

*О. А. Кадубовський*

*ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»,  
м. Слов'янськ  
kadubovs@ukr.net*

## **Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях**

We consider two classes of smooth functions with three critical values on smooth closed surface of genus  $g \geq 1$ , that possess only one (degenerate) saddle critical point in addition to  $k$  local maxima and  $l$  local minima. Namely:  $C_{k,l}(M_g)$  is the class of such functions on oriented surface  $M_g$  and  $C_{k,l}(N_g)$  — on non-oriented surface  $N_g$ . In this paper we calculate the number of topologically non-equivalent (minimal) functions from the class  $C_{1,1}(M_g)$  for all  $g \geq 1$  and from the class  $C_{1,1}(N_g)$  for  $g = 5, 6$ . Asymptotic estimate for number of topologically non-equivalent functions from the class  $C_{1,1}(N_g)$  (as  $g \rightarrow \infty$ ) are also established.

Мы рассматриваем два класса гладких функций с тремя критическими значениями на гладкой замкнутой поверхности рода  $g \geq 1$ , которые в дополнение к  $k$  локальным максимумам и  $l$  локальным минимумам имеют только одну (вырожденную) седловую критическую точку. Пусть  $C_{k,l}(M_g)$  — класс таких функций на ориентированной поверхности  $M_g$ , соответственно  $C_{k,l}(N_g)$  — на неориентированной поверхности  $N_g$ . В данной работе подсчитано число топологически неэквивалентных (минимальных) функций из класса  $C_{1,1}(M_g)$  для всех  $g \geq 1$ , а из класса  $C_{1,1}(N_g)$  — для  $g = 5, 6$ . Также приведены асимптотические оценки для числа топологически неэквивалентных функций из класса  $C_{1,1}(N_g)$  при  $g \rightarrow \infty$ .

## ВСТУП

Нехай  $(F, \partial F)$  — гладка поверхня з межею  $\partial F$  ( $\partial F$  може бути порожньою). Через  $C^\infty(F)$  позначимо простір нескінченно диференційовних функцій на  $F$  з межею  $\partial F = \partial_- F \cup \partial_+ F$ , всі критичні точки яких ізольовані та лежать у внутрішності  $F$ , а на компоненті зв'язності межі  $\partial_- F$  ( $\partial_+ F$ ) функції набувають однакового значення  $a$  (відповідно  $b$ ).

Функції  $f_1$  та  $f_2$  з простору  $C^\infty(F)$  називають *топологічно еквівалентними*, якщо існують гомеоморфізми  $h: F \mapsto F$  і  $h': \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  такі, що  $f \cdot h = h' \cdot g$ . Всюди в подальшому будемо вважати, що гомеоморфізм  $h'$  зберігає орієнтацію. Коли  $h$  зберігає орієнтацію, функції  $f_1$  та  $f_2$  будемо називати *О-топологічно еквівалентними*.

Нехай далі  $x_i \in F$  — ізольована критична точка (що не є локальним екстремумом) функції  $f \in C^\infty(F)$ . В [1] О. О. Прип'яком доведено, що якщо топологічний тип ліній рівня функції  $f \in C^\infty(F)$  при переході через  $x_i$  змінюється (не змінюється), то в деякому околі  $U_i$  точки  $x_i$  неперервною заміною координат функція  $f$  зводиться до виду  $f = \text{Re}z^{n_i} + c$ ,  $n_i \geq 2$ , (або ж до виду  $f = \text{Re}z$  відповідно). А таку точку  $x_i$  називають *суттєво* (або ж, відповідно, *несуттєво*) критичною точкою.

Число  $n$  суттєво критичних точок  $x_i$  функції  $f$  разом із зазначеними вище значеннями  $n_i$  називають *топологічним сингулярним типом функції*  $f \in C^\infty(F)$ .

В роботі В. В. Шарка [2] вивчено питання гладкої і топологічної еквівалентності функцій з класу  $C^\infty(F)$ . Зокрема ним встановлено, що із фіксованим сингулярним типом існує лише скінчене число топологічно нееквівалентних функцій з  $C^\infty(F)$ . Однак питання про підрахунок числа топологічно нееквівалентних таких функцій виявилось дуже складною і в загальному випадку нерозв'язаною до сьогодні проблемою.

Якщо розглядати лише функції класу  $C_1^\infty(F) \subset C^\infty(F)$ , у яких *лише одна суттєво критична точка* (в подальшому —

вироджена критична точка типу сідла), то топологічний інваріант («2-кольоровий спін-граф», запропонований В. В. Шарком) та питання перевірки топологічної еквівалентності значно спрощуються, а задача про підрахунок числа топологічно нееквівалентних таких функцій стає більш досяжною.

Отже, обмежимося далі розглядом класу  $C_{k,l}^\infty(F) \subset C_1^\infty(F)$  функцій, які (крім єдиної виродженої критичної точки типу сідла) мають точно  $k$  локальних максимумів та  $l$  локальних мінімумів. Як слідує з [3] і [4], для функцій із зазначеного класу повним топологічним інваріантом є 2-кольорова хордова  $n$ -діаграма певного виду, яка має  $k$  чорних (або ж сірих) та  $l$  сірих (відповідно чорних) циклів. А саме: для функцій з класу  $C_{k,l}(M_g)$  на орієнтованій поверхні роду  $g$  — 2-кольорова  $O$ -діаграма з  $n = 2g - 1 + k + l$  хордами [3], а для функцій з класу  $C_{k,l}(N_g)$  на неорієнтованій поверхні роду  $g$  —  $N$ -діаграма з  $n = g - 1 + k + l$  хордами [4].

Задачі про підрахунок числа  $O$ -топологічно та топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{k,l}(M_0)$  (на двовимірній сфері) для певних  $k$  і  $l$  було розглянуто в [5], але розв'язані повністю (для довільних  $k, l \in \mathbb{N}$ ) лише у 2014 р. в [6].

В загальному ж випадку (для довільних натуральних  $k, l$  і  $g$ ) зазначені задачі для класів  $C_{k,l}(M_g)$  і  $C_{k,l}(N_g)$  також виявилися досить важкими та нерозв'язаними до сьогодні проблемами.

Проте, як з'ясувалося і вже можна констатувати, розв'язання зазначених задач для випадку *мінімальних* функцій (тобто при  $k = l = 1$ ) є цілком досяжними. Так, наприклад: для *орієнтовних поверхонь* роду  $g = 0, 1, 2, 3$  відповідні числа  $O$ -топологічно та топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(M_g)$  вперше (за допомогою «слів» спеціального виду) було підраховано в 1999 р. у роботі [1]. У 2006 р. в [7] (за допомогою 2-кольорових діаграм) було встановлено формули для підрахунку точного числа  $O$ -топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(M_g)$  на випадок довільного  $g \geq 0$ . Задача ж про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій із зазначеного класу до сьогодні залишалась нерозв'язаною.

Для неорієнтовних поверхонь числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(N_g)$  були відомими лише для початкових  $g = 1, 2, 3$  і  $4$  та встановлені в роботах [1] і [4] відповідно. В загальному ж випадку (для натуральних  $g \geq 1$ ) ця задача також залишається відкритим питанням.

Розв'язанню задач про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класів  $C_{1,1}(M_g)$  та  $C_{1,1}(N_g)$  й присвячено дану статтю, яку можна вважати логічним завершенням циклу авторських робіт [3], [7], [8] і [9] та суттєвим продовженням [4], [10].

## 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

Під перестановкою  $\pi$  будемо розуміти бієктивне відображення множини  $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$  на себе.

Для перестановки  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(m) \end{pmatrix}$  будемо використовувати скорочене позначення  $\pi = \langle \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m \rangle = \langle \pi_i \rangle$ , де  $\pi_i = \pi(i)$ . Зокрема  $\iota = \langle 1, 2, \dots, m \rangle$  — тотожна перестановка.

**Означення 1.1.** Через  $S_m^+$  позначимо множину всіх перестановок множини  $[m]$ , а через  $CS_m$  — множину циклічних перестановок з  $S_m^+$ , тобто тих перестановок з  $S_m^+$ , що є циклами довжини  $m$  (розкладаються у цикл максимальної довжини  $m$ ). Останні будемо позначати  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ , де  $i, c_i \in [m]$ ,  $c_i = c_j \Leftrightarrow i = j$ . Зокрема  $(1, 2, \dots, m-1, m) = \tau$ .

Добре відомо, що  $S_m^+$  ( $S_m$ ) разом з функціональною операцією  $\circ$  («композиція», що діє за правилом «right to left») є симетричною групою перестановок множини  $[m]$ .

**Означення 1.2.** Оснащеною перестановкою («signed permutation») називають перестановку  $\sigma = \langle \sigma_i \rangle$  множини  $[m]$ , в якій кожен елемент  $\sigma_i$  оснащено знаком «+» або ж «-». Через  $S_m^\pm$  позначимо множину всіх оснащених перестановок  $\sigma = \langle \sigma_i \rangle$ .

**Зауваження 1.3.** Оснащену перестановку  $\sigma \in S_m^\pm$  можна розглядати як бієкцію множини  $[\pm m] = \{1, 2, \dots, m, -1, \dots, -m\}$ , де  $\sigma(i) = \sigma_i$  та  $\sigma(-i) = -\sigma_i$  для  $i \in [m]$ .

Крім того, очевидно, що  $S_m^+ \subset S_m^\pm$ .

В подальшому нам знадобляться й перестановки з множини  $S_m^- = S_m^\pm \setminus S_m^+$ . Для введених множин очевидними є рівності:

$$|S_m^+| = m!, \quad |S_m^\pm| = 2^m \cdot m!, \quad |S_m^-| = m!(2^m - 1). \quad (1.1)$$

**Зауваження 1.4.** Всюди нижче такі поняття як *граф*, *k-регулярний граф*, *гамільтоніан*, *k-цикл графу*, *досконале паросполучення* («*perfect matching*») будуть вживатися в сенсі класичних відповідних визначень з роботи [11].

В подальшому під хордовою  $n$ -діаграмою будемо розуміти хордову діаграму з  $n$  хордами (див., напр., [12], [13], [14]).

**Означення 1.5.** Коло з  $2n$  точками на ньому (що є вершинами правильного  $2n$ -кутника), дуги якого по чергово розфарбовані у два кольори (чорний і сірий) та фіксованою нумерацією вершин (числами від 0 до  $2n - 1$ ) за годинниковою стрілкою, будемо називати **2-кольоровим  $2n$ -шаблоном**, рис. 1.1 а).

**2-кольоровою хордовою  $n$ -діаграмою** будемо називати  $n$ -діаграму, побудовану на основі 2-кольорового  $2n$ -шаблону.

**Означення 1.6.** 2-кольорову  $n$ -діаграму, яка не містить (містить) хорди, що сполучає вершини з номерами однакової парності, називають  **$O$ -діаграмою** ( **$N$ -діаграмою**) – рис. 1.1 б), с).

**Означення 1.7.** 2-кольорові  $n$ -діаграми будемо називати **ізоморфними**, якщо їх можна сумістити в результаті повороту на певний кут, та **еквівалентними**, якщо їх можна сумістити в результаті повороту, або дзеркального відбиття, або ж їх композиції.

**Означення 1.8.** Чорним (сірим) циклом 2-кольорової діаграми називатимемо послідовність хорд та чорних (сірих) дуг, які, чередуючись, утворюють гомеоморфний образ орієнтованого кола – рис. 1.1 б), с).

