Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, Т.10, №1, 28-38

УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Днепропетровский университет имени Альфреда Нобеля)
А. В. Швачко (Днепропетровский государственный аграрный университет)

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ В СРЕДНЕМ С ВЕСОМ ЧЕБЫШЕВА - ЭРМИТА АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ НА ВСЕЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Exact inequalities of Jackson type for the best polynomial approximation of functions in the space $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ with the Chebyshev -Hermite weight function have been obtained for the m^{th} order generalized moduluses of continuity $\widetilde{\omega}_m, m \in \mathbb{N}$, at the classes $L^r_{2,\rho}(\mathbb{R}), r \in \mathbb{N}$.

Для наилучших полиномиальных приближений функций в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ с весовой функцией Чебышева - Эрмита на классах $L^r_{2,\rho}(\mathbb{R}), r \in \mathbb{N}$, получены точные неравенства типа Джексона для обобщенных модулей непрерывности m-го порядка $\widetilde{\omega}_m, m \in \mathbb{N}$.

1. Пусть $L_2(\mathbb{R})$ — пространство измеримых функций, суммируемых на вещественной оси $\mathbb{R} := \{x : -\infty < x < \infty\}$ с квадратом модуля. Через $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, где $\rho(x) := \exp(-x^2/2)$, обозначим множество функций f таких, что $f \cdot \rho \in L_2(\mathbb{R})$. Норма в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ определяется равенством

$$\|f\|_{2,\rho} := \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)\rho(x)|^2 dx \right\}.$$

Различные аспекты наилучшего приближения функций в среднем с весом Чебышева - Эрмита алгебраическими полиномами на всей вещественной оси в разное время исследовались в работах С.З. Рафальсона [1], Г. Фройда [2], В.А. Абилова [3], В.М. Федорова [4], В.А. Абилова и Ф.В. Абиловой [5] и других (см., например, [6 – 8]). Данная статья продолжает указанную тематику и посвящена вычислению точных констант в неравенствах типа Джексона в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

Обозначим через

$$E_n(f) := \inf\{\|f - p_n\|_{2,\rho} : p_n \in \mathcal{P}_n\}$$

наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ подпространством алгебраических полиномов $\mathcal{P}_n$ степени, не превосходящей n, в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

Пусть $\{H_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ — ортонормированная на прямой $\mathbb{R}$ с весом ρ^2 система многочленов Эрмита (см., например, [9]), где

$$H_k(x) := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}}\ e^{x^2}\ \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\ e^{-x^2}.$$

Произвольную функцию $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ представим в виде ряда Фурье по ортонормированным полиномам Эрмита

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) H_k(x), \tag{1}$$

где равенство понимается в смысле сходимости по норме в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, а

$$c_k(f) := \int\limits_{\mathbb{R}} \rho^2(x) f(x) H_k(x) dx \quad (k \in \mathbb{Z}_+)$$

есть коэффициенты Фурье - Эрмита функции f. Частную сумму n-го порядка ряда Фурье - Эрмита (1) функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ обозначим через $S_n(f,x)$, т.е.

$$S_n(f,x) := \sum_{k=0}^{n} c_k(f) H_k(x).$$

При этом (см., например, [1])

$$E_n(f)_{2,\rho} = \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{2}$$

В пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ рассмотрим введенный С.З. Рафальсоном в работе [1] оператор обобщенного сдвига

$$F_h(f,x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(x\sqrt{1-h^2}+ht\right)\rho^2(t)dt, \tag{3}$$

где $|h| \leqslant 1$. Отметим, что оператор $F_h : L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \to L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ обладает следующими свойствами [5]:

1. $F_h(f_1+f_2) = F_h(f_1) + F_h(f_2)$,
2. $F_h(\lambda f) = \lambda F_h(f)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. $F_0(f) \equiv f$,
4. $\|F_h(f)\|_{2,\rho} \leqslant \|f\|_{2,\rho}$,
5. $\|F_h - f\|_{2,\rho} \to 0$, если $h \to 0+0$,
6. $F_h(H_k,x) = \left(1-h^2\right)^{k/2} H_k(x)$.

