Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, Т.10, №1, 69-94

УДК 517.53

А. П. Голуб, Л. О. Чернецька (Ін–т математики НАН України, Київ)

ПОБУДОВА АПРОКСИМАНТ ПАДЕ ДЛЯ ДЕЯКИХ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ АППЕЛЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ УЗАГАЛЬНЕНИХ МОМЕНТНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

By means of extension of V.K. Dzyadyk's method of generalized moment representations to the case of two–dimensional number sequences Padé approximants for some Appell hypergeometric series are constructed.

За допомогою поширення методу узагальнених моментних зображень В.К. Дзядика на випадок двовимірних числових послідовностей побудовано апроксиманти Паде для деяких гіпергеометричних рядів Аппеля.

В роботах [1], [2] метод узагальнених моментних зображень В.К. Дзядика поширено на випадок двовимірних числових послідовностей і побудовано апроксиманти Паде для деяких гіпергеометричних рядів Аппеля та Гумберта. Наведемо ще один приклад застосування цього методу.

Зауважимо, що різноманітні модифікації багатовимірних і, зокрема, двовимірних апроксимацій Паде вивчалися в роботах [3]–[10], зокрема в [8]–[10] досліджувалися апроксиманти Паде для деяких функцій Аппеля.

Наведемо необхідні означення.

Означення 1. Будемо говорити, що для двовимірної числової послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle .,. \rangle$, якщо в просторі $\mathscr{X}$ вказано двовимірну послідовність елементів $\{x_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$, а в просторі $\mathscr{Y}$ — двовимірну послідовність елементів $\{y_{j,n}\}_{j,n=0}^{\infty}$ такі, що

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \quad k, j, m, n \in \mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

Двовимірній числовій послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ можна поставити у відповідність формальний степеневий ряд від двох змінних вигляду

$$f(z,w)=\sum_{k,m=0}^{\infty}s_{k,m}z^kw^m. \tag{2}$$

Задача про двовимірні узагальнені моментні зображення може бути сформульована в операторному вигляді. А саме, припустимо, що простори $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ є нормованими, і в просторі $\mathscr{X}$ існують комутуючі між собою обмежені оператори $A,B:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$, такі що виконуються рівності

$$Ax_{k,m}=x_{k+1,m},$$

$$Bx_{k,m}=x_{k,m+1}$$

для $\forall k,m\in\mathbb{Z}_+$. Нехай також в просторі $\mathscr{Y}$ існують обмежені оператори $A^\star,B^\star:\mathscr{Y}\to\mathscr{Y}$, спряжені до операторів A та B відносно білінійної форми $\langle.,.\rangle$ в тому розумінні, що $\forall x\in\mathscr{X},\forall y\in\mathscr{Y}$:

$$\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^\star y\rangle,$$

$$\langle Bx,y\rangle=\langle x,B^\star y\rangle.$$

Тоді зображення (1) може бути записаним у вигляді

$$s_{k,m}=\langle x_{k,m},y_{0,0}\rangle=\left\langle A^kB^mx_{0,0},y_{0,0}\right\rangle,\ k,m\in\mathbb{Z}_+, \tag{3}$$

і ряд (2) буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції, що має зображення

$$f(z,w)=\left\langle\widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(B)x_{0,0},y_{0,0}\right\rangle, \tag{4}$$

де резольвентна функція $\widehat{R_z}(A)$ визначається рівністю $\widehat{R_z}(A)=(I-zA)^{-1}$.

В [1] показано, як для функцій вигляду (4) можна будувати двовимірні апроксиманти Паде.

Нехай $\mathscr{X}=\mathscr{Y}=L_2\left([0,1],d\mu\right)$ для деякої міри, що визначається неспадною функцією $\mu(t)$, що має нескінченну кількість точок зростання на $[0,1]$. Розглянемо в просторі $\mathscr{X}$ комутуючі обмежені лінійні оператори

$$\left(A\varphi\right)(t)=t\varphi(t),$$

$$(B\varphi)(t) = (1-t)\varphi(t).$$

Їх резольвентні функції мають вигляд

$$\left(\widehat{R_z}(A)\varphi\right)(t) = \frac{\varphi(t)}{1-zt},$$

$$\left(\widehat{R_w}(B)\varphi\right)(t) = \frac{\varphi(t)}{1-w(1-t)}.$$

Таким чином, на основі (4) при $x_{0,0}(t) = y_{0,0}(t) \equiv 1$ функцію $f(z,w)$ можна записати у вигляді

$$f(z,w) = \left\langle \widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(B)x_{0,0}, y_{0,0} \right\rangle = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{(1-zt)(1-w(1-t))} =$$

$$= \frac{1}{w+z-zw}\left(w\int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-w(1-t)} + z\int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-zt}\right). \qquad (5)$$

Коефіцієнти $s_{k,m}$ в розвиненні функції $f(z,w)$ в ряд (2), згідно з (3) будуть мати вигляд

$$s_{k,m} = \int_0^1 x_{k,m}(t)y_{0,0}(t)d\mu(t) = \int_0^1 (A^k B^m x_{0,0})(t)y_{0,0}(t)d\mu(t) =$$

$$= \int_0^1 t^k(1-t)^m d\mu(t), k,m = \overline{0,\infty}. \qquad (6)$$

За теоремою 1 з [2] щоб побудувати апроксиманти Паде функції вигляду (5), нам потрібно побудувати нетривіальний узагальнений многочлен вигляду

$$X_{N_1,N_2} = \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2} c_{k,m}^{(N_1,N_2)} x_{k,m},$$

такий що виконуються умови біортогональності

$$\langle X_{N_1,N_2}, y_{j,n}\rangle = 0$$

при $(j,n) \in ([0,N_1]\times[0,N_2])\setminus\{(N_1,N_2)\}$. Оскільки $X_{N_1,N_2}(t)$ в даному випадку буде алгебраїчним многочленом степеня N_1+N_2, який ортогональний до многочленів степеня $\leqslant N_1+N_2-1$, то він співпадатиме з точністю до сталого множника з алгебраїчним многочленом $P_{N_1+N_2}(t)$ степеня N_1+N_2, ортонормованим на $[0,1]$ з вагою $d\mu(t)$ (див. [11, с. 116]):

$$X_{N_1,N_2}(t) = P_{N_1+N_2}(t). \tag{7}$$

Зауважимо, що поліном (7) при цьому буде ортогональним не лише до $x_{k,m}(t), (k,m) \in ([0,N_1]\times[0,N_2])\setminus\{(N_1,N_2)\}$, але і до $x_{k,m}(t)$ при $(k,m) \in \{(k,m), k,m \in \mathbb{Z}_+, k+m \leqslant N_1+N_2-1\}$. Тому індекси коефіцієнтів чисельника апроксиманти Паде функції f вигляду (5) будемо брати не з множини $\mathscr{N}^\star = ([0,2N_1]\times[0,2N_2])\setminus([N_1,2N_1]\times[N_2,2N_2])$ (як пропонується в теоремі 1 з [1]), а з множини

$$\mathscr{N} = \{(k,m), k+m \leqslant 2N_1+2N_2-1\}\setminus\{(k,m), k\geqslant N_1, m\geqslant N_2\},$$

а індекси коефіцієнтів знаменника — з області

$$\mathscr{D} = [0,N_1]\ \times\ [0,N_2].$$

Для обраної нами області $\mathscr{N}$ в теоремі 1 з [2] ми повинні покласти $x(k) = 2N_1+2N_2-1-k$, $y(m) = 2N_1+2N_2-1-m$.