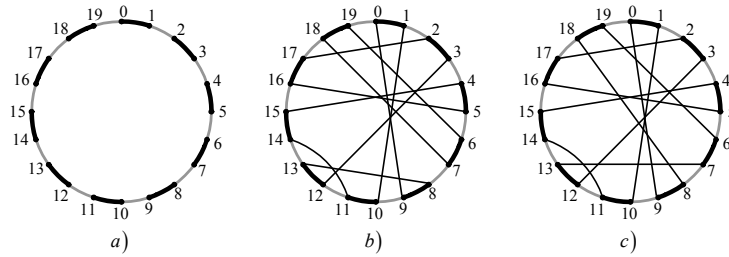


Рис. 1.1

а) 2-кольоровий 20-шаблон; б)  $O$ -діаграма з 1 сірим та 2 чорними циклами; в)  $N$ -діаграма з 1 сірим та 1 чорним циклами.

**Приклад 1.9.** Якщо через  $(i, i + 1)$  позначити орієнтовану дугу  $2n$ -шаблону, а через  $[i, j]$  — хорду, яка сполучає вершини з номерами  $i, j$ , то чорні  $bc_k$  та сірі  $gc_l$  цикли 2-кольорової діаграми, зображеної на рис. 1.1b), можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned}
 bc_1 &= (18, 19)[19, 6](6, 7)[7, 18], \\
 bc_2 &= (0, 1)[1, 10](10, 11)[11, 14](14, 15)[15, 4](4, 5)[5, 16](16, 17) \\
 &\quad [17, 2](2, 3)[3, 12](12, 13)[13, 8](8, 9)[9, 0], \\
 gc_1 &= (19, 0)[0, 9](9, 10)[10, 1](1, 2)[2, 17](17, 18)[18, 7](7, 8)[8, 13] \\
 &\quad (13, 14)[14, 11](11, 12)[12, 3](3, 4)[4, 15](15, 16)[16, 5](5, 6)[6, 19].
 \end{aligned}$$

А єдиний чорний та єдиний сірий цикли діаграми, зображеної на рис. 1.1c), — у вигляді:

$$\begin{aligned}
 bc_1 &= (0, 1)[1, 10](10, 11)[11, 14](14, 15)[15, 4](4, 5)[5, 16](16, 17) \\
 &\quad [17, 2](2, 3)[3, 12](12, 13)[13, 7](7, 6)[6, 19](19, 18)[18, 8](8, 9)[9, 0], \\
 gc_1 &= (19, 0)[0, 9](9, 10)[10, 1](1, 2)[2, 17](17, 18)[18, 8](8, 7)[7, 13] \\
 &\quad (13, 14)[14, 11](11, 12)[12, 3](3, 4)[4, 15](15, 16)[16, 5](5, 6)[6, 19].
 \end{aligned}$$

Підсумовуючи, зазначимо, що «обхід» (вичленування) певного (заради визначеності) чорного циклу діаграми можна здійснювати, починаючи з «парного» кінця довільної чорної дуги («непарного» для сірої). Назвемо її «стартовою». Рухаючись у (додатному) напрямку за годинниковою стрілкою, ми досягнемо її кінця. Далі слід рухатися вздовж хорди, яка сполучає цей кінець з іншим її кінцем на колі шаблону. З цього моменту (і в подальшому) рух по колу здійснюється виключно вздовж чорних дуг, інші кінці яких однозначно визначають наступні хорди циклу. І так до того моменту, поки не буде досягнуто «стартову» дугу чорного циклу.

Якщо проігнорувати колір, то кожен чорний (сірий) цикл 2-кольорової  $O$ -діаграми збігається з відповідним циклом непофарбованої діаграми. Тоді, наслідуючи [12],

**Означення 1.10.** *Родом 2-кольорової  $O$ -діаграми будемо називати ціле число  $g$ , що визначається рівністю*

$$g = \frac{n + 1 - \lambda}{2}, \quad (1.2)$$

де  $\lambda$  — сумарне число чорних і сірих циклів діаграми.

**Означення 1.11.** *Родом 2-кольорової  $N$ -діаграми будемо називати ціле число  $g$ , яке визначається рівністю*

$$g = n + 1 - \lambda. \quad (1.3)$$

**Означення 1.12.** *Множину  $O$ -діаграм ( $N$ -діаграм) з  $n$  хордами будемо позначати  $\mathfrak{S}_n^O$  (та  $\mathfrak{S}_n^N$  відповідно).*

*Множину  $O$ -діаграм ( $N$ -діаграм) з  $n$  хордами, які мають точно  $l$  сірих та  $k$  чорних циклів будемо позначати  $\mathfrak{S}_{l,k;n}^O$  (та  $\mathfrak{S}_{l,k;n}^N$  відповідно), а множину  $\mathfrak{S}_{1,k;n}^O \cup \mathfrak{S}_{1,k;n}^N$  — як  $\mathfrak{S}_{1,k;n}$ .*

*Множину  $O$ -діаграм ( $N$ -діаграм) з  $n$  хордами, які мають лише 1 сірий (або ж лише 1 чорний) цикл будемо позначати  $\mathfrak{S}_{1;n}^O$  ( $\mathfrak{S}_{1;n}^N$ ), а множину  $\mathfrak{S}_{1;n}^O \cup \mathfrak{S}_{1;n}^N$  позначимо як  $\mathfrak{S}_{1;n}$ .*

Слід відзначити, що питаннями переліку хордових  $n$ -діаграм відносно дії циклічної (порядку  $2n$ ) та дієдральної (порядку

$4n$ ) груп займалась ціла низка відомих математиків, зокрема автори робіт [12], [13], [15], [14], [16].

Підрахунку числа неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи порядку  $n$ ) та нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи порядку  $2n$ ) 2-кольорових  $n$ -діаграм присвячено роботи [16], [7], [17]–[6]. Зокрема, формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних діаграм для класів  $\mathfrak{S}_n^O$ ,  $\mathfrak{S}_n^N$ ;  $\mathfrak{S}_{1;n}^O$ ;  $\mathfrak{S}_{1;n}^N$ ;  $\mathfrak{S}_{l,k;l+k-1}^O$  встановлено в роботах [17]; [18]; [10] та [6] відповідно. Для числа неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$  – в [7], а для числа нееквівалентних таких діаграм – анонсовано в [9].

Як слідує із робіт [7] і [10], має місце

**Твердження 1.13** (*характеристична властивість* діаграм з класів  $\mathfrak{S}_{1;n}^O$  та  $\mathfrak{S}_{1;n}^N$ ). *Кожну діаграму  $D$  з класу  $\mathfrak{S}_{1;n}$  можна ототожнити із оснащеним циклом  $w(D)$  довжини  $n$ . А по суті – з оснащеною перестановкою  $\pi(D) \in S_{n-1}^\pm$ , причому: кожну  $D \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$  – з  $\pi(D) \in S_{n-1}^+$ , а діаграму  $D \in \mathfrak{S}_{1;n}^N$  – з  $\pi(D) \in S_{n-1}^-$ .*

Нагадаємо основну ідею зазначених бієкцій. Кожну чорну дугу  $(2i, 2i+1)$  2-кольорового  $2n$ -шаблону помітимо номером  $\hat{i}$ ,  $0 \leq i \leq (n-1)$ ; сіру дугу  $(2n-1, 0)$  – міткою  $\hat{0}$ , а кожну сіру дугу  $(2j-1, 2j)$  – номером  $\hat{j}$ ,  $0 \leq j \leq (n-1)$ .

Нехай далі  $D \in \mathfrak{S}_{1;n}$  та має єдиний сірий (чорний) цикл. Обхід цього циклу обов'язково починаємо з обходу дуги  $\hat{0}$  (відповідно  $\underline{0}$ ) у (додатному) напрямку за годинниковою стрілкою та послідовно виписуємо номери-позначки сірих (чорних) дуг, які зустрічаються при обході єдиного сірого (чорного) циклу. Причому оснащення знаком «мінус» відбувається лише для тих номерів-позначок  $\hat{j}$ , напрямок обходу дуг яких збігався з рухом проти годинникової стрілки.

Якщо  $D \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$ , то обхід кожної із сірих дуг (при обході у зазначений спосіб єдиного сірого циклу) відбувається виключно



за годинниковою стрілкою, і тому серед елементів відповідного циклу  $w(D) = (\widehat{0}, \widehat{w_1}, \dots, \widehat{w_{n-1}})$  немає від'ємних. Звідки й випливає, що  $\pi(D) = \pi(w(D)) = \langle w_1, \dots, w_n \rangle \in S_{n-1}^+$ .

Якщо ж  $D \in \mathfrak{Z}_{1;n}^N$ , то діаграма містить щонайменше дві хорди, які сполучають вершини з номерами однакової парності. Нехай  $[2i, 2j]$ ,  $(i < j)$  — одна з них. Якщо при обході сірого циклу прохід вздовж хорди  $[2i, 2j]$  відбувався від  $2i$  до  $2j$ , то напрямком обходу дуги  $\widehat{i}$  додатній, а дуги  $\widehat{j}$  — від'ємний; якщо ж від  $2j$  до  $2i$ , то напрямком обходу дуги  $\widehat{j}$  додатній, а дуги  $\widehat{i}$  — від'ємний. Таким чином, серед елементів відповідного циклу  $w(D)$  є від'ємні і тому  $\pi(D) \in S_{n-1}^-$ .

**Приклад 1.14.** Діаграму  $D_1$ , зображену на рис. 1.1b), можна ототожнити із циклом  $w(D_1) = (0, 5, 1, 9, 4, 7, 6, 2, 8, 3)$  та перестановкою  $\pi_1 = \langle 5, 1, 9, 4, 7, 6, 2, 8, 3 \rangle$ , а діаграму  $D_2$ , зображену на рис. 1.1c), — із циклом  $w(D_2) = (0, 5, 1, 9, -4, 7, 6, 2, 8, 3)$  та перестановкою  $\pi_2 = \langle 5, 1, 9, -4, 7, 6, 2, 8, 3 \rangle$ .

**Зауваження 1.15.** З урахуванням введених позначень та, як слідує з роботи [7], число чорних циклів діаграми  $D \in \mathfrak{Z}_{1;n}^O$  збігається з числом циклів композиції  $w^{-1} \circ \tau_0$ , де  $w = w(D)$  і  $\tau_0 = (0, 1, 2, \dots, n-1)$ . Відмітимо також, що цикли декомпозиції  $b = w^{-1} \circ \tau_0$  — суть чорні цикли діаграми.

**Означення 1.16.** [19], [11] Нехай  $\pi = \langle \pi_i \rangle$  — перестановка з  $S_m^\pm$ . Перетворимо її у (неоснащену) перестановку  $\pi' = \langle \pi'_i \rangle$  з  $S_{2m}^+$  за допомогою відображення  $\alpha$ , при якому для кожного  $1 \leq i \leq m$  елемент  $\pi_i$  відображається у впорядковану пару

$$\alpha(\pi_i) = \{\pi'_{2i-1}, \pi'_{2i}\} = \begin{cases} \{2\pi_i - 1, 2\pi_i\}, & \pi_i > 0, \\ \{2|\pi_i|, 2|\pi_i| - 1\}, & \pi_i < 0. \end{cases}$$

«Breakpoint»-графом перестановки  $\pi$  (надалі —  $BG$ -граф  $\pi$ , або ж коротко  $BG(\pi)$ ) називатимемо (неорієнтований) двокольоровий граф  $BG(\pi)$  із впорядкованою множиною вершин  $\pi'_0 = 0, \pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_{2m}, \pi'_{2m+1} = 2m + 1$ , множина ребер якого є об'єднанням двох «досконалих паросполучень» (*perfect matchings*) на вершинах  $\{0, 1, \dots, 2m + 1\}$ , а саме:

- чорні ребра (надалі – дуги)

$$\delta_B(\pi) = \{\{\pi'_{2i}, \pi'_{2i+1}\} | 0 \leq i \leq m\};$$

- сірі ребра (надалі – хорди)

$$\delta_G = \{\{2i, 2i + 1\} | 0 \leq i \leq m\}.$$

Іншими словами,  $BG(\pi) = \delta_B(\pi) \cup \delta_G$  – рис. 1.2 b) і c).