Используя оператор обобщенного сдвига (3), запишем в определенном смысле аналоги конечных разностей первого и высших порядков для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ в точке x с шагом h:

$$\Delta_h^1(f,x) := F_h(f,x) - f(x) = (F_h - \mathbb{I})f(x), \tag{4}$$

$$\Delta_h^m(f,x) := \Delta_h^1\left(\Delta_h^{m-1}(f),x\right) = (F_h-\mathbb{I})^m f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k} F_h^k(f,x),$$

где $m = 2,3,...$; $\mathbb{I}$ — единичный оператор в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$; $F_h^k(f) := F_h^1(F_h^{k-1}(f))$; $F_h^1(f) := F_h(f)$; $F_h^0(f) \equiv f$. В работе [1] было показано, что в смысле сходимости по норме в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ для функции (3) справедливо равенство

$$F_h(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\left(1-h^2\right)^{k/2} H_k(x). \tag{5}$$

Из формулы (5), с учетом соотношений (1) и (4), получаем, в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, следующее разложение функции $\Delta_h^1(f)$ в ряд Фурье по ортонормированным полиномам Эрмита:

$$\Delta_h^1(f,x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)\left[\left(1-h^2\right)^{k/2}-1\right]H_k(x). \tag{6}$$

Используя метод математической индукции и формулу (6), для функции $\Delta_h^m(f)$, где $m=2,3,...$, запишем

$$\Delta_h^m(f,x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)\left[\left(1-h^2\right)^{k/2}-1\right]^m H_k(x). \tag{7}$$

В силу равенства Парсеваля для ортонормированной системы функций, из соотношения (7) получаем

$$\|\Delta_h^m(f)\|_{2,\rho}^2=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2(f)\left[1-\left(1-h^2\right)^{k/2}\right]^{2m}. \tag{8}$$

Согласно результатам В.А. Абилова и Ф.В. Абиловой, изложенным в [5], величину

$$\widetilde{\omega}_m(f,t)_{2,\rho}:=\sup\{\|\Delta_h^m(f)\|_{2,\rho}:|h|\leqslant t\}, \tag{9}$$

где $m\in\mathbb{N}; 0<t\leqslant 1$, будем называть обобщенным модулем непрерывности m-го порядка функции $f\in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Следует отметить, что в случае $m=1$ характеристика $\Delta_h^1(f)$ рассматривалась ранее в работе [1] для функций из пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Учитывая вид правой части формулы (8), для произвольной функции $f\in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ из равенства (9) получаем

$$\widetilde{\omega}_m(f,t)_{2,\rho}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2(f)\left[1-\left(1-t^2\right)^{k/2}\right]^{2m}\right\}^{1/2}, \tag{10}$$

где $0<t\leqslant 1$. Через $L_{2,\rho}^r(\mathbb{R}), r\in\mathbb{N}$, обозначим класс функций $f\in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$–го порядка абсолютно

непрерывны на любом конечном интервале вещественной оси, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. При этом $f^{(0)} \equiv f$.Несложно показать, что если произвольная функция f принадлежит классу $L^r_{2,\rho}(\mathbb{R})$, где $r \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, то и все её промежуточные производные порядков $r-\mu(1 \leqslant \mu \leqslant r-1)$, также являются элементами пространства $L^r_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

В работе [8] было показано, что имеет место следующее равенство

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\(n\geqslant r)}} \sup_{\substack{f\in L^r_{2,\rho}(\mathbb{R})\\ f\notin\mathcal{P}_r}} \frac{2^{r/2}[(n+1)n...(n-r+2)]^{1/2}E_n(f)_{2,\rho}}{\widetilde{\omega}_m(f^{(r)},1/\sqrt{n-r+1})_{2,\rho}} = \frac{1}{(1-e^{-1/2})^m}.$$

2. Напомним, что относительно оценок сверху величин наилучших полиномиальных приближений 2π-периодических функций через значения их модулей непрерывности в некоторых точках, зависящих от порядков аппроксимирующих тригонометрических полиномов, Н.И.Черных в работе [10] отмечал следующее: поскольку функционал

$$\left\{\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_1^2(f,t)\sin(nt)dt\right\}^{1/2},$$

где $\omega_1(f,t)$ — модуль непрерывности первого порядка 2π-периодической функции $f \in L_2 := L_2([0,2\pi])$, меньше джексоновского функционала $\omega_1(f,\pi/n)$, $f \not\equiv const$, то, по-видимому, он более естественен для характеристик наилучших полиномиальных приближений периодических функций в L_2. Аналогичную картину можно наблюдать и в рассматриваемом нами случае. Если, например, при некотором $\tau \in (0,1]$ имеем $\int\limits_0^\tau \varphi(t)dt \leqslant 1$, где φ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,\tau]$ функция, которая не эквивалентна нулю, то очевидно, что функционал

$$\left\{\int\limits_0^\tau \widetilde{\omega}_m^q(f,t)_{2,\rho}\varphi(t)dt\right\}^{1/q},$$

будет меньше величины $\widetilde{\omega}_m(f,\tau)_{2,\rho}$. Здесь функция f принадлежит пространству $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ и не эквивалентна нулю, а $0<q<\infty$.