Запишемо многочлен $P_{N_1+N_2}(t)$ у вигляді:

$$P_{N_1+N_2}(t) = \sum_{j=0}^{N_1+N_2} p_j^{(N_1+N_2)} t^j.$$

З (7) отримаємо:

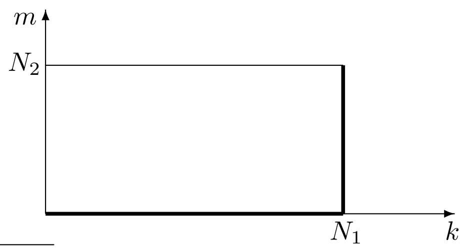
$$\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2} c_{k,m}^{(N_1,N_2)} x_{k,m}(t) = \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2} c_{k,m}^{(N_1,N_2)} t^k(1-t)^m = \sum_{j=0}^{N_1+N_2} p_j^{(N_1+N_2)} t^j. \tag{8}$$

З рівності (8) коефіцієнти $c_{k,m}^{(N_1,N_2)}, k = \overline{0,N_1}, m = \overline{0,N_2}$ можна визначити безліччю способів. Функції вигляду (5) є симетричними за своїми змінними тоді і тільки тоді, коли $d\mu(t) \equiv d\mu(1-t)$. Тому доречно розглянути два випадки.

Випадок (I). В несиметричному випадку як один з варіантів знаходження коефіцієнтів $c_{k,m}^{(N_1,N_2)}, k=\overline{0,N_1}, m=\overline{0,N_2}$ з рівності (8) розглянемо такий (див. малюнок нижче).

Покладемо:

$$\sum_{j=0}^{N_1+N_2} p_j^{(N_1+N_2)} t^j = \sum_{k=0}^{N_1-1} c_{k,0}^{(N_1,N_2)} t^k + t^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1,m}^{(N_1,N_2)} (1-t)^m.$$



При $k=\overline{0,N_1-1}, m=0$ отримаємо:

$$c_{k,m}^{(N_1,N_2)} = p_k^{(N_1+N_2)}.$$

Далі будемо мати:

$$\sum_{j=N_1}^{N_1+N_2} p_j^{(N_1+N_2)} t^{j-N_1} = \sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1,m}^{(N_1,N_2)} (1-t)^m,$$

звідки

$$\sum_{k=0}^{N_2} (-t)^k \sum_{j=k}^{N_2} p_{j+N_1}^{(N_1+N_2)} \binom{j}{k} = \sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1,m}^{(N_1,N_2)} t^m.$$

Отже, при $k=N_1, m=\overline{0,N_2}$ отримаємо:

$$c_{N_1,m}^{(N_1,N_2)} = (-1)^m \sum_{j=m}^{N_2} p_{j+N_1}^{(N_1+N_2)} \binom{j}{m}.$$

Таким чином, маємо:

$$c_{k,m}^{(N_1,N_2)} = \begin{cases} p_k^{(N_1+N_2)} & \text{при } k = \overline{0, N_1-1}, m = 0, \\ (-1)^m \sum\limits_{j=m}^{N_2} \binom{j}{m} p_{j+N_1}^{(N_1+N_2)} & \text{при } k = N_1, m = \overline{0, N_2}, \\ 0, & \text{для інших } (k,m) \in \mathscr{D}. \end{cases} \qquad (9)$$

Випадок (II). В симетричному випадку має сенс наближати функцію f лише симетричними раціональними поліномами, а тому покладемо $N_1 = N_2 = N$ і всі недіагональні коефіцієнти рівними нулю: $c_{k,m}^{(N,N)} = 0$ при $k \neq m$. Для зручності діагональні коефіцієнти $c_{k,k}^{(N,N)}$ будемо надалі позначати через $c_k^{(N)}$.

Рівність (8) набуде вигляду

$$\sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} t^k (1-t)^k = \sum_{j=0}^{2N} p_j^{(2N)} t^j.$$

Для визначення коефіцієнтів $c_k^{(N)}$ встановимо наступний допоміжний результат.

Лема. *Нехай деякий алгебраїчний многочлен*

$$P_{2N}(t) = \sum_{m=0}^{2N} p_m^{(2N)} t^m \qquad (10)$$

степеня $2N$ *є таким, що* $\forall t \in [0,1]$ *виконується рівність*

$$P_{2N}(t) = P_{2N}(1-t). \qquad (11)$$

Тоді він може бути єдиним чином записаним у вигляді

$$P_{2N}(t) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} t^j (1-t)^j, \qquad (12)$$

і при цьому для коефіцієнтів $c_j^{(N)}$, $j = \overline{0,N}$, *справджуються рівності*

$$c_j^{(N)} = \begin{cases} p_0^{(2N)} & \text{при } j = 0, \\ \sum\limits_{m=1}^{j} \dfrac{(2j-m-1)!\,m}{j!\,(j-m)!} p_m^{(2N)} & \text{при } j \geqslant 1. \end{cases} \qquad (13)$$

Доведення. З рівностей (10) та (12) будемо мати

$$p_k^{(2N)} = \begin{cases} c_0^{(N)} & \text{при } \ k = 0, \\ \sum\limits_{j=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k} (-1)^{k-j} \begin{pmatrix} j \\ k-j \end{pmatrix} c_j^{(N)} & \text{при } k = \overline{1, 2N}. \end{cases}$$

На основі даного зображення неважко переконатися в справедливості рівностей (13) для невеликих значень $N = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Припустимо за індукцією, що рівності (13) виконуються при деякому цілому $N - 1 \in \mathbb{Z}_+$. Розглянемо тоді алгебраїчний многочлен $P_{2N}(t)$ степеня $2N$, такий що для нього має місце властивість (11). Тоді алгебраїчний многочлен

$$\widetilde{P}_{2N-2}(t) = P_{2N}(t) - p_{2N}^{(2N)} (-1)^{N+1} t^{N+1} (1-t)^{N+1}$$

матиме степінь $2(N-1)$ і для нього також справджуватиметься властивість (11). Тому за припущенням індукції його можна записати єдиним чином у вигляді

$$\widetilde{P}_{2N-2}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \widetilde{c}_j^{(N-1)} t^j (1-t)^j,$$

де

$$\widetilde{c}_j^{(N-1)} = \begin{cases} \widetilde{p}_0^{(2N-2)} & \text{при } j = 0, \\ \sum\limits_{m=1}^{j} \dfrac{(2j-m-1)!m}{j!(j-m)!} \widetilde{p}_m^{(2N-2)} & \text{при } j \geqslant 1. \end{cases}$$