На рис. 1.2b) зображено  $BG$ -граф для перестановки

$$\pi = \langle 7, 4, 6, 1, 8, 3, 5, 2 \rangle,$$

який розкладається у 3 цикли: два 2-цикли та один 5-цикл; на рис. 1.2 c) –  $BG(\pi)$  для  $\pi = \langle 6, 5, -7, -1, -8, -2, 4, 3 \rangle$ , який розкладається у єдиний 9-цикл.

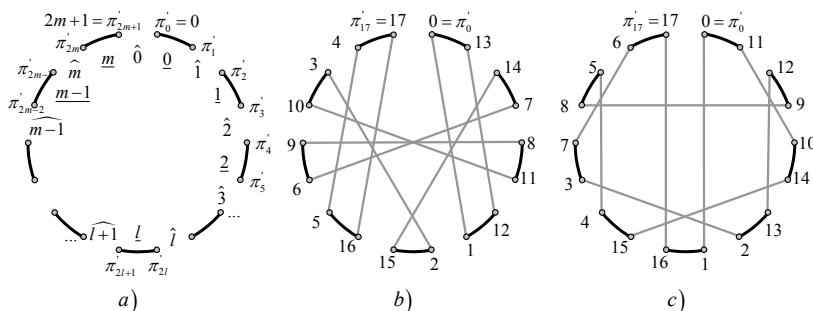


Рис. 1.2

- a)  $BG_m$ -шаблон; b)  $BG(\pi)$ ,  $\pi = \langle 7, 4, 6, 1, 8, 3, 5, 2 \rangle \in S_8^+$ ;  
 c)  $BG(\pi)$ ,  $\pi = \langle 6, 5, -7, -1, -8, -2, 4, 3 \rangle \in S_8^-$

**Зауваження 1.17.** З урахуванням означення 1.16 (заради зручності та без втрати загальності) в подальшому будемо вважати, що для кожної  $\pi \in S_m^\pm$  іі  $BG$ -граф будується на основі  $BG_m$ -шаблону – рис. 1.2a). Під  $BG_m$ -шаблоном будемо розуміти 1-регулярний граф, який складається з:

- $2m+2$  точок, що є вершинами правильного  $(2m+2)$ -кутника і занумеровані за годинниковою стрілкою за допомогою міток  $\pi'_0 = 0, \pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_{2m}, \pi'_{2m+1} = 2m+1$ , та
- $m+1$  ребра — чорних дуг  $\delta_B(\pi) = \{\{\pi'_{2i}, \pi'_{2i+1}\} | 0 \leq i \leq m\}$ , описаного навколо зазначеного  $(2m+2)$ -кутника кола.

Крім того, кожну чорну дугу  $\{\pi'_{2i}, \pi'_{2i+1}\}$  помітимо номером  $\hat{i}$ , дугу  $\{2m+1, 0\} - \hat{0}$ , а кожну дугу  $\{\pi'_{2i-1}, \pi'_{2i}\}$  — номером  $\hat{i}$ .

Нагадаємо, що паросполученням у графі називають множину попарно несуміжних ребер. Досконалим паросполученням (або ж 1-фактором) називають паросполучення, в якому зустрічаються усі вершини графа. Через  $\mathcal{F}_n$  позначають множину 1-факторів на вершинах  $\{0, 1, 2, \dots, 2n-1\}$ , зокрема через  $\varepsilon = \{\{i, n+i\} | 0 \leq i \leq n-1\}$  — «тотожний» 1-фактор.

**Означення 1.18** ([11]). Конфігурацією називають об'єднання двох досконалих паросполучень  $\delta_B$  і  $\delta_G$  в  $\{0, 1, \dots, 2m+1\}$ , де  $\delta_G = \{\{2i, 2i+1\} | 0 \leq i \leq m\}$ .

Доповненням конфігурації  $C = \delta_B \cup \delta_G$  називають конфігурацію  $\bar{C} = \delta_B \cup \hat{\delta}_G$ , де  $\hat{\delta}_G = \{\{2i-1, 2i\} | 1 \leq i \leq m\} \cup \{2m+1, 0\}$ .

Має місце характеристична властивість «breakpoint»-графів.

**Твердження 1.19.** [11, Lemma 5.1.] Конфігурація  $C = \delta_B \cup \delta_G$  є «breakpoint»-графом певної оснащеної перестановки  $\pi$  тоді і лише тоді, коли її доповнення  $\bar{C} = \delta_B \cup \hat{\delta}_G$  є гамільтоніаном.

**Означення 1.20.** Введемо наступні позначення:

- $S_{m,k}^+$  — множина тих перестановок з  $S_m^+$ , чий  $BG$ -граф розкладається у  $k$  циклів,  $BG_{m,k}^+$  — множина відповідних  $BG$ -графів,  $S_H^+(m, k) = |S_{m,k}^+| = |BG_{m,k}^+|$  — «Hultman number»;
- $S_{m,k}^\pm$  — множина тих перестановок з  $S_m^\pm$ , чий  $BG$ -граф розкладається у  $k$  циклів,  $BG_{m,k}^\pm$  — множина відповідних  $BG$ -графів,  $S_H^\pm(m, k) = |S_{m,k}^\pm| = |BG_{m,k}^\pm|$ ;
- $S_{m,k}^- = S_{m,k}^\pm \setminus S_{m,k}^+$ ,  $BG_{m,k}^-$  — множина відповідних  $BG$ -графів,  $S_H^-(m, k) = |S_{m,k}^-| = |S_{m,k}^\pm| - |S_{m,k}^+|$ .

Слід зазначити, що проблемам підрахунку величин  $S_H^+(m, k)$  і  $S_H^\pm(m, k)$  та суміжним питанням присвячена ціла низка робіт (напр., [20], [21], [22], [23], [11]). Однак нижче ми наведемо відомі результати виключно для випадку  $k = 1$ .

Так, наприклад, у 1980 р. в роботі [20] та пізніше в [23] було встановлено справедливість формули

$$S_H^+(m, 1) = \begin{cases} \frac{2 \cdot m!}{m+2}, & m = 2l \\ 0, & m \neq 2l, \end{cases} \quad (1.4)$$

а в 1992 р. у роботі [21] та пізніше в [11] – справедливість формул

$$S_H^\pm(g; 1) = \frac{2^{3g+1} \cdot (g+1)! \cdot (g!)^2}{(2g+2)!} + \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{\min(i, g+1-i)} c(i; j) \cdot \left[ \frac{2^{i-j-1} (2j)! (i-1)! (g+2-i-j)!}{(2j-1)j!} \right]^2, \quad (1.5)$$

де

$$c(i; j) = \frac{(-1)^{g+2+i-j} \cdot 2^{i-j+1} \cdot (g+1) \cdot (2i-2j+1) \cdot (i-1)!}{(g+2+i-j)(g+1+i-j)(g+1-i+j)(g-i+j)} \times \frac{1}{(g+1-i-j)!(2i-1)!(j-1)!}. \quad (1.6)$$

Зауважимо, що задача про підрахунок

- величини  $S_H^+(m, k)$  є рівносильною до задачі про підрахунок числа представлень *фіксованого*  $(m+1)$ -циклу у вигляді композиції  $\rho \circ \omega$ , де  $\rho$  –  $(m+1)$ -цикл,  $\omega \in S_{m+1}^+$  з  $c(\omega) = k$  (яка розкладається у  $k$  циклів) [20], [23], [11], а
- величини  $S_H^\pm(m, k)$  – задачі про підрахунок тих  $\tau \in \mathcal{F}_{m+1}$ , при яких  $c(\delta_G \cup \tau) = k$  і  $c(\tau \cup \widehat{\delta}_G) = 1$  ( $c(\cdot)$  – число циклів) [21], [11].

2. «BREAKPOINT»-ГРАФИ ТА 2-КОЛЬОРОВІ ДІАГРАМИ З  
ОДНИМ (СІРИМ) ЦИКЛОМ ПЕВНОГО КОЛЬОРУ

**Означення 2.1.** Нехай  $\pi \in S_m^\pm$ .  $\widehat{BG}(\pi)$ -графом будемо називати  $BG(\pi)$ -граф, який доповнено (до 3-регулярного графу) сірими дугами  $\{2m + 1, 0\}$  і  $\{2i - 1, 2i\}$  ( $1 \leq i \leq m$ )  $BG_{2m}$ -шаблону. Іншими словами (з урахуванням означень 1.16, 1.18),  $\widehat{BG}(\pi) = \delta_B(\pi) \cup \delta_G \cup \widehat{\delta}_G$ .

Позначимо далі через  $\widehat{BG}_m^\pm$ ,  $\widehat{BG}_{m,k}^\pm$ ,  $\widehat{BG}_{m,k}^+$  і  $\widehat{BG}_{m,k}^-$  множини  $\widehat{BG}$ -графів для перестановок з  $S_m^\pm$ ,  $S_{m,k}^\pm$ ,  $S_{m,k}^+$  та  $S_{m,k}^-$  відповідно. Тоді очевидно, що елементи множин  $\widehat{BG}_m^\pm$ ,  $\widehat{BG}_{m,k}^\pm$ ,  $\widehat{BG}_{m,k}^+$  і  $\widehat{BG}_{m,k}^-$  (перебуваючи у взаємно однозначній відповідності з елементами множин  $BG_m^\pm$ ,  $BG_{m,k}^\pm$ ,  $BG_{m,k}^+$  і  $BG_{m,k}^-$  відповідно) перебувають у взаємно однозначній відповідності з елементами множин  $S_m^\pm$ ,  $S_{m,k}^\pm$ ,  $S_{m,k}^+$  та  $S_{m,k}^-$  відповідно.

**Зауваження 2.2.** Без втрати загальності, можна вважати, що кожна 2-кольорову діаграму  $D \in \mathfrak{S}_{1,k;n}$  побудовано на  $\widehat{BG}_m$ -шаблоні ( $m = n - 1$ ) — рис. 2.3 а), б).

Тоді кожній діаграмі  $D \in \mathfrak{S}_{1,n}$  однозначно можна поставити у відповідність перестановку  $\pi = \pi(D) \in S_{n-1}^\pm$ ,  $\widehat{BG}$ -граф якої збігається з  $D$ . Пояснимо, як задається ця відповідність.

1) Оскільки  $D$  має один сірий цикл, то при його обході, починаючи з  $\widehat{0}$ -ої сірої дуги  $\{2n - 1, 0\}$  за годинниковою стрілкою, ми рухаємося вздовж хорди, одним із кінців якої є вершина 0, до другого її кінця на  $\widehat{BG}_{n-1}$ -шаблоні — вершини 1. Подальший напрямок руху по колу визначається сірою дугою, що інцидентна вершині 1, другий її кінець позначимо 2. Далі за алгоритмом: від вершини  $2i$  рухаємося вздовж відповідної хорди та позначаємо другий її кінець номером  $(2i + 1)$ , другий кінець інцидентної сірої хорди — номером  $(2i + 2)$ , і так до тих пір, поки не повернемося до  $(2n - 1)$ -вершини  $\widehat{0}$ -ої сірої дуги — рис. 2.3с).

2) В результаті кінці кожної сірої дуги (крім поміченої  $\widehat{0}$ -ої) буде занумеровано парою  $\{\pi'_{2i-1}, \pi'_{2i}\}$  послідовних натуральних чисел з  $\{1, 2, \dots, 2n - 2\}$ .