3. В связи со сказанным, с нашей точки зрения, определенный интерес представляет следующая ниже теорема 1. Прежде, чем её сформулировать, отметим, что всюду далее отношение 0/0 полагаем равным 0.

Теорема 1 . *Пусть* $r,\mu,n,m\in\mathbb{N}$ *и* $\mu\leqslant r\leqslant n; 0<q\leqslant 2; 0<\tau\leqslant 1$; φ — *неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0,\tau]$ *функция, не эквивалентная нулю. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L^r_{2,\rho}(\mathbb{R})\\ f\notin\mathcal{P}_r}}\frac{2^{\mu/2}[(n+1-r+\mu)(n-r+\mu)...(n-r+2)]^{1/2}E_{n-r+\mu}(f^{(r-\mu)})_{2,\rho}}{\left\{\int\limits_0^\tau\widetilde{\omega}^q_m(f^{(r)},t)_{2,\rho}\varphi(t)dt\right\}^{1/q}}=$$

$$=\left\{\int\limits_0^\tau\left(1-(1-t^2)^{(n+1-r)/2}\right)^{mq}\varphi(t)dt\right\}^{-1/q}. \qquad (11)$$

Доказательство. Приведем в удобной для нас форме один из результатов С.З. Рафальсона, полученный им в работе [1]: *функция* f, *принадлежащая классу* $L^r_{2,\rho}(\mathbb{R})$ *имеет разложение её* s*-той производной* $f^{(s)}(s\in\mathbb{N}$ *и* $s\leqslant r)$, *в ряд Фурье по ортонормированной системе полиномов Эрмита*

$$f^{(s)}(x)=\sum_{j=s}^{\infty}c_j(f)2^{s/2}[j(j-1)...(j-s+1)]^{1/2}H_{j-s}(x), \qquad (12)$$

где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

Исходя из формулы (12) и определения коэффициентов Фурье - Эрмита, запишем для произвольного числа $k\in\mathbb{Z}_+$ следующие равенства:

$$c_k(f^{(s)})=\int\limits_{\mathbb{R}}\rho^2(x)f^{(s)}(x)H_k(x)dx=c_{k+s}(f)2^{s/2}[(k+s)(k+s-1)...(k+1)]^{1/2}.$$

Полагая $s:=r-\mu$, отсюда имеем

$$c_{k+r-\mu}(f)=\frac{c_k(f^{(r-\mu)})}{2^{(r-\mu)/2}[(k+r-\mu)(k+r-\mu-1)...(k+1)]^{1/2}}.$$

После соответствующей замены индексов в последнем равенстве получаем

$$c_j(f)=\frac{c_{j-r+\mu}(f^{(r-\mu)})}{2^{(r-\mu)/2}[j(j-1)...(j-r+\mu+1)]^{1/2}}, \tag{13}$$

где $j=r-\mu, r-\mu+1,\ldots$. Используя формулу (12), в которой полагаем $s:=r$, а также свойство 6 оператора обобщенного сдвига F_h и равенство (10), запишем

$$\widetilde{\omega}_m(f^{(r)},t)=\left\{\sum_{k=r}^{\infty}c_k^2(f)2^r k(k-1)...(k-r+1)\Big[1-(1-t^2)^{\frac{k-r}{2}}\Big]^{2m}\right\}^{1/2}. \tag{14}$$

Далее нам понадобится один упрощенный вариант неравенства Минковского, приведенный в монографии А. Пинкуса (см., [11, с. 104]):

$$\left\{\int_0^{\tau}\left[\sum_{k=l}^{\infty}\left|\widetilde{f}_k(t)\right|^2\right]^{q/2}dt\right\}^{1/q}\geqslant\left\{\sum_{k=l}^{\infty}\left[\int_0^{\tau}\left|\widetilde{f}_k(t)\right|^q dt\right]^{2/q}\right\}^{1/2}.$$

Полагая $\widetilde{f}_k:=f_k\varphi^{1/q}$, из данного неравенства получаем

$$\left\{\int_0^{\tau}\left[\sum_{k=l}^{\infty}|f_k(t)|^2\right]^{q/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/q}\geqslant\left\{\sum_{k=l}^{\infty}\left[\int_0^{\tau}|f_k(t)|^q\varphi(t)dt\right]^{2/q}\right\}^{1/2}. \tag{15}$$