Але тоді

$$P_{2N}(t) = \widetilde{P}_{2N-2}(t) + p_{2N}^{(2N)} (-1)^{N+1} t^{N+1} (1-t)^{N+1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \widetilde{c}_j^{(N-1)} t^j (1-t)^j + p_{2N}^{(2N)} (-1)^{N+1} t^{N+1} (1-t)^{N+1}.$$

Враховуючи, що

$$\widetilde{p}_m^{(2N-2)} = p_m^{(2N)} \text{ при } m = \overline{0, N-1},$$

для доведення леми залишилось встановити, що за умови (11) для коефіцієнтів многочлена $P_{2N}(t)$ має місце співвідношення

$$(-1)^N p_{2N}^{(2N)} = \sum_{m=1}^{N} \frac{(2N-m-1)!m}{N!(N-m)!} p_m^{(2N)}. \tag{14}$$

Неважко переконатися, що умова (11) тягне за собою необхідність виконання співвідношень

$$p_m^{(2N)} = (-1)^m \sum_{k=m}^{2N} p_k^{(2N)} \binom{k}{m}, \quad m = \overline{0, 2N}. \tag{15}$$

Перші N співвідношень (15) можна розглядати як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно N невідомих

$$p_{N+1}^{(2N)},\ p_{N+2}^{(2N)},\ ...,\ p_{2N}^{(2N)}.$$

Визначник цієї системи має вигляд

$$\Delta_N = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ N+1 & N+2 & \dots & 2N \\ \binom{N+1}{2} & \binom{N+2}{2} & \dots & \binom{2N}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{N+1}{N-1} & \binom{N+2}{N-1} & \dots & \binom{2N}{N-1} \end{vmatrix},$$

а вектор правих частин дорівнює

$$\Big(-p_1^{(2N)} - p_2^{(2N)} - \dots - p_N^{(2N)}, -2p_1^{(2N)} - 2p_2^{(2N)} - \dots - Np_N^{(2N)},$$

$$-\binom{3}{2} p_3^{(2N)} - \binom{4}{2} p_4^{(2N)} - \dots - \binom{N}{2} p_N^{(2N)}, \dots,$$

$$(-1+(-1)^m) p_m^{(2N)} - \binom{m+1}{m} p_{m+1}^{(2N)} - \dots - \binom{N}{m} p_N^{(2N)}, \dots,$$

$$(-1+(-1)^{N-1}) p_{N-1}^{(2N)} - \binom{N}{N-1} p_N^{(2N)} \Big)^T. \tag{16}$$

Отож, щоб знайти за формулами Крамера зі співвідношень (15) коефіцієнт $p_{2N}^{(2N)}$, потрібно підрахувати визначник Δ_N та визначник, що отримується з Δ_N заміною останнього стовпчика на вектор правих частин (16).

Очевидно,

$$\Delta_N = \frac{(N+1)!(N+2)!\cdot\ldots\cdot(2N)!}{0!1!\cdot\ldots\cdot(N-1)!}\begin{vmatrix} \frac{1}{(N+1)!} & \frac{1}{(N+2)!} & \ldots & \frac{1}{(2N)!} \\ \frac{1}{N!} & \frac{1}{(N+1)!} & \ldots & \frac{1}{(2N-1)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \ldots & \frac{1}{(N+1)!} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{(N-1)N}{2}} \frac{\prod\limits_{k=1}^{N}(N+k)!}{\prod\limits_{k=1}^{N-1}k!} \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \ldots & \frac{1}{(N+1)!} \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \ldots & \frac{1}{(N+2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{(N+1)!} & \frac{1}{(N+2)!} & \ldots & \frac{1}{(2N)!} \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Позначимо останній визначник через $\widetilde{\Delta}_N$. Цей визначник є визначником Ганкеля послідовності $\left\{\frac{1}{(k+2)!}\right\}_{k=0}^{\infty}$. Для цієї послідовності має місце узагальнене моментне зображення (див. [12, с. 37])

$$\frac{1}{(k+j+2)!} = \int\limits_0^1 x_k(t)y_j(t)dt, \quad k,j=\overline{0,\infty},$$

де

$$x_k(t) = \frac{t^k}{k!}, \qquad k=\overline{0,\infty},$$

$$y_j(t) = \frac{(1-t)^{j+1}}{(j+1)!}, \quad j=\overline{0,\infty}.$$

Многочлен $X_{N-1}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k^{(N-1)} x_k(t)$, для якого виконуються умови біортогональності

$$\int_0^1 X_{N-1}(t) y_j(t) dt = 0, \qquad j = \overline{0, N-2},$$

очевидно, з точністю до мультиплікативної константи співпадає з ортогональним зсунутим на $[0,1]$ многочленом Якобі $P_{N-1}^{(0,1)}(t)$ (див. [13, с. 580-581]) . Нехай константу вибрано так, щоб старший коефіцієнт $X_{N-1}(t)$ дорівнював 1. Тоді

$$X_{N-1}(t) = P_{N-1}^{(0,1)}(t) =$$

$$= \frac{(N-1)!}{(2N-1)!} \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m \binom{N-1}{m} \frac{(2N-m-1)!m}{(N-m-1)!} t^{N-m-1}. \qquad (18)$$

Але, як відзначено в [14], цей многочлен можна зобразити також у вигляді

$$X_{N-1}(t) = \xi_{N-1} \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(N+1)!} \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(N+2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{N!} & \frac{1}{(N+1)!} & \cdots & \frac{1}{(2N-1)!} \\ 1 & t & \cdots & \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} \end{vmatrix}, \qquad (19)$$

де ξ_{N-1} — константа, що визначається умовами нормування. Тоді, легко бачити, що

$$\int_0^1 X_{N-1}(t) y_{N-1}(t) dt = \xi_{N-1} \widetilde{\Delta}_N.$$

Оскільки

$$y_{N-1}(t) = \frac{(1-t)^N}{N!} = \frac{(1-t)}{N!}\left((-1)^{N-1}t^{N-1} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{(1-t)}{N!}\left((-1)^{N-1}X_{N-1}(t) + \ldots\right),$$

а старший коефіцієнт многочлена $\dfrac{1}{\xi_{N-1}}X_{N-1}(t)$, очевидно, дорівнює $\dfrac{\widetilde{\Delta}_{N-1}}{(N-1)!}$, то з іншого боку

$$\frac{\xi_{N-1}}{(N-1)!}\widetilde{\Delta}_{N-1}\frac{(-1)^{N-1}}{N!}h_{N-1} = \xi_{N-1}\widetilde{\Delta}_N,$$

де (див. [13, с. 580])

$$h_{N-1} = \int\limits_0^1 [X_{N-1}(t)]^2(1-t)dt = \frac{(N-1)!(N-1)!N!N!}{2N(2N-1)!(2N-1)!}.$$

Отже, маємо

$$\frac{\widetilde{\Delta}_N}{\widetilde{\Delta}_{N-1}} = \frac{(-1)^{N-1}(N-1)!N!}{2N(2N-1)!(2N-1)!},$$

звідки

$$\widetilde{\Delta}_N = \prod_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!k!}{(2k)!(2k-1)!},$$

а тому на основі (17) маємо

$$\Delta_N = (-1)^{\frac{(N-1)N}{2}}N!\prod_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!(N+k)!}{(2k)!(2k-1)!}. \qquad (20)$$