3) Пропускаючи вершину 0 і рухаючись за годинниковою стрілкою, випишемо привласнені номери вершинам  $\widehat{BG}_{n-1}$ -шаблону. В результаті одержимо перестановку

$$\pi' = \pi'(D) = \langle \pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_{2i-1}, \pi'_{2i}, \dots, \pi'_{2n-3}, \pi'_{2n-2} \rangle \in S_{2n-2}^+$$

4) З урахуванням 2) та за допомогою відображення  $\alpha^{-1}$  ( $\alpha$  — з означення 1.16) перестановці  $\pi' = \pi'(D)$  однозначно ставиться у відповідність перестановка  $\pi = \pi(\pi'(D)) = \langle \pi_i \rangle \in S_{n-1}^\pm$ , а саме: для кожного  $1 \leq i \leq (n - 1)$

$$\alpha^{-1}(\{\pi'_{2i-1}, \pi'_{2i}\}) = \pi_i = \begin{cases} +\frac{\pi'_{2i}}{2}, & \pi'_{2i-1} - \text{непарне,} \\ -\frac{\pi'_{2i-1}}{2}, & \pi'_{2i-1} - \text{парне.} \end{cases}$$

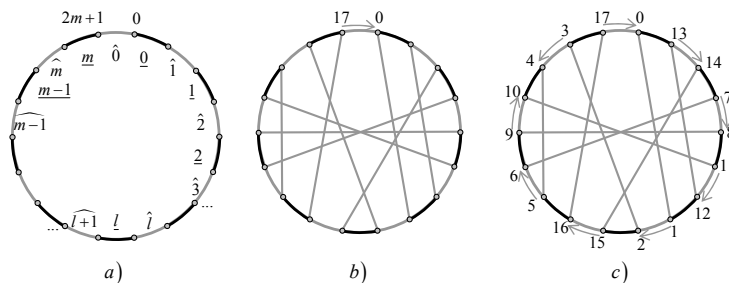


Рис. 2.3

a)  $\widehat{BG}_m$ -шаблон; b)  $D \in \mathfrak{S}_{1,2;8}^N$ ;  
 c)  $\pi' = \pi'(D) = \langle 13, 14, 7, 8, 11, 12, 1, 2, 15, 16, 5, 6, 9, 10, 4, 3 \rangle$   $\pi = \pi(\pi'(D)) = \pi(D) = \langle 7, 4, 6, 1, 8, 3, 5, -2 \rangle \in S_{8,2}^-$ ,  $\widehat{BG}(\pi) \equiv D$

Таким чином, кожній діаграмі  $D \in \mathfrak{S}_{1,n}$  однозначно поставлено у відповідність перестановку  $\pi = \pi(D) \in S_{n-1}^\pm$ ,  $\widehat{BG}$ -граф якої збігається з  $D$ .

Зокрема, кожній діаграмі  $D$  з класу  $\mathfrak{S}_{1,n}^O$  однозначно ставиться у відповідність перестановка  $\pi = \pi(D) \in S_{n-1}^+$ , а кожній діаграмі  $D$  з класу  $\mathfrak{S}_{1,n}^N$  — перестановка  $\pi = \pi(D) \in S_{n-1}^-$  ( $\widehat{BG}$ -граф якої збігається з  $D$ ).

І навпаки: кожній перестановці  $\pi$  з  $S_{n-1}^+$  (з  $S_{n-1}^-$ ) однозначно ставиться у відповідність  $BG(\pi)$ , а тому й  $\widehat{BG}(\pi)$  — діаграма  $D = D(\pi)$  саме з класу  $\mathfrak{S}_{1,n}^O$  (з класу  $\mathfrak{S}_{1,n}^N$  відповідно).

З урахуванням зазначеного, означення 2.1 та зауваження 2.2 діаграми  $D \in \mathfrak{S}_{1,n}$  та  $\widehat{BG}(\pi(D)) \in \widehat{BG}_{n-1}^\pm$  можна ототожнювати. Так само можна ототожнювати  $\widehat{BG}(\pi) \in \widehat{BG}_{n-1}^\pm$  та діаграми  $D(\pi) \in \mathfrak{S}_{1,n}$ . Отже елементи множин  $\mathfrak{S}_{1,n}^O$  і  $S_{n-1}^+$  та  $\mathfrak{S}_{1,n}^N$  і  $S_{n-1}^-$  перебувають у взаємно однозначній відповідності.

Більше того, оскільки число  $k$  чорних циклів 2-кольорової діаграми  $D(\pi) \equiv \widehat{BG}(\pi) \in \mathfrak{S}_{1,k,n}$  збігається із числом циклів  $BG(\pi)$ , то  $\pi \in S_{n-1,k}^\pm$ . І навпаки, якщо  $\pi \in S_{n-1,k}^\pm$ , то  $BG(\pi) \in BG_{n-1,k}^\pm$ , а тому  $\widehat{BG}(\pi) \in BG_{n-1,k}^\pm \equiv \mathfrak{S}_{1,k,n}$ .

Таким чином, встановлено биекцію між елементами множин  $\mathfrak{S}_{1,k;n}$  та  $S_{n-1,k}^\pm$ . Більш того, мають місце такі твердження.

**Твердження 2.3.** *Елементи множин  $\mathfrak{S}_{1,k;n}^O$  і  $S_{n-1,k}^+$  перебувають у взаємно однозначній відповідності.*

**Твердження 2.4.** *Елементи множин  $\mathfrak{S}_{1,k;n}^N$  і  $S_{n-1,k}^-$  перебувають у взаємно однозначній відповідності.*

**Наслідок 2.5.**

$$|\mathfrak{S}_{1,k;n}| = |S_{n-1,k}^\pm| = S_H^\pm(n-1, k). \quad (2.7)$$

$$|\mathfrak{S}_{1,k;n}^O| = |S_{n-1,k}^+| = S_H^+(n-1, k). \quad (2.8)$$

**Означення 2.6.** *Нехай  $\sigma = \langle \sigma_i \rangle \in S_{2m}^+$ . Якщо для кожного  $1 \leq i \leq m$  виконується рівність  $\sigma_i + \sigma_{2m+1-i} = 2m+1$ , то таку перестановку  $\sigma$  будемо називати симетричною, множину*

всіх таких перестановок позначати  $\tilde{S}_{2m}^+$ , а множину відповідних діаграм  $D(\sigma) \equiv \widehat{BG}(\sigma) \in \mathfrak{S}_{1,2m+1}^O$  — як  $\tilde{\mathfrak{S}}_{1,2m+1}^O$ .

**Твердження 2.7.** Діаграма  $D \equiv \widehat{BG}(\sigma)$  є симетричною відносно осі симетрії  $\widehat{BG}_{2m}$ -шаблону, яка проходить через середини  $\widehat{0}$ -ої сірої та  $\underline{m}$ -ої чорної дуг, тоді і лише тоді, коли  $\sigma \in \tilde{S}_{2m}^+$ .

### 3. ПЕРЕРАХУВАННЯ ТОПОЛОГІЧНО НЕЕКВІВАЛЕНТНИХ ГЛАДКИХ МІНІМАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ НА ЗАМКНЕНИХ ОРІЄНТОВАНИХ ПОВЕРХНЯХ РОДУ $g \geq 0$

**3.1. Класифікаційна теорема та ілюстративні приклади до початкових значень.** В [3] встановлено, що для довільної функції  $f$  з класу  $C_{k,l}(M_g)$  (повним) топологічним інваріантом є 2-кольорова хордова  $O$ -діаграма  $D(f)$  з  $n = 2g - 1 + k + l$  хордами, яка має точно  $k$  чорних (сірих) та  $l$  сірих (чорних) циклів. Тобто діаграма з класу  $\mathfrak{S}_{k,l;n}^O$  ( $n = 2g - 1 + k + l$ ). Зокрема має місце таке твердження:

**Теорема 3.2.** [3] Дві функції  $f_1$  і  $f_2$  з класу  $C_{1,1}(M_g)$  будуть  $O$ -топологічно еквівалентними (топологічно еквівалентними) тоді і лише тоді, коли відповідні їм діаграми  $D(f_1)$  і  $D(f_2)$  з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$  ( $n = 2g + 1$ ) є еквівалентними відносно дії циклічної (відповідно дієдральної) групи. Число топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(M_g)$  дорівнює числу нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$  ( $n = 2g + 1$ ).

**Приклад 3.3.** При  $g = 0$  існує **єдина** діаграма з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;1}^O$ , рис. 3.4а), при  $g = 1$  — також **єдина** діаграма з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;3}^O$ , рис. 3.4б), для  $g = 2$  маємо рівно **4** нееквівалентні діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;5}^O$ , рис. 3.4с), а для  $g = 3$  існує **25** нееквівалентних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;7}^O$ , рис. 3.5. Таким чином, для початкових  $g = 0, 1, 2, 3$  число топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(M_g)$  становить 1, 1, 4 і 25 відповідно.



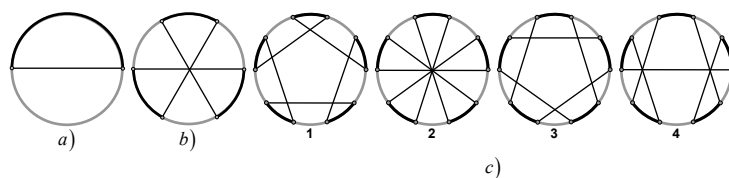


Рис. 3.4. (Топологічні) інваріанти для топологічно нееквівалентних функцій з класів  $C_{1,1}(M_0)$ ,  $C_{1,1}(M_1)$  і  $C_{1,1}(M_2)$  відповідно.

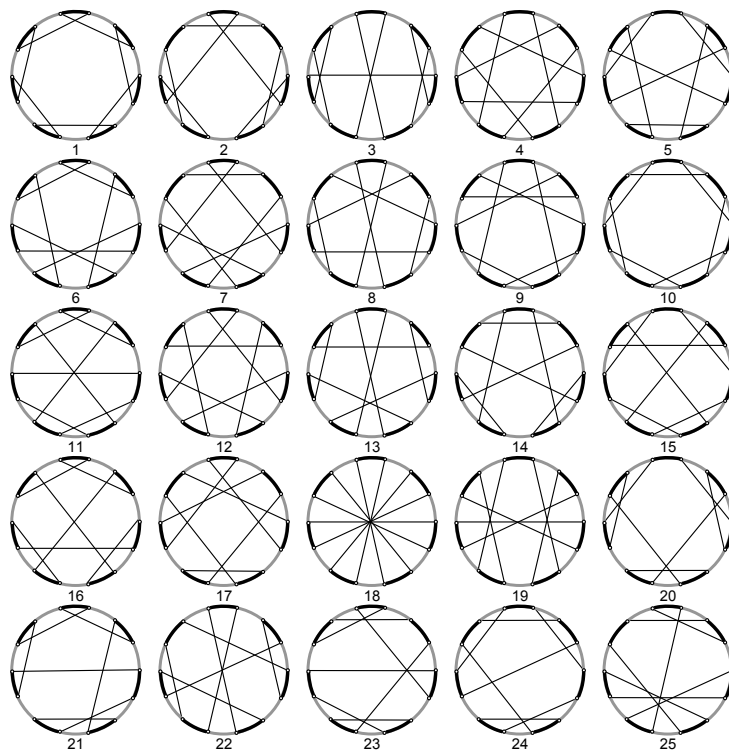


Рис. 3.5. (Топологічні) інваріанти для топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(M_3)$ .

Формалізуємо зазначену задачу для довільного  $g \geq 0$ .