Используя неравенство (15), а также соотношения (2) и (13) – (14), для произвольной функции $f\in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R})$ запишем

$$\left\{\int_0^{\tau}\widetilde{\omega}_m^q(f^{(r)},t)_{2,\rho}\varphi(t)dt\right\}^{1/q}=\left\{\int_0^{\tau}\left(\widetilde{\omega}_m^2(f^{(r)},t)_{2,\rho}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/q}\geqslant$$

$$\geqslant\left\{\int_0^{\tau}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k^2(f)2^r k(k-1)...(k-r+1)\Big(1-(1-t^2)^{\frac{k-r}{2}}\Big)^{2m}\right]^{q/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/q}=$$

$$= \left\{\int\limits_0^\tau \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} c_{k-r+\mu}^2(f^{(r-\mu)})2^\mu(k-r+\mu)(k-r+\mu-1)...(k-r+1)\left(1-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-(1-t^2)^{(k-r)/2}\right)^{2m}\right]^{q/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/q} \geqslant$$

$$\geqslant \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} c_{k-r+\mu}^2(f^{(r-\mu)})2^\mu(k-r+\mu)(k-r+\mu-1)...(k-r+1)\left[\int\limits_0^\tau \left(1-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-(1-t^2)^{(k-r)/2}\right)^{mq}\varphi(t)dt\right]^{2/q}\right\}^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant 2^{\mu/2}[(n+1-r+\mu)(n-r+\mu)...(n-r+2)]^{1/2}E_{n-r+\mu}(f^{(r-\mu)})\times$$

$$\times\left\{\int\limits_0^\tau \left(1-(1-t^2)^{(n+1-r)/2}\right)^{mq}\varphi(t)dt\right\}^{1/q}.$$

Из данного неравенства следует оценка сверху

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R})\\ f\notin\mathcal{P}_r}} \frac{2^{\mu/2}[(n+1-r+\mu)(n-r+\mu)...(n-r+2)]^{1/2}E_{n-r+\mu}(f^{(r-\mu)})_{2,\rho}}{\left\{\int\limits_0^\tau \widetilde{\omega}_m^q(f^{(r)},t)_{2,\rho}\varphi(t)dt\right\}^{1/q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int\limits_0^\tau \left(1-(1-t^2)^{(n+1-r)/2}\right)^{mq}\varphi(t)dt\right\}^{-1/q}. \qquad (16)$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, расположенной в левой части формулы (16), рассмотрим функцию $f_0(x) := H_{n+1}(x)$, которая принадлежит классу $L_{2,\rho}^r(\mathbb{R})$. Поскольку в силу формулы (12), в которой полагаем $s := r-\mu$, имеет место равенство

$$f_0^{(r-\mu)}(x) = 2^{(r-\mu)/2}[(n+1)n...(n-r+\mu+2)]^{1/2}H_{n+1-r+\mu}(x), \quad (17)$$

то из формулы (2) получаем

$$E_{n-r+\mu}(f_0^{(r-\mu)})_{2,\rho} = 2^{(r-\mu)/2}[(n+1)n...(n-r+\mu+2)]^{1/2}. \qquad (18)$$

Используя равенство (17), в котором полагаем $\mu := 0$, а также формулу (10), имеем

$$\widetilde{\omega}_m(f_0^{(r)}, t)_{2,\rho} = 2^{r/2}[(n+1)n...(n-r+2)]^{1/2}\left\{1-(1-t^2)^{(n+1-r)/2}\right\}^m.$$

Возводя обе части данного равенства в степень q, затем умножая их на функцию φ и интегрируя по переменной t в пределах от 0 до τ, получаем

$$\int\limits_0^\tau \widetilde{\omega}_m^q(f_0^{(r)}, t)_{2,\rho}\varphi(t)dt =$$

$$= 2^{rq/2}[(n+1)n...(n-r+2)]^{q/2}\int\limits_0^\tau \left(1-(1-t^2)^{(n+1-r)/2}\right)^{mq}\varphi(t)dt. \qquad (19)$$

Используя формулы (18) – (19), запишем оценку снизу рассматриваемой экстремальной характеристики

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R})\\ f\notin\mathcal{P}_r}} \frac{2^{\mu/2}[(n+1-r+\mu)(n-r+\mu)...(n-r+2)]^{1/2}E_{n-r+\mu}(f^{(r-\mu)})_{2,\rho}}{\left\{\int\limits_0^\tau \widetilde{\omega}_m^q(f^{(r)}, t)_{2,\rho}\varphi(t)dt\right\}^{1/q}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2^{\mu/2}[(n+1-r+\mu)(n-r+\mu)...(n-r+2)]^{1/2}E_{n-r+\mu}(f_0^{(r-\mu)})_{2,\rho}}{\left\{\int\limits_0^\tau \widetilde{\omega}_m^q(f_0^{(r)}, t)_{2,\rho}\varphi(t)dt\right\}^{1/q}} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^\tau \left(1-(1-t^2)^{(n+1-r)/2}\right)^{mq}\varphi(t)dt\right\}^{-1/q}. \qquad (20)$$