Встановимо, що насправді при кожному натуральному N визначник $\Delta_N = 1$. Очевидно, що $\Delta_1 = 1$. Нехай при деякому $N \in \mathbb{N}$: $\Delta_N = 1$. Тоді згідно з (20)

$$\Delta_{N+1} = (N+1)!\prod_{k=1}^{N+1}\frac{(k-1)!(N+k+1)!}{(2k)!(2k-1)!} =$$

$$= \Delta_N \frac{N!(N+1)}{(2N+2)!(2N+1)!} \frac{\prod\limits_{k=1}^{N+1}(N+1+k)!}{\prod\limits_{k=1}^{N}(N+k)!} =$$

$$= \frac{(N+1)!}{(2N+1)!} \prod_{k=1}^{N}(N+1+k) = \frac{(N+1)!}{(2N+1)!} \cdot \frac{(2N+1)!}{(N+1)!} = 1.$$

Перейдемо тепер до підрахунку визначника

$$\Delta_N^{(N)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \beta_0 \\ N+1 & N+2 & \dots & 2N-1 & \beta_1 \\ \binom{N+1}{2} & \binom{N+2}{2} & \dots & \binom{2N-1}{2} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{N+1}{N-1} & \binom{N+2}{N-1} & \dots & \binom{2N-1}{N-1} & \beta_{N-1} \end{vmatrix},$$

де

$$\beta_m = (-1+(-1)^m)\, p_m^{(2N)} - \binom{m+1}{m} p_{m+1}^{(2N)} - \binom{m+2}{m} p_{m+2}^{(2N)} - \dots - \binom{N}{m} p_N^{(2N)}.$$

Очевидно, як і раніше

$$\Delta_N^{(N)} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{N-1}(N+k)!}{\prod\limits_{k=1}^{N-1}k!} \begin{vmatrix} \frac{1}{(N+1)!} & \frac{1}{(N+2)!} & \dots & \frac{1}{(2N-1)!} & \beta_0 \cdot 0! \\ \frac{1}{N!} & \frac{1}{(N+1)!} & \dots & \frac{1}{(2N-2)!} & \beta_1 \cdot 1! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \dots & \frac{1}{N!} & \beta_{N-1} \cdot (N-1)! \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{(N-1)N}{2}} \frac{\prod\limits_{k=1}^{N-1}(N+k)!}{\prod\limits_{k=1}^{N-1}k!} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{N!} & \beta_{N-1}\cdot(N-1)! \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(N+1)!} & \beta_{N-2}\cdot(N-2)! \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(N+1)!} & \frac{1}{(N+2)!} & \cdots & \frac{1}{(2N-1)!} & \beta_0\cdot 0! \end{vmatrix}.$$

Позначимо останній визначник через $\widetilde{\Delta}_N^{(N)}$ і розкладемо його за елементами останнього стовпчика. Отримаємо

$$\widetilde{\Delta}_N^{(N)} = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \beta_k\, k! A_k^{(N)},$$

де

$$A_k^{(N)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{N!} \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(N+1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(N-k)!} & \frac{1}{(N-k+1)!} & \cdots & \frac{1}{(2N-k-2)!} \\ \frac{1}{(N-k+2)!} & \frac{1}{(N-k+3)!} & \cdots & \frac{1}{(2N-k)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(N+1)!} & \frac{1}{(N+2)!} & \cdots & \frac{1}{(2N-1)!} \end{vmatrix} -$$

це визначник, що отримується з визначника $\widetilde{\Delta}_N$ викиданням останнього стовпчика і рядка з номером $N-k$. При цьому легко помітити, що на основі (18) та (19) можна записати

$$\frac{1}{\xi_{N-1}} X_{N-1}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{t^{N-k-1}}{(N-k-1)!}(-1)^k A_k^{(N)} =$$

$$= \frac{1}{\xi_{N-1}} \frac{(N-1)!}{(2N-1)!} \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m \binom{N-1}{m} \frac{(2N-m-1)!}{(N-m-1)!} t^{N-1-m}.$$

Звідси отримуємо

$$A_k^{(N)} = \frac{1}{\xi_{N-1}} \frac{(N-1)!}{(2N-1)!} \binom{N-1}{k} (2N-k-1)!.$$

Отже,

$$\widetilde{\Delta}_N^{(N)} = \frac{1}{\xi_{N-1}} \frac{(N-1)!}{(2N-1)!} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \beta_k k! \binom{N-1}{k} (2N-k-1)!.$$

Оскільки

$$\xi_{N-1} = \frac{(N-1)!}{\widetilde{\Delta}_{N-1}},$$

то

$$\widetilde{\Delta}_N^{(N)} = \frac{\widetilde{\Delta}_{N-1}}{(2N-1)!} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \beta_k \, k! \binom{N-1}{k} (2N-k-1)!.$$

Підставляючи сюди значення коефіцієнтів β_k, $k = \overline{0, N-1}$, отримаємо

$$\widetilde{\Delta}_N^{(N)} = \frac{\widetilde{\Delta}_{N-1}}{(2N-1)!} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k k! \binom{N-1}{k} (2N-k-1)! \Big\{ (-1+(-1)^k) p_k^{(2N)} - \\ - \binom{k+1}{k} p_{k+1}^{(2N)} - \binom{k+2}{k} p_{k+2}^{(2N)} - \ldots - \binom{N}{k} p_N^{(2N)} \Big\}.$$

Враховуючи, що на підставі (17)

$$\Delta_{N-1} = (-1)^{\frac{(N-2)(N-1)}{2}} \frac{\prod\limits_{p=1}^{N-1} (N+p-1)!}{\prod\limits_{p=1}^{N-2} p!} \widetilde{\Delta}_{N-1} = 1,$$

маємо

$$\widetilde{\Delta}_{N-1} = (-1)^{\frac{(N-2)(N-1)}{2}} \frac{\prod\limits_{p=1}^{N-2} p!}{\prod\limits_{p=1}^{N-1} (N+p-1)!}.$$

Отже,

$$\widetilde{\Delta}_N^{(N)} = (-1)^{\frac{(N-2)(N-1)}{2}} \frac{\prod\limits_{p=1}^{N-2} p!}{\prod\limits_{p=1}^{N-1}(N+p-1)!} \frac{1}{(2N-1)!} \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k k! \times$$

$$\times \binom{N-1}{k}(2N-k-1)! \left\{(-1+(-1)^k)p_k^{(2N)} - \sum_{r=k+1}^{N}\binom{r}{k}p_r^{(2N)}\right\},$$

а тому

$$\Delta_N^{(N)} = \frac{(-1)^N}{N!(N-1)!}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k k! \binom{N-1}{k}(2N-k-1)! \times$$

$$\times \left\{(1-(-1)^k)p_k^{(2N)} + \sum_{r=k+1}^{N}\binom{r}{k}p_r^{(2N)}\right\} =$$

$$= \frac{2(-1)^{N-1}}{N!}\sum_{m=0}^{[\frac{N}{2}]-1}\frac{(2N-2m-2)!}{(N-2m-2)!}p_{2m+1}^{(2N)} +$$

$$+ \frac{(-1)^N}{N!}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}\frac{(2N-k)!}{(N-k)!}\sum_{r=k}^{N}\binom{r}{k-1}p_r^{(2N)} =$$

$$= \frac{(-1)^N}{N!}\left\{\sum_{r=1}^{N}p_r^{(2N)}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\frac{(2N-k)!}{(N-k)!}\binom{r}{k-1} - \right.$$

$$\left. -2\sum_{m=0}^{[\frac{N}{2}]-1}\frac{(2N-2m-2)!}{(N-2m-2)!}p_{2m+1}^{(2N)}\right\},$$

звідки і випливають співвідношення (14), а з ними й твердження леми.