За лемою Бернсайда та з урахуванням результатів робіт [3] і [7] число нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи порядку  $2n$ ) діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$  ( $n = 2g + 1$ ) може бути визначено за допомогою співвідношення

$$d_O^{**}(n) = \frac{1}{2} \cdot \left( d_O^*(n) + S_O(n) \right), \quad (3.9)$$

де  $d_O^*(n)$  — число неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи порядку  $n$ ) діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ ;

$S_O(n)$  — число тих діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ , що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії** 2-кольорового  $2n$ -шаблону (надалі, коротко, — *симетричних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$* ).

Таким чином, вирішення зазначеної проблеми зводиться до задачі про підрахунок числа тих діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;2g+1}^O$ , які є симетричними відносно фіксованої осі симетрії 2-кольорового  $(4g + 2)$ -шаблону.

Розв'язанню цієї задачі й присвячено наступний підпункт.

#### 3.4. Перерахування симетричних діаграм класу $\mathfrak{S}_{1,1;2g+1}^O$ .

Очевидно, що безпосереднім наслідком означення 2.6, твердження 2.7 та відповідної формули з (1.1) є справедливість наступних рівностей

$$\left| \widehat{\mathfrak{S}}_{1,2g+1}^O \right| = \left| \widetilde{\mathfrak{S}}_{2g}^+ \right| = \left| S_g^\pm \right| = g! \cdot 2^g. \quad (3.10)$$

Позначимо далі через  $\widetilde{\mathfrak{S}}_{1,1;2g+1}^O$  множину тих (симетричних) діаграм з  $\widetilde{\mathfrak{S}}_{1,2g+1}^O$ , які мають 1 сірий та 1 чорний цикл (тобто, множину тих діаграм з  $\mathfrak{S}_{1,1;2g+1}^O$ , що є симетричними відносно осі симетрії  $\widehat{BG}_{2g}$ -шаблону, яка проходить через середини  $\widehat{0}$ -ої сірої та  $g$ -ої чорної дуг).

З урахуванням прикладу 3, для початкових  $g = 0, 1, 2, 3$  значення величини  $S_O(2g + 1)$  становлять 1, 1, 4 і 20 (на рис. 3.5 це діаграми 1–20) відповідно. У роботі [8] в явному вигляді наведено всі 148 симетричних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;9}^O$  ( $g = 4$ ).

Більш того, з урахуванням результатів [8], при  $1 \leq g \leq 9$  відповідні значення величин  $S_O(2g+1)$  і  $S_H^\pm(g;1)$  збігаються. Тому є всі підстави для висунення *гіпотези* щодо збіг величин при довільному  $g \geq 1$ .

Нехай  $\pi \in S_m^\pm$ . Трансформуємо перестановку  $\pi = \langle \pi_i \rangle$  у неоснащену перестановку  $\sigma = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \dots, \sigma_{2m} \rangle \in \tilde{S}_{2m}^+$  за допомогою відображення  $\kappa: S_m^\pm \mapsto \tilde{S}_{2m}^+$ , при якому  $\forall i \in [m]$

$$\kappa: \pi_i \mapsto \{\sigma_i, \sigma_{2m+1-i}\} = \begin{cases} \{\pi_i, 2m+1-\pi_i\}, & \pi_i > 0 \\ \{2m+1-|\pi_i|, |\pi_i|\}, & \pi_i < 0. \end{cases}$$

Очевидно, що  $\kappa$  є бієктивним та для всіх  $i \in [m]$

$$\kappa^{-1}: \{\sigma_i, \sigma_{2m+1-i}\} \mapsto \pi_i = \begin{cases} +\sigma_i, & \sigma_i \leq m \\ -\sigma_{2m+1-i}, & \sigma_i > m. \end{cases}$$

Нехай далі  $\tilde{S}_{2m,1}^+$  — множина тих  $\sigma \in \tilde{S}_{2m}^+$ , чий  $BG$ -графі розкладаються в 1 цикл. Іншими словами, множина тих  $\sigma \in \tilde{S}_{2m}^+$ , при яких  $BG(\sigma) \in BG_{2m,1}^+$  (або ж  $\widehat{BG}(\sigma) \in \widehat{BG}_{2m,1}^+$ ).

**Зауваження 3.5.** З урахуванням твердження 2.7, кожному діаграму  $D \in \widehat{\mathfrak{S}}_{1,2g+1}^O$  можна ототожнити із перестановкою  $\sigma \in \tilde{S}_{2g}^+$  ( $\widehat{BG}(\sigma) \equiv D$ ). А за допомогою відображення  $\kappa$  — із перестановкою  $\pi = \kappa^{-1}(\sigma) \in S_g^\pm$ . Більше того, в ілюстративних прикладах 3.6 і 3.7 показано, що кожному діаграму  $D$  з класу  $\widehat{\mathfrak{S}}_{1,1;2g+1}^O$  можна ототожнити з (оснащеною) перестановкою  $\pi = \pi(D)$  саме із класу  $S_{g,1}^\pm$ . І навпаки.

**Приклад 3.6.** При  $g = 2$  існує лише **чотири** діаграми з класу  $\widehat{\mathfrak{S}}_{1,1;5}^O$ , рис. 3.4с). Кожну з них (рис. 3.6) можна ототожнити із відповідними перестановками  $\pi_i \in S_{2,1}^\pm$ :

$$\begin{aligned} 1) \sigma'_1 = \sigma'_1(D_1) = \langle 7, 8; 5, 6; 3, 4; 1, 2 \rangle &\xrightarrow{\alpha^{-1}} \\ &\mapsto \sigma_1 = \langle 4, 3 \mid 2, 1 \rangle \xrightarrow{\kappa^{-1}} \pi_1 = \langle -1, -2 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \sigma'_2 = \sigma'_2(D_2) &= \langle 3, 4; 7, 8; 1, 2; 5, 6 \rangle \xrightarrow{\alpha^{-1}} \\
&\mapsto \sigma_2 = \langle 2, 4 \mid 1, 3 \rangle \xrightarrow{\kappa^{-1}} \pi_2 = \langle +2, -1 \rangle, \\
3) \sigma'_3 = \sigma'_3(D_3) &= \langle 5, 6; 1, 2; 7, 8; 3, 4 \rangle \xrightarrow{\alpha^{-1}} \\
&\mapsto \sigma_3 = \langle 3, 1 \mid 4, 2 \rangle \xrightarrow{\kappa^{-1}} \pi_3 = \langle -2, +1 \rangle, \\
3) \sigma'_4 = \sigma'_4(D_4) &= \langle 3, 4; 1, 2; 7, 8; 5, 6 \rangle \xrightarrow{\alpha^{-1}} \\
&\mapsto \sigma_4 = \langle 2, 1 \mid 4, 3 \rangle \xrightarrow{\kappa^{-1}} \pi_4 = \langle +2, +1 \rangle.
\end{aligned}$$

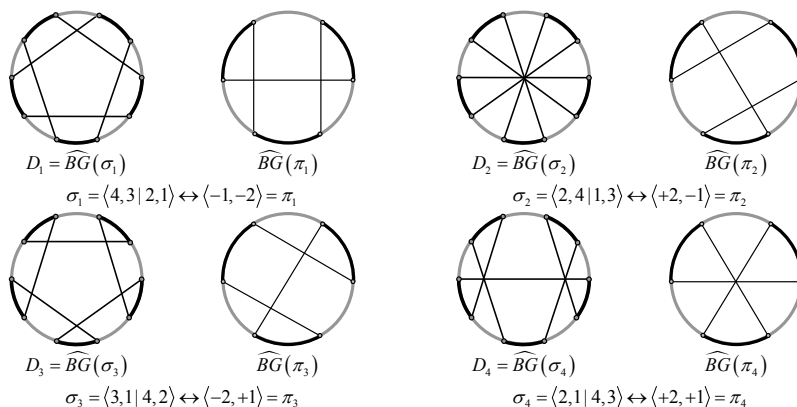


Рис. 3.6

Таким чином,  $|\widetilde{\mathfrak{S}}_{1,1;5}^O| = S_H^\pm(2, 1)$ .

**Приклад 3.7.** На рис. 3.7 наведено всі 20 перестановок  $\pi \in S_{3,1}^\pm$ , відповідні  $\widehat{BG}(\pi)$ -графи з  $\widehat{BG}_{3,1}^\pm$  та відповідно всі симетричні  $\widehat{BG}(\sigma) = \widehat{BG}(\kappa(\pi))$ -діаграми з  $\widetilde{\mathfrak{S}}_{1,1;7}^O$ . Отже,

$$|\widetilde{\mathfrak{S}}_{1,1;7}^O| = S_H^\pm(3, 1).$$

Як з'ясувалося, мають місце наступні твердження:

**Лема 3.8.** *Якщо  $\sigma \in \tilde{S}_{2m,1}^+$ , то  $\pi = \kappa^{-1}(\sigma) \in S_{m,1}^\pm$ . І навпаки: якщо  $\pi \in S_{m,1}^\pm$ , то  $\sigma = \kappa(\pi) \in \tilde{S}_{2m,1}^+$ .*

Таким чином, справедливим є твердження

**Лема 3.9.** [9] *Для довільного натурального  $g$  справеджується рівність*

$$S_O(n) = \left| \tilde{\mathfrak{S}}_{1,1;2g+1}^O \right| = \left| \tilde{S}_{2g,1}^+ \right| = \left| S_{g,1}^\pm \right| = S_H^\pm(g, 1). \quad (3.11)$$

Початкові значення числа  $d_O(n)$  всіх діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$  та числа  $S_O(n)$  симетричних діаграм з цього класу подано у таблиці 3.1. З урахуванням леми 3.9, має місце основний результат

**Теорема 3.10.** *Число нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$  ( $n = 2g+1$ ) можна обчислити за допомогою співвідношення*

$$d_O^{**}(n) = \frac{1}{2} \cdot \left( d_O^*(n) + S_H^\pm \left( \frac{n-1}{2}; 1 \right) \right), \quad (3.12)$$

де величина  $d_O^*(n)$  (з урахуванням результатів роботи [7]) може бути визначена за такими формулами:

$$d_O^*(n) = \frac{1}{n} \left( d_O(n) + \sum_{i|n, i \neq n} \phi \left( \frac{n}{i} \right) \cdot \rho(n, i) \right), \quad (3.13)$$

$$\rho(n, i) = d(i) \cdot \phi^* \left( \frac{n}{i} \right) \cdot \left( \frac{n}{i} \right)^{i-1}. \quad (3.14)$$

В цих формулах  $\rho(n, i)$  — число тих діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ , які «самосуміщуються» при повороті на кут  $\omega_i = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$  навколо центру 2-кольорового  $2n$ -шаблону (за годинниковою стрілкою),

$$d_O(n) = \left| \mathfrak{S}_{1,1;n}^O \right| = \frac{2(n-1)!}{n+1} = \frac{(2g)!}{g+1} = S_H(2g; 1),$$

