x - y_i| -$$

$$-\frac{c_{10}}{h_1}(c_{14}+c_{17})\varphi(h_1)|x-y_i| \ge 0, \quad x \in J_{i,n_1}, \tag{37}$$

$$\Psi_5(x)+\Psi_3(x) \ge \frac{c_{22}c_7}{h}\varphi(h)|x-y_i|-$$

$$-c_9(c_{14}+c_{17})\varphi(h_1) \ge 0, \quad x \in O_i \setminus J_{i,n_1}. \tag{38}$$

Для решти $O_i \subset O$, тобто для $x \in O_i \,:\, O_i \cap F \ne \emptyset$, функція $f_2'(x) = f'(x) + A$. В цьому випадку нерівність (38) залишається вірною, а нерівність

$$\Psi_5(x)+\Psi_3(x)+\Psi_2(x) = \Psi_5(x)+$$

$$+\Big(\hat\sigma'_{n_1}(f_2,x) - L_{k-1}(f_2',x,J_{i,n_1}) + L_{k-1}(f_2',y_i,J_{i,n_1})+$$

$$+L_{k-1}(f_2',x,J_{i,n_1}) - L_{k-1}(f_2',y_i,J_{i,n_1}) - f_2'(x)\Big)\operatorname{sgn}\Pi(x) + \Psi_2(x) =$$

$$= \Psi_5(x) + \Big(-A + \hat\sigma'_{n_1}(f_2,x) - L_{k-1}(f_2',x,J_{i,n_1}) + L_{k-1}(f_2',y_i,J_{i,n_1})\Big)\times$$

$$\times\ \operatorname{sgn}\Pi(x) + \Big(L_{k-1}(f',x,J_{i,n_1}) - L_{k-1}(f',y_i,J_{i,n_1})\Big)\operatorname{sgn}\Pi(x) =:$$

$$=: \Psi_5(x) + \Psi_{3,1}(x) + \Psi_{3,2}(x,k) \ge 0, \quad x \in J_{i,n_1},$$

справджується аналогічно (37), якщо

$$\Psi_{3,2}(x,k) \ge 0, \quad x \in J_{i,n_1}. \tag{39}$$

Оскільки, при $f'(x)\Pi(x) \ge 0$,

$$\Psi_{3,2}(x,3) = \Big(L_2(f',x,J_{i,n_1}) - L_2(f',y_i,J_{i,n_1})\Big)\operatorname{sgn}\Pi(x) =$$

$$= L_2(f',x,J_{i,n_1})\operatorname{sgn}\Pi(x) \ge 0, \quad x \in J_{i,n_1},$$

то (39) є вірною завжди тільки при $k = 3$ (про більші k такого, взагалі кажучи, сказати не можна).

Нерівність (36), тобто комонотонність P_{n_1}, доведено. А (4) є наслідком (35).

1. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977. — 512 с.

2. *Дзюбенко Г. А., Плешаков М. Г.* Комонотонное приближение периодических функций // Мат. заметки. — 2008. — **83**, № 2. — С. 199 – 209.

3. *Дзюбенко Г. А.* Комонотонне наближення двічі диференційовних періодичних функцій // Укр. матем. журн. — 2009. — **61**, № 4. — С. 435 – 451.

4. *Whitney H.* On Functions with Bouded n-th Differences // J. Math. Pures Appl. — 1957. — **6**, № 9. — P. 67 – 95.

5. *Плешаков М. Г.* Комонотонное приближение периодических функций классов Соболева: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — Саратов, СГУ, 1997.

6. *Дзюбенко Г. А.* Контрприклад в комонотонному наближенні періодичних функцій // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **5**, № 1. — С. 113 – 123.

7. *Pleshakov M. G.* Comonotone Jackson's Inequality // J. Approx. Theory. — 1999. — **99**. — P. 409 – 421.

8. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывних функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1951. — **15**, № 3. — С. 219 – 242.