На основі вищенаведених міркувань сформулюємо такі результати.

Теорема 1. *Для аналітичної функції, що має інтегральне зображення* (5), *у випадку несиметричної міри $d\mu(t) \not\equiv d\mu(1-t)$ при довільних $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ раціональні функції*

$$[\mathscr{N}/\mathscr{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathscr{N}}(z,w)}{Q_{N_1,N_2}(z,w)},$$

такі що

$$Q_{N_1,N_2}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} z^j w^n,$$

$$P_{\mathscr{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m-n} +$$

$$+ z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=0}^{N_1+2N_2-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n} +$$

$$+ w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{2N_1+N_2-1-k} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n},$$

де коефіцієнти $c_{k,m}^{(N_1,N_2)}$, $k = \overline{0,N_1}$, $m = \overline{0,N_2}$ задовольняють рівності (8), *матимуть розклади в степеневі ряди, коефіцієнти яких співпадатимуть з коефіцієнтами* (6) *для функції* (5) *для всіх $(j,n) \in \mathscr{E} = \{(j,n) \in \mathbb{Z}_+^2 : j+n \leqslant 2N_1+2N_2-1\}$.*

Зокрема, це справедливо для раціональної функції:

$$[\mathscr{N}/\mathscr{D}]_f^{(I)}(z,w) = \frac{P_{\mathscr{N}}^{(I)}(z,w)}{Q_{N_1,N_2}^{(I)}(z,w)},$$

де

$$Q_{N_1,N_2}^{(I)}(z,w) = w^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} p_{N_1-j}^{(N_1+N_2)} z^j +$$

$$+ \sum_{n=0}^{N_2} (-1)^{N_2-n} w^n \sum_{k=0}^{n} p_{N_1+N_2-k}^{(N_1+N_2)} \binom{N_2-k}{N_2-n},$$

$$P^{(I)}_{\mathscr{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{n=0}^{m}(-1)^{N_2-n}\sum_{r=N_2-n}^{N_2} p^{(N_1+N_2)}_{r+N_1}\binom{r}{N_2-n} s_{k,m-n}+$$

$$+z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{N_1+2N_2-1-m} z^k w^m \sum_{n=0}^{m}(-1)^{N_2-n}\sum_{r=N_2-n}^{N_2} p^{(N_1+N_2)}_{r+N_1}\binom{r}{N_2-n} s_{k+N_1,m-n}+$$

$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{2N_1+N_2-1-k} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} p^{(N_1+N_2)}_{N_1-j} s_{k-j,m}+$$

$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{2N_1+N_2-1-k} z^k w^m \sum_{n=0}^{N_2}(-1)^{n}\sum_{r=n}^{N_2} p^{(N_1+N_2)}_{r+N_1}\binom{r}{n} s_{k,m+n},$$

де $p^{(N_1+N_2)}_j$ *— коефіцієнти алгебраїчного многочлена* $P_{N_1+N_2}(t)$*, ортонормованого на* $[0,1]$ *з вагою* $d\mu(t)$*.*

Теорема 2. *Для аналітичної функції, що має інтегральне зображення* (5)*, у випадку симетричної міри* $d\mu(t) \equiv d\mu(1-t)$ *при довільному* $N \in \mathbb{N}$ *раціональні функції*

$$[\mathscr{N}/\mathscr{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathscr{N}}(z,w)}{Q_{N,N}(z,w)},$$

такі що

$$Q_{N,N}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N} c^{(N,N)}_{N-j,N-n} z^j w^n,$$

$$P_{\mathscr{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c^{(N_1,N_2)}_{N-j,N-n} s_{k-j,m-n}+$$

$$+z^{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{m} c^{(N,N)}_{j,N-n} s_{k+j,m-n}+$$

$$+w^{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N} c^{(N,N)}_{N-j,n} s_{k-j,m+n},$$

де коефіцієнти $c_{k,m}^{(N,N)}, k, m = \overline{0, N}$ *задовольняють рівності*

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} c_{k,m}^{(N,N)} t^k (1-t)^m = \sum_{j=0}^{2N} p_j^{(2N)} t^j,$$

матимуть розклади в степеневі ряди, коефіцієнти яких співпадатимуть з коефіцієнтами (6) *для функції* (5) *для всіх* $(j,n) \in \mathscr{E} = \{(j,n) \in \mathbb{Z}_+^2 : j+n \leqslant 4N-1\}$.

Зокрема, це справедливо для раціональної функції:

$$[\mathscr{N}/\mathscr{D}]_f^{(II)}(z,w) = \frac{P_{\mathscr{N}}^{(II)}(z,w)}{Q_{N,N}^{(II)}(z,w)},$$

де

$$Q_{N,N}^{(II)}(z,w) = p_0^{(2N)} z^N w^N + \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{k} \frac{(2k-j-1)!j}{k!(k-j)!} p_j^{(2N)} z^{N-k} w^{N-k},$$

$$P_{\mathscr{N}}^{(II)}(z,w) = \sum_{r=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} z^r w^m \sum_{k=N-r}^{N}\sum_{j=1}^{k} \frac{(2k-j-1)!j}{k!(k-j)!} p_j^{(2N)} s_{r-N+k,m-N+k} +$$

$$+ z^N \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{3N-1-m} z^r w^m \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{k} \frac{(2k-j-1)!j}{k!(k-j)!} p_j^{(2N)} s_{r+k,m-N+k} +$$

$$+ w^N \sum_{r=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-r} z^r w^m \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{k} \frac{(2k-j-1)!j}{k!(k-j)!} p_j^{(2N)} s_{r-N+k,m+k},$$

де $p_j^{(2N)}$, $j = \overline{0, N}$ — *коефіцієнти алгебраїчного многочлена* $P_{2N}(t)$, *ортонормованого на* $[0,1]$ *з вагою* $d\mu(t)$.

У випадку міри

$$d\mu(t) = t^{\nu}(1-t)^{\sigma} dt, \nu, \sigma > -1$$

коефіцієнти степеневого розвинення функції вигляду (6) будуть дорівнювати

$$s_{k,m} = \int_0^1 t^{k+\nu}(1-t)^{m+\sigma} dt = \frac{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(m+\sigma+1)}{\Gamma(k+m+\nu+\sigma+2)}, k, m = \overline{0, \infty}.$$

Отже, побудована функція

$$f(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(m+\sigma+1)}{\Gamma(k+m+\nu+\sigma+2)}z^k w^m \tag{21}$$

буде частинним випадком гіпергеометричного ряду Аппеля

$$F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,z,w)=\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\alpha')_m(\beta)_k(\beta')_m}{(\gamma)_{k+m}k!m!}z^k w^m$$

(див. [15, с. 220, формула (8)]) при $\alpha=\nu+1$, $\alpha'=\sigma+1$, $\beta=\beta'=1$, $\gamma=\nu+\sigma+2$.