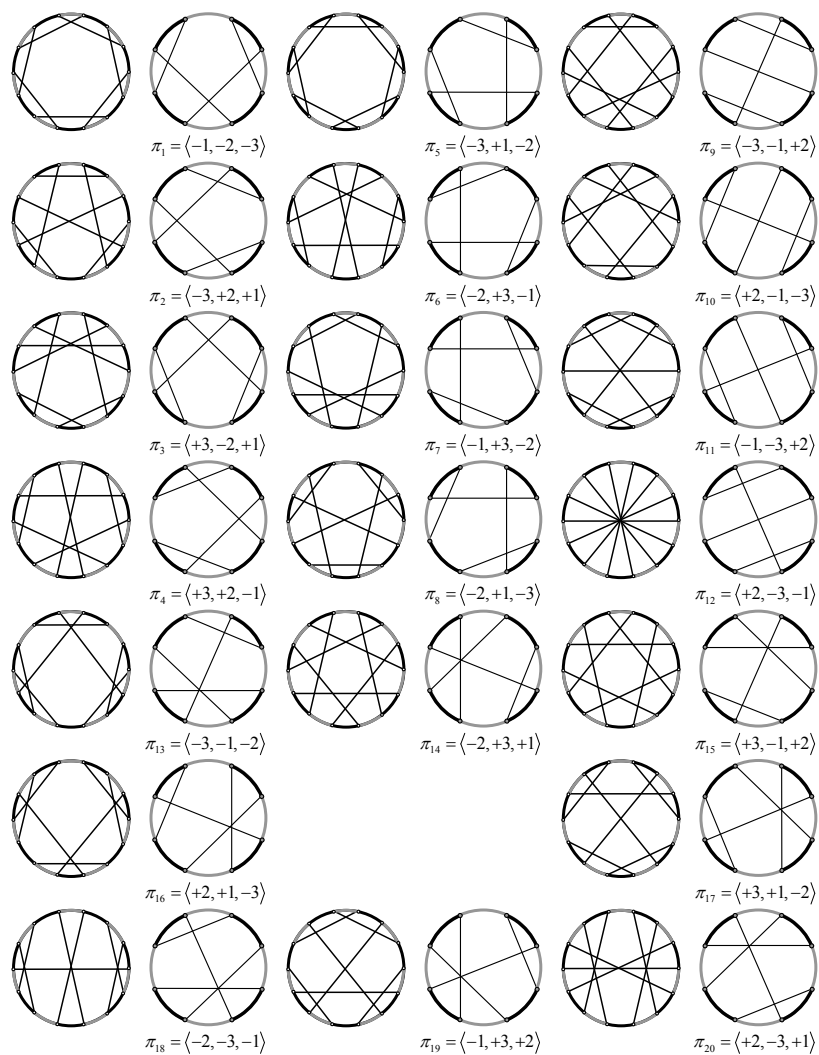


Рис. 3.7.  $\widehat{BG}(\sigma_i), \widehat{BG}(\pi_i), \pi_i \in S_{3,1}^\pm, 1 \leq i \leq 20$

$d(i) = \frac{2(i-1)!}{i+1}$ ,  $\phi(q) = |\{1 \leq h < q \mid \gcd(h, q) = 1\}|$  – функція Ейлера,

$$\phi^*(q) = |\{1 \leq h < q \mid \gcd(h, q) = 1 = \gcd(h+1, q)\}|,$$

$\gcd(a, b)$  – найбільший спільний дільник натуральних  $a$  і  $b$ , а величина  $S_H^\pm(\frac{n-1}{2}; 1) = S_H^\pm(g; 1)$  визначається за формулами (1.5)–(1.6).

**Наслідок 3.11.** Число топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(M_g)$  можна знайти за формулами (3.12)–(3.14), (1.5)–(1.6).

Початкові значення числа неізоморфних  $d_O^*(n)$  та числа нееквівалентних  $d_O^{**}(n)$  діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$  ( $n = 2g + 1$ ) подано у таблиці 3.2.

#### 4. ПЕРЕРАХУВАННЯ ТОПОЛОГІЧНО НЕЕКВІВАЛЕНТНИХ ГЛАДКИХ МІНІМАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ НА ЗАМКНЕНИХ НЕОРІЄНТОВАНИХ ПОВЕРХНЯХ РОДУ $g \geq 1$

##### 4.1. Класифікаційна теорема та початкові результати.

В роботах [3], [4] встановлено, що для довільної функції  $f$  з класу  $C_{k,l}(N_g)$  (повним) топологічним інваріантом є 2-кольорова хордова  $N$ -діаграма  $D(f)$  з  $n = g - 1 + k + l$  хордами, яка має точно  $k$  чорних (або ж сірих) та  $l$  сірих (відповідно чорних) циклів. Тобто діаграма з класу  $\mathfrak{S}_{k,l;n}^N$  ( $n = g - 1 + k + l$ ). Зокрема має місце твердження

**Теорема 4.2** ([4]). Дві функції  $f_1$  і  $f_2$  з класу  $C_{1,1}(N_g)$  є топологічно еквівалентними тоді і лише тоді, коли відповідні їм діаграми  $D(f_1)$  і  $D(f_2)$  з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$  ( $n = g + 1$ ) є еквівалентними відносно дії дієдральної групи. Число топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(N_g)$  дорівнює числу нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи порядку  $2n$ ) діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$  ( $n = g + 1$ ).

**Приклад 4.3.** При  $g = 1$  існує **єдина** діаграма з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;2}^N$ , рис. 4.8а), при  $g = 2$  існує також **єдина** діаграма з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;3}^N$ ,

$g$	$n$	$d_O(n) = \frac{(2g)!}{g+1} = S_H(2g, 1)$ , послідвність <b>A060593</b> в [24]	$S_O(n) = S_H^\pm(g, 1)$ , послід. <b>A001171</b> в [24]
0	1	1	1
1	3	1	1
2	5	8	4
3	7	180	20
4	9	8 064	148
5	11	604 800	1 348
6	13	68 428 800	15 104
7	15	10 897 286 400	198 144
8	17	2 324 754 432 000	2 998 656
9	19	640 237 370 572 800	51 290 496
10	21	221 172 909 834 240 000	979 732 224
11	23	93 666 727 314 800 640 000	20 661 458 688

ТАБЛ. 3.1. Початкові значення величин  $d_O(n)$   
та  $S_O(n)$ ,  $n = 2g + 1$

$g$	$n$	$d_O^*(n)$	$d_O^{**}(n) = \frac{d_O^*(n) + S_O(n)}{2}$
0	1	1	1
1	3	1	1
2	5	4	4
3	7	30	25
4	9	900	524
5	11	54 990	28 169
6	13	5 263 764	2 639 434
7	15	726 485 868	363 342 006
8	17	136 750 260 720	68 376 629 688
9	19	33 696 703 714 374	16 848 377 502 435
10	21	10 532 043 325 452 570	5 266 022 152 592 360
11	23	4 072 466 404 991 332 194	2 036 233 212 826 395 441

ТАБЛ. 3.2. Початкові значення величин  $d_O^*(n)$   
та  $d_O^{**}(n)$ ,  $n = 2g + 1$



рис. 4.8b), для  $g = 3$  маємо рівно **4** нееквівалентні діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;4}^N$ , рис. 4.8c), а при  $g = 4$  існує **20** нееквівалентних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;5}^N$ , рис. 4.9. Таким чином, для початкових  $g = 1, 2, 3, 4$  число топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(N_g)$  становить 1, 1, 4 і 20 відповідно.

В загальному ж випадку (для натуральних  $g \geq 1$ ) ця задача і до сьогодні **залишається нерозв'язаною**.

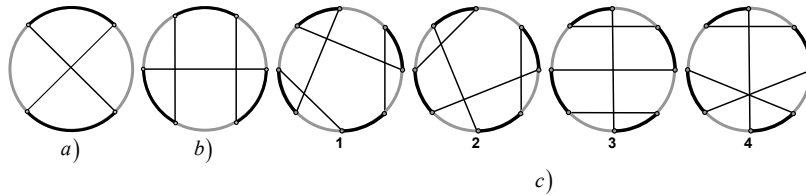


Рис. 4.8. (Топологічні) інваріанти для топологічно нееквівалентних функцій з класів  $C_{1,1}(N_1)$ ,  $C_{1,1}(N_2)$  і  $C_{1,1}(N_3)$  відповідно.

Проте, як з'ясувалося, існує безпосередній зв'язок між шуканою та наведеними вище величинами  $S_H^\pm(g, 1)$  та  $S_H(g, 1)$ . А вирішення зазначеної проблеми зводиться до розв'язання задач про підрахунок тих діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$  ( $n = g + 1$ ), які мають симетрії (відносно повороту та/або відбиття).

**Твердження 4.4.** Для натуральних  $n = g + 1 > 1$  число  $d_N(n)$  діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$  можна обчислити за формулами

$$d_N(n) = S_H^\pm(n - 1, 1) - S_H(n - 1, 1) = \boxed{S_H^\pm(g, 1) - S_H(g, 1)} = \begin{cases} S_H^\pm(g, 1) - \frac{2 \cdot g!}{g+2}, & g = 2m \\ S_H^\pm(g, 1), & g \neq 2m. \end{cases} \quad (4.15)$$

*Доведення.* З урахуванням пункту 2, при  $n = g + 1$  і  $1 \leq k \leq n$  число діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,k;n}$  збігається із числом  $S_H^\pm(g, k)$  перестановок з  $S_{g,k}^\pm$ . Проте серед них точно  $S_H^+(g, k)$  перестановок,

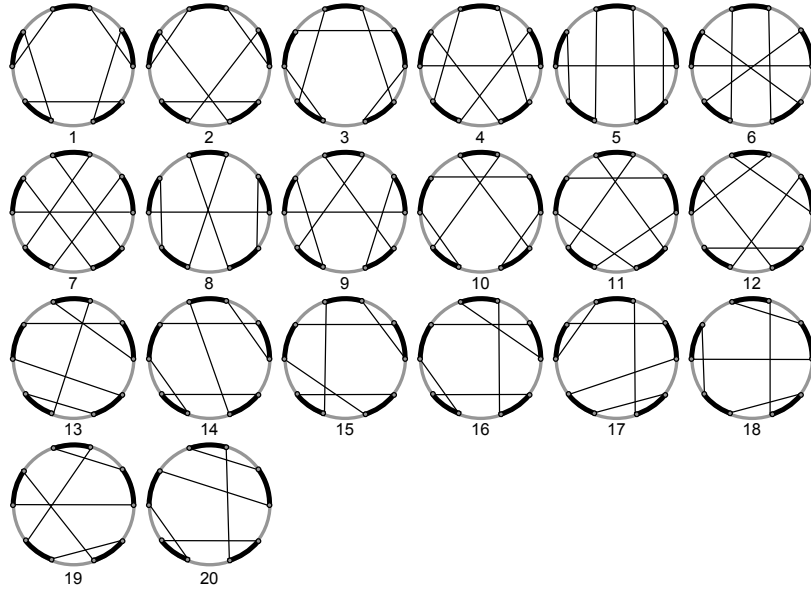


Рис. 4.9. (Топологічні) інваріанти для топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(N_4)$ .

які визначають підклас  $\mathfrak{S}_{1,k;n}^O$  саме  $O$ -діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,k;n}$ . Тому число  $d_N(n, k)$  діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,k;n}^N$  можна обчислити за допомогою співвідношення

$$d_N(g+1, k) = S_H^\pm(g, k) - S_H^+(g, k).$$

З урахуванням співвідношення (1.4), при  $k = 1$  для натуральних  $g = n - 1$  маємо справедливість формули (4.15).  $\square$

**Лема 4.5.** Для довільного простого  $n = g + 1 > 2$  число  $d_N^*(n)$  неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$  можна обчислити за такою формулою:

$$d_N^*(n) = \frac{d_N(n)}{n} = \frac{1}{g+1} \left( S_H^\pm(g, 1) - S_H(g, 1) \right). \quad (4.16)$$

$g$	$n = g + 1$	$S_H^\pm(g, 1)$ , A001171 в [24]	$S_H(g, 1)$ , A060593 в [24]	$d_N(n) = S_H^\pm(g, 1) - S_H(g, 1)$
1	2	1	0	1
2	3	4	1	3
3	4	20	0	20
4	5	148	8	140
5	6	1 348	0	1 348
6	7	15 104	180	14 924
7	8	198 144	0	198 144
8	9	2 998 656	8 064	2 990 592
9	10	51 290 496	0	51 290 496
10	11	979 732 224	604 800	979 127 424
11	12	20 661 458 688	0	20 661 458 688
12	13	476 936 766 720	68 428 800	476 868 337 920

ТАБЛ. 4.3. Початкові значення величин  $d_N(n)$

*Доведення.* За лемою Бернсайда (та з урахуванням, наприклад, результатів робіт [7] та [10]) число  $d_N^*(n)$  неізоморфних (відносно дії циклічно групи) діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$  можна обчислити за допомогою співвідношення

$$d_N^*(n) = \frac{1}{n} \left( d_N(n) + \sum_{i|n, i \neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \nu(n, i) \right), \quad (4.17)$$

де  $\nu(n, i)$  — число тих діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$ , які «самосуміщуються» при повороті на кут  $\omega_{n,i} = \frac{2\pi \cdot i}{n}$  навколо центру 2-кольорового  $2n$ -шаблону (за годинниковою стрілкою), а  $\phi(q)$  — функція Ейлера.