Сопоставляя оценку сверху (16) с оценкой снизу (20), получаем требуемые равенства (11), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

В заключение продемонстрируем один частный случай, вытекающий из соотношения (11). Пусть $q := 1/m$ и $\varphi(t) \equiv t$. Тогда

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R})\\ f\notin\mathcal{P}_r}} \frac{2^{\mu/2}[(n+1-r+\mu)(n-r+\mu)...(n-r+2)]^{1/2}E_{n-r+\mu}(f^{(r-\mu)})_{2,\rho}}{\left\{\int\limits_0^\tau \widetilde{\omega}_m^{1/m}(f^{(r)},t)_{2,\rho}tdt\right\}^m} =$$

$$= \left\{\frac{\tau^2}{2} - \frac{1-(1-\tau^2)^{(n+3-r)/2}}{n+3-r}\right\}^{-m},$$

где $r, \mu, n, m \in \mathbb{N}$ и $\mu \leqslant r \leqslant n; 0 < \tau \leqslant 1$. Полагая в этом равенстве $\tau := \sqrt{2/(n+3-r)}$, имеем

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R})\\ f\notin\mathcal{P}_r}} \frac{2^{\mu/2}[(n+1-r+\mu)(n-r+\mu)...(n-r+2)]^{1/2}E_{n-r+\mu}(f^{(r-\mu)})_{2,\rho}}{\left\{(n+3-r)\int\limits_0^{\sqrt{2/(n+3-r)}} \widetilde{\omega}_m^{1/m}(f^{(r)},t)_{2,\rho}tdt\right\}^m} =$$

$$= \left(1 - \frac{2}{n+3-r}\right)^{-(n+3-r)m/2}.$$

Переходя в обеих частях данного равенства к пределу при n, стремящемся к ∞, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R})\\ f\notin\mathcal{P}_r}} \frac{2^{\mu/2}[(n+1-r+\mu)(n-r+\mu)...(n-r+2)]^{1/2}E_{n-r+\mu}(f^{(r-\mu)})_{2,\rho}}{\left\{(n+3-r)\int\limits_0^{\sqrt{2/(n+3-r)}} \widetilde{\omega}_m^{1/m}(f^{(r)},t)_{2,\rho}tdt\right\}^m} = e^m.$$

1. *Рафальсон С.З.* О приближении функций в среднем суммами Фурье–Эрмита // Изв. вузов. Матем. — 1968. — №7. — С. 78 – 84.
2. *Фройд Г.* Об аппроксимации с весом алгебраическими многочленами на действительной оси // Докл. АН СССР. — 1970. — **191**, №2. — С. 293 – 294.
3. *Абилов В.А.* О порядке приближения непрерывных функций арифметическими средними частных сумм ряда Фурье-Эрмита // Изв. вузов. Матем. — 1972. — №3. — С. 3 – 9.

4. *Федоров В.М.* Приближение алгебраическими многочленами с весом Чебышева–Эрмита // Изв. вузов. Матем. — 1984. — №6. — С. 55 – 63.

5. *Абилов М.В., Абилова Ф.В.* Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье–Эрмита в пространстве $L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$ // Изв. вузов. Матем. — 2006. — №1. — С. 3 – 12.

6. *Алексеев Д.В.* Приближение полиномами с весом Чебышева–Эрмита на действительной оси // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем. Механ. — 1997. — №6. — С. 68 – 71.

7. *Ditzian Z., Totik V.* K-functionals and best polynomial approximation in weighted space $L^p(\mathbb{R})$ // J. Approxim. Theory. — 1986. — **46**, №1. — P. 38 – 41.

8. *Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б.* О приближении функций алгебраическими полиномами в среднем на вещественной оси с весом Чебышева–Эрмита // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Серія матем. Вип. 16. — 2011. — **19**, №6/1. — С. 28 – 31.

9. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. Изд. 3-е. — М. : Физматлит, 2007. — 480 с.

10. *Черных Н.И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. — 1967. — **2**, №5. — С. 513 – 522.

11. *Pinkus A.* n-Widths in Approximation Theory. — New York: Springer–Verlag, 1985. — 290 p.