У цьому випадку многочлен $X_{N_1,N_2}(t)$ буде співпадати з точністю до сталого множника з ортонормованим зсунутим на $[0,1]$ многочленом Якобі $P^{(\nu,\sigma)*}_{N_1+N_2}(t)$ степеня N_1+N_2.

Враховуючи явний вираз для коефіцієнтів ортогональних многочленів Якобі (див. [13, с. 581, п.(22.3.3)]) (константу для зручності покладемо рівною 1)

$$P^{(\nu,\sigma)*}_{N_1+N_2}(t)=\sum_{m=0}^{N_1+N_2}(-1)^m\binom{N_1+N_2}{m}\frac{\Gamma(N_1+N_2+\nu+\sigma+1+m)}{\Gamma(\nu+1+m)}t^m, \tag{22}$$

$$p_j^{N_1+N_2}=(-1)^j\binom{N_1+N_2}{j}\frac{\Gamma(N_1+N_2+\nu+\sigma+1+j)}{\Gamma(\nu+1+j)},$$

для рядів вигляду (21) при $\nu\neq\sigma$ має місце такий результат.

Теорема 3. *Для гіпергеометричного ряду Аппеля*

$$f(z,w)=F_3(\alpha,\alpha',1,1,\gamma,z,w)=\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\alpha')_m}{(\gamma)_{k+m}}z^k w^m$$

при $\alpha=\nu+1,\ \alpha'=\sigma+1,\ \gamma=\nu+\sigma+2,\ \nu,\sigma>-1,\ \nu\neq\sigma$ *для будь-яких* $N_1,N_2\in\mathbb{N}$ *раціональна функція*

$$[\mathscr{N}/\mathscr{D}]_f^{(I)}(z,w)=\frac{P_{\mathscr{N}}^{(I)}(z,w)}{Q^{(I)}_{N_1,N_2}(z,w)},$$

де

$$Q^{(I)}_{N_1,N_2}(z,w) = w^{N_2}\sum_{j=1}^{N_1}(-1)^{N_1-j}\binom{N_1+N_2}{N_1-j}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2N_1+N_2+\nu+\sigma+1-j)}{\Gamma(N_1+\nu+1-j)}z^j + \sum_{n=0}^{N_2} w^n \sum_{k=0}^{n}(-1)^{N_1-k-n}\binom{N_2-k}{N_2-n}\times$$

$$\times\binom{N_1+N_2}{N_1+N_2-k}\frac{\Gamma(2N_1+2N_2+\nu+\sigma+1-k)}{\Gamma(N_1+N_2+\nu+1-k)},$$

$$P^{(I)}_{\mathscr{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{n=0}^{m}(-1)^{N_2-n}\sum_{r=N_2-n}^{N_2}(-1)^{N_1+r}\binom{N_1+N_2}{N_1+r}\times$$

$$\times\binom{r}{N_2-n}\frac{\Gamma(2N_1+N_2+\nu+\sigma+1+r)}{\Gamma(N_1+\nu+1+r)}\frac{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(m-n+\sigma+1)}{\Gamma(k+m-n+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{N_1+2N_2-1-m} z^k w^m \sum_{n=0}^{m}(-1)^{N_2-n}\sum_{r=N_2-n}^{N_2}(-1)^{N_1+r}\binom{N_1+N_2}{N_1+r}\times$$

$$\times\binom{r}{N_2-n}\frac{\Gamma(2N_1+N_2+\nu+\sigma+1+r)}{\Gamma(N_1+\nu+1+r)}\frac{\Gamma(N_1+k+\nu+1)\Gamma(m-n+\sigma+1)}{\Gamma(N_1+k+m-n+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{2N_1+N_2-1-k} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}(-1)^{N_1-j}\binom{N_1+N_2}{N_1-j}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2N_1+N_2+\nu+\sigma+1-j)}{\Gamma(N_1+\nu+1-j)}\frac{\Gamma(k-j+\nu+1)\Gamma(m+\sigma+1)}{\Gamma(k+m-j+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{2N_1+N_2-1-k} z^k w^m \sum_{n=0}^{N_2}(-1)^n\sum_{r=n}^{N_2}(-1)^{N_1+r}\binom{N_1+N_2}{N_1+r}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2N_1+N_2+\nu+\sigma+1+r)}{\Gamma(N_1+\nu+1+r)}\binom{r}{n}\frac{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(m+n+\sigma+1)}{\Gamma(k+m+n+\nu+\sigma+2)},$$

матиме розклад в степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (21) *для всіх* $(j,n)\in\mathscr{E}=\{(j,n)\in Z_+^2 : j+n\leqslant 2N_1+2N_2-1\}$.

У випадку, коли $\nu = \sigma$ многочлен $X_{N,N}(t)$ буде співпадати з точністю до сталого множника з ортонормованим зсунутим на $[0, 1]$ многочленом Гегенбауера $C_{2N}^{(\nu+\frac{1}{2})*}(t)$. Коефіцієнти цього многочлена можна обчислити зі співвідношення зв'язку з многочленом Якобі (див. [13, с. 584, п. (22.5.27)]):

$$C_N^{(\nu)}(t) = \frac{(2\nu)_N}{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)_N} P_N^{\left(\nu-\frac{1}{2},\nu-\frac{1}{2}\right)}(t).$$

Враховуючи (22), запишемо

$$P_{2N}^{(\nu,\nu)*}(t) = \sum_{m=0}^{2N} (-1)^m \binom{2N}{m} \frac{\Gamma(2N + 2\nu + 1 + m)}{\Gamma(\nu + 1 + m)} t^m.$$

Отже,

$$C_{2N}^{(\nu+\frac{1}{2})*}(t) = \frac{(2\nu + 1)_{2N}}{(\nu + 1)_{2N}} \sum_{m=0}^{2N} (-1)^m \binom{2N}{m} \frac{\Gamma(2N + 2\nu + 1 + m)}{\Gamma(\nu + 1 + m)} t^m.$$

Отримаємо в такому разі

$$p_j^{2N} = (-1)^j \frac{(2\nu + 1)_{2N}}{(\nu + 1)_{2N}} \binom{2N}{j} \frac{\Gamma(2N + 2\nu + 1 + j)}{\Gamma(\nu + 1 + j)}. \qquad (23)$$

Підставляючи (23) в (13), запишемо коефіцієнти $c_k^{(N)}$ в такому вигляді

$$c_k^{(N)} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma^2(2N + 2\nu + 1)}{\Gamma(2N + \nu + 1)}, & k=0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{2N}{j} \frac{(2\nu+1)_{2N}}{(\nu+1)_{2N}} \frac{(2k-j-1)!j}{k!(k-j)!} \frac{\Gamma(2N+2\nu+1+j)}{\Gamma(\nu+1+j)}, & k\geqslant 1. \end{cases} \qquad (24)$$

Отже, для рядів вигляду

$$f(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(m + \nu + 1)}{\Gamma(k + m + 2\nu + 2)} z^k w^m \qquad (25)$$

на основі теореми 2 можна побудувати раціональні апроксиманти Паде, а саме має місце такий результат.