Оскільки  $n$  є простим, то знаходження (4.17) зводиться до обчислення величини  $\nu(n, 1)$ . В [10, лема 2.2] було встановлено, що для непарних  $n$  число  $\rho(n, i)$  тих діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n;1}^N$ , які самосуміщуються при повороті на кут  $\omega_{n,i} (i|n)$  навколо центру 2-кольорового  $2n$ -шаблону (за годинниковою стрілкою), можна

обчислити за формулою

$$\rho(n, i) = \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot (i-1)! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \cdot (2^{i-1} - 1). \quad (4.18)$$

Звідки (для непарних  $n$  та класу  $\mathfrak{S}_{n;1}^N$ )  $\rho(n, 1) \equiv 0$ . А з того, що  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N \subset \mathfrak{S}_{n;1}^N$  випливає, що  $\nu(n, 1) = 0$ .  $\square$

**Зауваження 4.6.** З урахуванням леми 4.5 для числа неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$  в якості асимптотичної оцінки (при  $n \rightarrow \infty$ ) можна прийняти величину

$$\delta^*(n) = \left[ \frac{1}{n} \cdot d_N(n) \right].$$

**4.7. Підрахунок числа нееквівалентних діаграм з класів  $\mathfrak{S}_{1,1;6}^N$  та  $\mathfrak{S}_{1,1;7}^N$  (числа топологічно нееквівалентних функцій з класів  $C_{1,1}(N_5)$  та  $C_{1,1}(N_6)$ ).**

**Лема 4.8.** Число нееквівалентних (відносно дії групи діедра) діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;6}^N$  становить 125, тобто

$$d_N^{**}(6) = 125. \quad (4.19)$$

*Доведення.* За лемою Бернсайда та з урахуванням, наприклад, результатів робіт [7] та [10], має місце рівність

$$d_N^{**}(6) = \frac{1}{2} \left( d_N^*(6) + \frac{1}{2}(s_1(6) + s_2(6)) \right), \quad (4.20)$$

$$d_N^*(6) = \frac{1}{6} \left( d_N(6) + \phi(1)\nu(6, 1) + \phi(3)\nu(6, 2) + \nu(6, 3) \right), \quad (4.21)$$

де  $s_1(6)$  ( $s_2(6)$ ) — число тих діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;6}^N$ , що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії I-го (II-го) типу, яка проходить через середини діаметрально протилежних чорних (відповідно сірих) дуг 2-кольорового 12-шаблону,  $\phi(q)$  — функція Ейлера (кількість натуральних менших за  $q$  чисел, взаємно простих із ним), а  $\nu(6, i)$  — число тих діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;6}^N$ , які самосуміщуються при повороті (навколо центра 2-кольорового 12-шаблону) на кут  $\omega_{6,i} = \frac{2\pi}{6} \cdot i = \frac{\pi}{3} \cdot i$  (у напрямку за годинниковою стрілкою).

Як випливає з [10],  $\nu(n, 1) \equiv 0$  для парних  $n > 2$ .

Всі діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;6}^N$ , які самосуміщуються при повороті на кут  $\omega_{6,2} = \frac{2\pi}{3}$ , наведено на рис. 4.10. Тому  $\nu(6, 2) = 4$ .

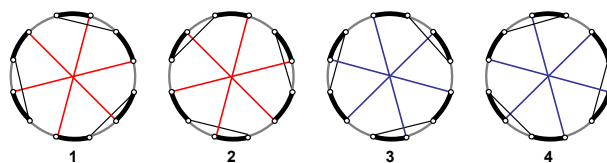


Рис. 4.10

Всі діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;6}^N$ , які самосуміщуються при повороті на кут  $\omega_{6,3} = \pi$ , наведено на рис. 4.11.

Зауважимо, що кожна з них характеризується наявністю рівно двох «діаметральних» хорд (що сполучають діаметрально протилежні вершини шаблону), інваріантних відносно повороту на зазначений кут.

Отже,  $\nu(6, 3) = 48$ . А з урахуванням співвідношення (4.21), маємо

$$d_N^*(6) = \frac{1}{6} \left( 1348 + 2 \cdot 4 + 48 \right) = \frac{1404}{6} = 234. \quad (4.22)$$

Неважко перевірити, що існує точно:

- 16 діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;6}^N$ , які є симетричними відносно фіксованої осі симетрії I-го типу, рис. 4.12;
- 16 діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;6}^N$ , які є симетричними відносно фіксованої осі симетрії II-го типу, рис. 4.13.

Таким чином,  $s_1(6) = s_2(6) = 16$ .

З урахуванням співвідношення (4.20), остаточно маємо

$$d_N^{**}(6) = \frac{1}{2} \left( 234 + \frac{1}{2} (16 + 16) \right) = 125.$$

Лемму доведено. □

**Зауваження 4.9.** Рівність  $s_1(6) = s_2(6)$ , одержана під час доведення, не є випадковою, тому що для парних  $n$  зазначеною

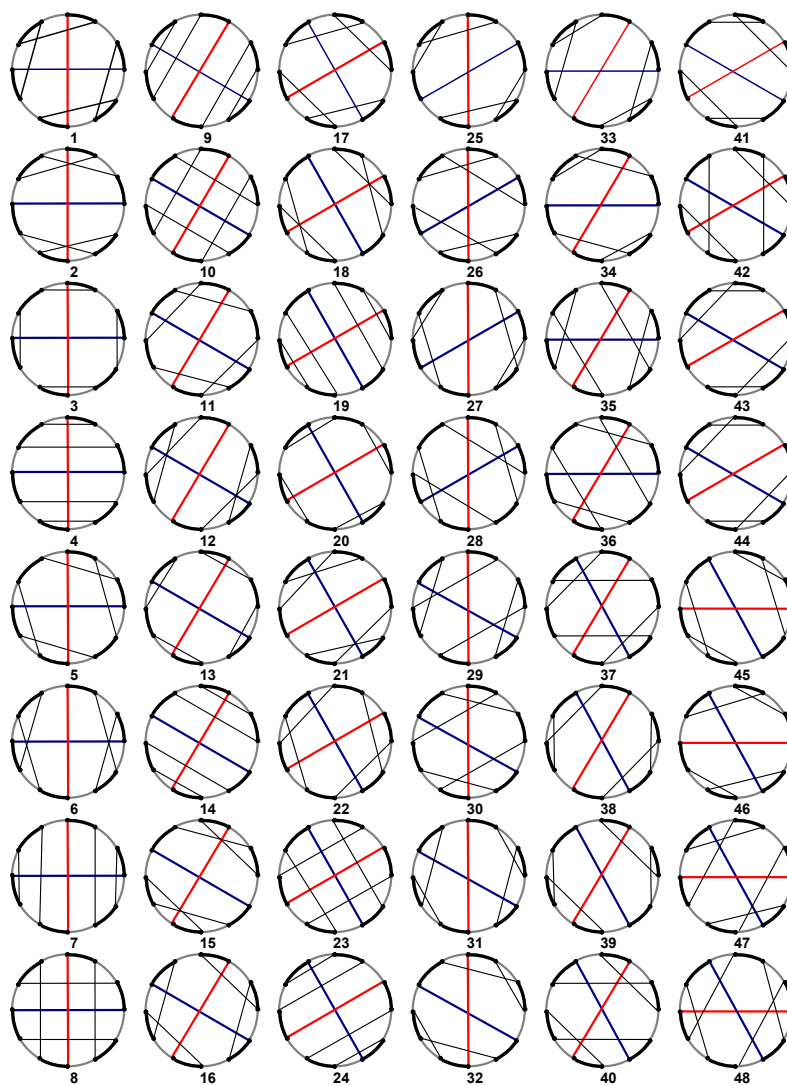


Рис. 4.11

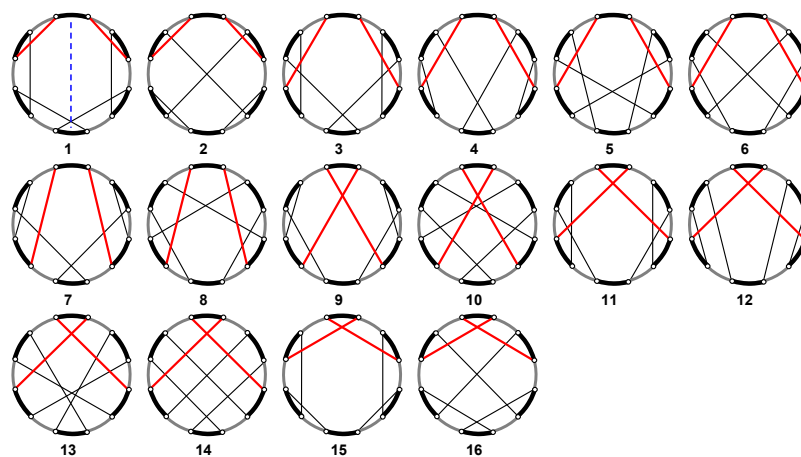


Рис. 4.12

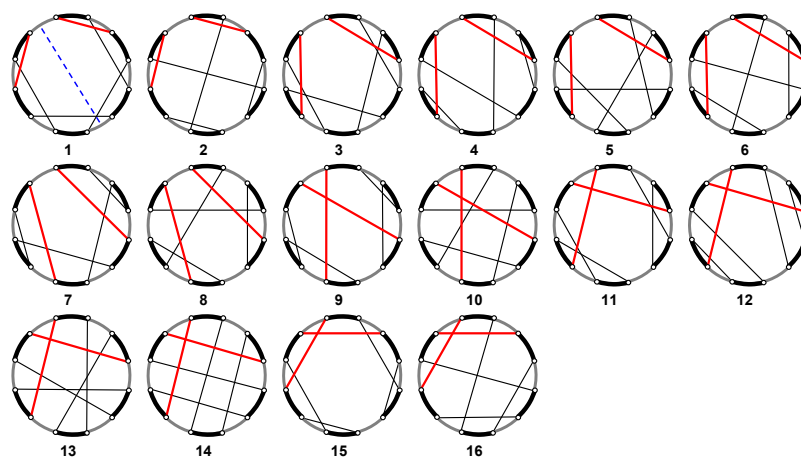


Рис. 4.13

властивістю володіє кожен клас двокольорових  $n$ -діаграм, які

мають однакову кількість чорних та сірих циклів. А тому співвідношення для підрахунку числа нееквівалентних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;2m}^N$  набуває очевидного спрощення

$$d_N^{**}(2m) = \frac{1}{2} \left( d_N^*(2m) + \bar{s}(2m) \right), \quad (4.23)$$

де  $\bar{s}(2m)$  — число діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;2m}^N$ , що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії I-го (або II-го) типу, яка проходить через середини діаметрально протилежних чорних (відповідно сірих) дуг 2-кольорового  $2m$ -шаблону.