Теорема 4. *Для гіпергеометричного ряду Аппеля*

$$f(z,w) = F_3(\alpha,\alpha',1,1,\gamma,z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\alpha')_m}{(\gamma)_{k+m}} z^k w^m$$

при $\alpha = \alpha' = \nu+1,\ \gamma = 2\nu+2,\ \nu > -1$ *для будь-якого* $N \in \mathbb{N}$ *раціональна функція*

$$[\mathscr{N}/\mathscr{D}]_f^{(II)}(z,w) = \frac{P_{\mathscr{N}}^{(II)}(z,w)}{Q_{N,N}^{(II)}(z,w)},$$

де

$$Q_{N,N}^{(II)}(z,w) = \frac{\Gamma^2(2N+2\nu+1)}{\Gamma(2N+\nu+1)} z^N w^N + \sum_{k=1}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k} w^{N-k}.$$

$$P_{\mathscr{N}}^{(II)}(z,w) = \sum_{r=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} z^r w^m \sum_{k=N-r}^{N} c_k^{(N)} \frac{\Gamma(r-N+k+\nu+1)\Gamma(m-N+k+\nu+1)}{\Gamma(r+m-2N+2k+2\nu+2)} +$$

$$+z^N \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{3N-1-m} z^r w^m \sum_{k=1}^{N} c_k^{(N)} \frac{\Gamma(r+k+\nu+1)\Gamma(m-N+k+\nu+1)}{\Gamma(r+m-N+2k+2\nu+2)} +$$

$$+w^N \sum_{r=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-r} z^r w^m \sum_{k=1}^{N} c_k^{(N)} \frac{\Gamma(r-N+k+\nu+1)\Gamma(m+k+\nu+1)}{\Gamma(r+m-N+2k+2\nu+2)},$$

де $c_k^{(N)}$ *мають вигляд* (24), *матиме розклад в степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду* (25) *для всіх* $(j,n) \in \mathscr{E} = \{(j,n) \in Z_+^2 : j+n \leqslant 4N-1\}$.

Щоб проілюструвати результат теореми 4, розглянемо частинний випадок ряду (25) при $\nu = 0$. Тоді функція f матиме вигляд

$$f(z,w) = \frac{\ln((1-z)(1-w))}{zw-w-z}. \tag{26}$$

Покладемо $N = 2$. За теоремою 4 отримаємо раціональну функцію

$$\frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{2,2}(z,w)} = \big(1680 + 840(z+w) + 560(z^2+w^2) - 200zw +$$
$$+ 420(z^3+w^3) - 100(z^2w+zw^2) + 336(z^4+w^4) - 76(z^3w+zw^3) +$$
$$+ 280(z^5+w^5) - 64(z^4w+zw^4) + 240(z^6+w^6) - 56(z^5w+zw^5) +$$
$$+ 210(z^7+w^7) - 50(z^6w+zw^6)\big) \cdot (24z^2w^2 - 480zw + 1680)^{-1}.$$

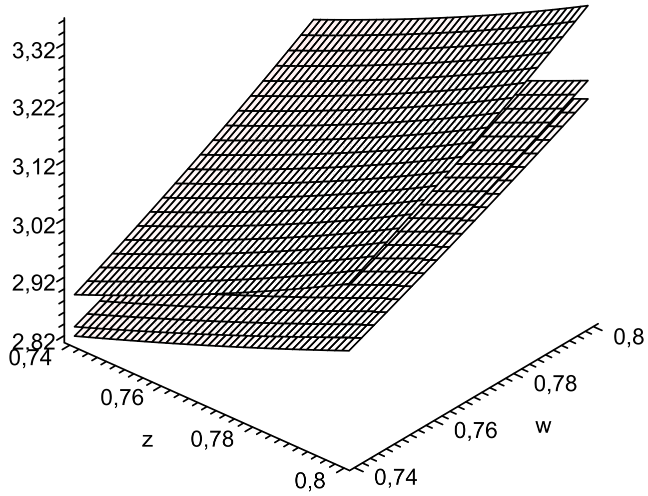
Наведемо порівняльну таблицю, в яку для кожного значення змінної в перший рядок запишемо значення наближуваної функції (26), в другий — частинної суми степеневого ряду

$$P_7(z,w) = 1 + \frac{1}{2}(z+w) + \frac{1}{3}(z^2+w^2) + \frac{1}{6}zw + \frac{1}{4}(z^3+w^3) + \frac{1}{12}(z^2w+zw^2) +$$
$$+ \frac{1}{5}(z^4+w^4) + \frac{1}{20}(z^3w+zw^3) + \frac{1}{30}z^2w^2 + \frac{1}{6}(z^5+w^5) + \frac{1}{30}(z^4w+zw^4) +$$
$$+ \frac{1}{60}(z^3w^2+z^2w^3) + \frac{1}{7}(z^6+w^6) + \frac{1}{42}(z^5w+zw^5) + \frac{1}{105}(z^4w^2+z^2w^4) +$$
$$+ \frac{1}{140}z^3w^3 + \frac{1}{8}(z^7+w^7) + \frac{1}{56}(z^6w+zw^6) + \frac{1}{168}(z^5w^2+z^2w^5) +$$

$+\frac{1}{280}(z^4w^3+z^3w^4)$, в третій — побудованої апроксиманти.

w\z	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
0.0	1	1.115717756	1.277064060	1.527151220	2.011797390
	1	1.115717409	1.276949943	1.523044343	1.941530209
	1	1.115717410	1.276949943	1.523044343	1.941530210
0.2	1.115717756	1.239686396	1.411479183	1.675638651	2.181644599
	1.115717409	1.239685579	1.411356601	1.671363261	2.109533485
	1.115717410	1.239685865	1.411376479	1.671735409	2.112634759
0.4	1.277064060	1.411479183	1.596330075	1.877784679	2.409390381
	1.276949943	1.411356601	1.596062597	1.873147658	2.334971366
	1.276949943	1.411376479	1.596149340	1.874023685	2.341741096
0.6	1.527151220	1.675638651	1.877784679	2.181644599	2.745357222
	1.523044343	1.671363261	1.873147658	2.172121327	2.663451627
	1.523044343	1.671735409	1.874023685	2.174752740	2.676199310
0.8	2.011797390	2.181644599	2.409390381	2.745357222	3.352995652
	1.941530209	2.109533485	2.334971366	2.663451627	3.193274881
	1.941530210	2.112634759	2.341741096	2.676199310	3.224728471

Відповідний графік матиме вигляд



Покладемо тепер $N = 3$. Отримаємо раціональну функцію

$$
\begin{gathered}
\frac{P_{\mathscr{N}}(z,w)}{Q_{3,3}(z,w)} = \big(-665280 - 332640(z+w) - 221760(z^2+w^2) + 161280zw - \\
-166320(z^3+w^3) + 80640(z^2w+zw^2) - 133056(z^4+w^4) + 57456(z^3w+ \\
+zw^3) - 7056z^2w^2 - 110880(z^5+w^5) + 45864(z^4w+zw^4) - 3528(z^3w^2+ \\
+z^2w^3) - 95040(z^6+w^6) + 38592(z^5w+zw^5) - 2808(z^4w^2+z^2w^4) - \\
-83160(z^7+w^7) + 33480(z^6w+zw^6) - 2448(z^5w^2+z^2w^5) - 73920(z^8+ \\
+w^8) + 29640(z^7w+zw^7) - 2208(z^6w^2+z^2w^6) - 66528(z^9+w^9) + \\
+26628(z^8w+zw^8) - 2028(z^7w^2+z^2w^7) - 60480(z^{10}+w^{10}) + 24192(z^9w+ \\
+zw^9) - 1884(z^8w^2+z^2w^8) - 55440(z^{11}+w^{11}) + 22176(z^{10}w+zw^{10}) - \\
-1764(z^9w^2+z^2w^9)\big) \cdot (720z^3w^3 - 30240z^2w^2 + 272160zw - 665280)^{-1}.
\end{gathered}
$$

Наведемо таблицю, в перший рядок якої записано значення наближуваної функції (26), в другий — частинної суми степеневого ряду

$$P_{11}(z,w) = 1+\frac{1}{2}(z+w)+\frac{1}{3}(z^2+w^2)+\frac{1}{6}zw+\frac{1}{4}(z^3+w^3)+\frac{1}{12}(z^2w+zw^2)+$$
$$+\frac{1}{5}(z^4+w^4)+\frac{1}{20}(z^3w+zw^3)+\frac{1}{30}z^2w^2+\frac{1}{6}(z^5+w^5)+\frac{1}{30}(z^4w+zw^4)+$$
$$+\frac{1}{60}(z^3w^2+z^2w^3)+\frac{1}{7}(z^6+w^6)+\frac{1}{42}(z^5w+zw^5)+\frac{1}{105}(z^4w^2+z^2w^4)+$$
$$+\frac{1}{140}z^3w^3+\frac{1}{8}(z^7+w^7)+\frac{1}{56}(z^6w+zw^6)+\frac{1}{168}(z^5w^2+z^2w^5)+\frac{1}{280}(z^4w^3+$$
$$+z^3w^4)+\frac{1}{9}(z^8+w^8)+\frac{1}{72}(z^7w+zw^7)+\frac{1}{252}(z^6w^2+z^2w^6)+\frac{1}{504}(z^5w^3+$$
$$+z^3w^5)+\frac{1}{630}z^4w^4+\frac{1}{10}(z^9+w^9)+\frac{1}{90}(z^8w+zw^8)+\frac{1}{360}(z^7w^2+z^2w^7)+$$
$$+\frac{1}{840}(z^6w^3+z^3w^6)+\frac{1}{1260}(z^5w^4+z^4w^5)+\frac{1}{11}(z^{10}+w^{10})+\frac{1}{110}(z^9w+$$
$$+zw^9)+\frac{1}{495}(z^8w^2+z^2w^8)+\frac{1}{1320}(z^7w^3+z^3w^7)+\frac{1}{2310}(z^6w^4+z^4w^6)+$$
$$+\frac{1}{2772}z^5w^5+\frac{1}{12}(z^{11}+w^{11})+\frac{1}{132}(z^{10}w+zw^{10})+\frac{1}{660}(z^9w^2+z^2w^9)+$$
$$+\frac{1}{1980}(z^8w^3+z^3w^8)+\frac{1}{3960}(z^7w^4+z^4w^7)+\frac{1}{5544}(z^6w^5+z^5w^6),$$

в третій — побудованої апроксиманти.

w\z	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
0.0	1	1.115717756	1.277064060	1.527151220	2.011797390
	1	1.115717755	1.277062003	1.526770377	1.990512901
	1	1.115717756	1.277062003	1.526770376	1.990512903
0.2	1.115717756	1.239686396	1.411479183	1.675638651	2.181644599
	1.115717755	1.239686395	1.411477036	1.675247520	2.159977487
	1.115717756	1.239686395	1.411477464	1.675290370	2.161129002
0.4	1.277064060	1.411479183	1.596330075	1.877784679	2.409390381
	1.277062003	1.411477036	1.596325545	1.873147658	2.387302302
	1.277062003	1.411477464	1.596327293	1.877468720	2.389704511
0.6	1.527151220	1.675638651	1.877784679	2.181644599	2.745357222
	1.526770377	1.675247520	1.873147658	2.180810211	2.722370778
	1.526770376	1.675290370	1.877468720	2.181083266	2.726325075
0.8	2.011797390	2.181644599	2.409390381	2.745357222	3.352995652
	1.990512901	2.159977487	2.387302302	2.722370778	3.306828505
	1.990512903	2.161129002	2.389704511	2.726325075	3.317370936

Наведені приклади показують, що побудовані на основі теореми 4 раціональні апроксиманти наближають функцію (26) краще за частинну суму степеневого ряду з такою ж кількістю вільних коефіцієнтів.

1. *Голуб А.П., Чернецька Л.О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. — Прийнято до друку.
2. *Голуб А.П., Чернецька Л.О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде деяких рядів Гумберта // Укр. мат. журн. — Прийнято до друку.
3. *Alabiso C., Butera P.* N-variable rational approximants and method of moments // J. Math. Phys. — 1975. — **16**, №4. — P. 840 – 845.
4. *Cuyt A.* How well can the concept of Padé approximant be generalized to the multivariate case? // J. Comput. Appl. Math. — 1999. — **105**, №1 – 2. — P. 25 – 50.
5. *Hughes Jones R.* General rational approximants in N variables // J. Approx. Theory. — 1976. — **16**. — P. 201 – 233.
6. *Lutterodt C.* A two-dimensional analogue of Padé approximant theory // J. Phys. A. : Math. — 1974. — **7**. — P. 1027 – 1037.
7. *Zhou P.* Explicit construction for multivariate Padé approximants // J. Comput. Appl. Math. — 1997. — **79**. — P. 1 – 17.
8. *Cuyt A., Driver K., Tan J., Verdonk B.* Exploring multivariate Padé approximants for multiple hypergeometric series // Adv. Comput. Math. — 1999. — **10**, №1. — P. 29 – 49.
9. *Cuyt A., Tan J., Zhou P.* General order multivariate Padé approximants for pseudo-multivariate functions // Math. Comput. — 2006. — **75**, №254. — P. 727 – 741.
10. *Borwein P.B., Cuyt A., Zhou P.* Explicit construction of general multivariate Padé approximants to an Appell function // Adv. Comput. Math. — 2005. — **22**, №3. — P. 249 – 273.
11. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1979. — 416 с.
12. *Голуб А.П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — К.: Ін-т математики НАНУ, 2002. — 222 с.
13. Справочник по специальным функциям. Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
14. *Дзядык В.К.* Обобщённая проблема моментов и аппроксимация Паде // Укр. мат. журн. — 1983. — **35**, №3. — С. 297 – 302.
15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1973. — 296 с.