**Наслідок 4.10.** Число топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(N_5)$  становить 125.

**Лема 4.11.** Число нееквівалентних (відносно дії групи діедра) діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;7}^N$  становить 1136, тобто

$$d_N^{**}(7) = 1136. \quad (4.24)$$

*Доведення.* За лемою Бернсайда та з урахуванням леми 4.5 має місце рівність

$$d_N^{**}(7) = \frac{1}{2} (d_N^*(7) + s_0(7)) = \frac{1}{2} \left( \frac{d_N(7)}{7} + s_0(7) \right), \quad (4.25)$$

де  $s_0(7)$  — число тих діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;7}^N$ , що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії (яка проходить через середини діаметрально протилежних сірої та чорної дуг) 2-кольорового 14-шаблону.

Очевидно, що існує лише 12 типів симетричних (відносно фіксованої осі симетрії 2-кольорового 14-шаблону) 2-кольорових  $N$ -діаграм з 7 хордами, рис. 4.14.

Всі симетричні діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;7}^N$  наведено за типами на рисунках 4.15–4.18 нижче.

Таким чином  $s_0(7) = 140$ . А з урахуванням співвідношення (4.25), остаточно маємо  $d_N^{**}(7) = \frac{1}{2} (2132 + 140) = 1136$ .  $\square$

**Наслідок 4.12.** Число топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(N_6)$  становить 1136.



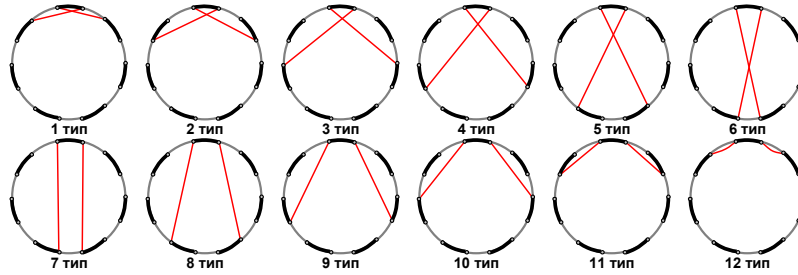


Рис. 4.14

$g$	1	2	3	4	5	6	10	12
$n$	2	3	4	5	6	7	11	13
$d_N^*(n)$	1	1	6	28	234	2 132	89 011 584	36 682 179 840
$d_N^{**}(n)$	1	1	4	20	125	1 136	?	?

ТАБЛ. 4.4. Початкові значення величин  $d_N^*(n)$  та  $d_N^{**}(n)$

4.13. Асимптотична оцінка для  $d_N^{**}(n)$ . Використовуючи результати робіт [15], [14] та [10], не важко встановити, що для певного класу  $L_n$  2-кольорових  $n$ -діаграм в якості асимптотичної оцінки (при  $n \rightarrow \infty$ ) для числа нееквівалентних (відносно дії групи діедра порядку  $2n$ ) діаграм із зазначеного класу можна прийняти величину  $\bar{\delta}_n = \left\lfloor \frac{|L_n|}{2n} \right\rfloor$ .

Тому (з урахуванням зауваження 4.6) для числа нееквівалентних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$  в якості асимптотичної оцінки при  $n \rightarrow \infty$  (в «першому наближенні») можна прийняти величину  $\delta^{**}(n) = \left\lfloor \frac{d_N(n)}{2n} \right\rfloor$ .

Для першого і другого доданків суми (1.5) уведемо наступні позначення

$$SHN_1(g) = \frac{2^{3g+1} \cdot (g+1)! \cdot (g!)^2}{(2g+2)!},$$

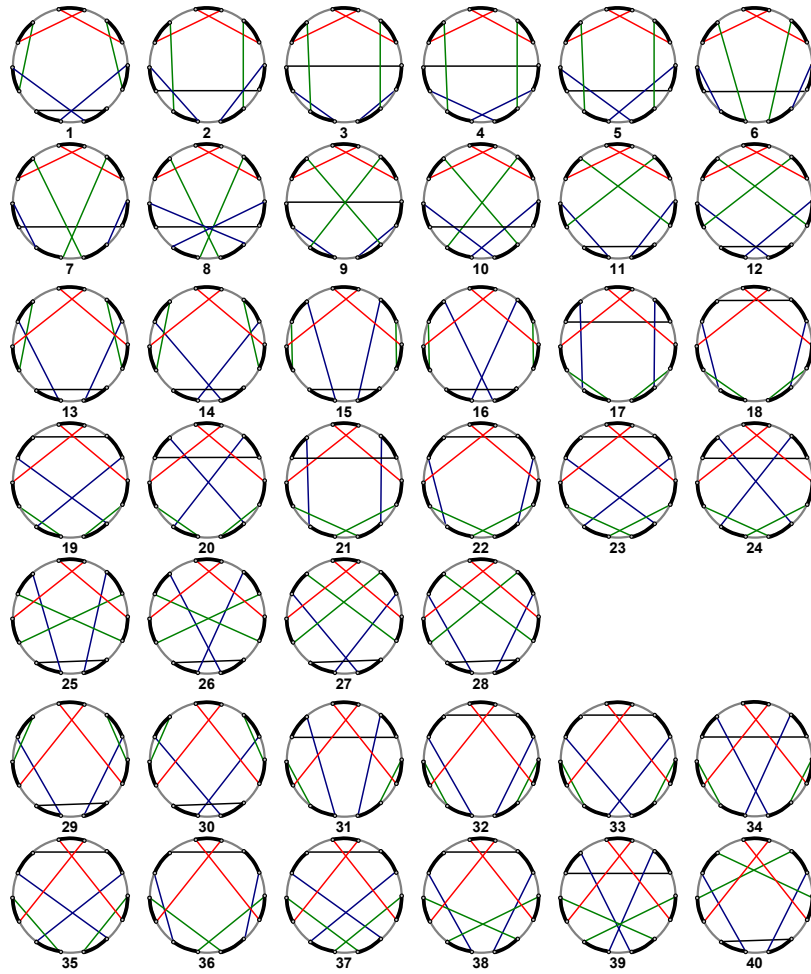


Рис. 4.15. Всі симетричні діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;7}^N$  2, 3 і 4 типів.

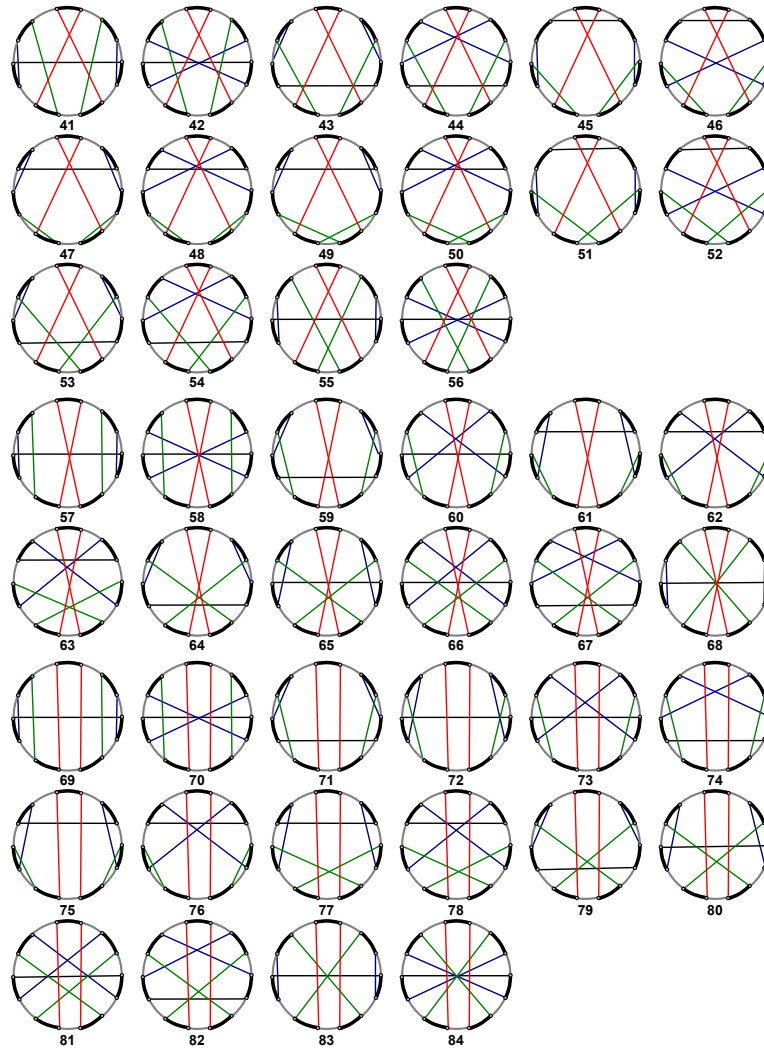


Рис. 4.16. Всі симетричні діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;7}^N$  5, 6 і 7 типів.

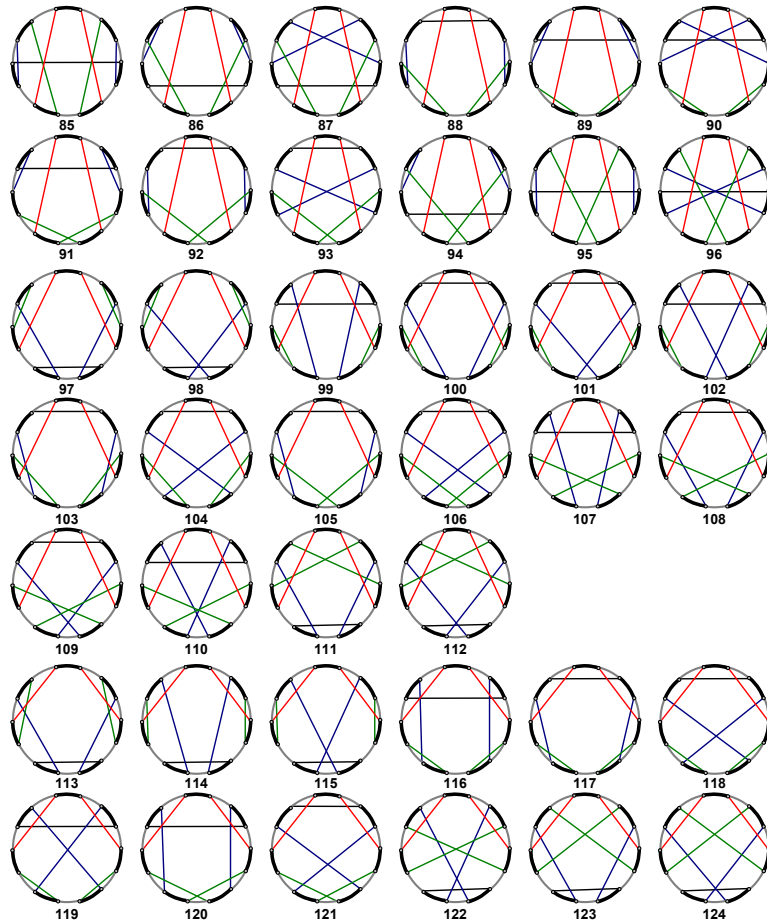


Рис. 4.17. Всі симетричні діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;7}^N$  8, 9 і 10 типів.

$$SHN_2(g) = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{\min(i; g+1-i)} c(i; j) \cdot \left[ \frac{2^{i-j-1} (2j)! (i-1)! (g+2-i-j)!}{(2j-1)j!} \right]^2,$$

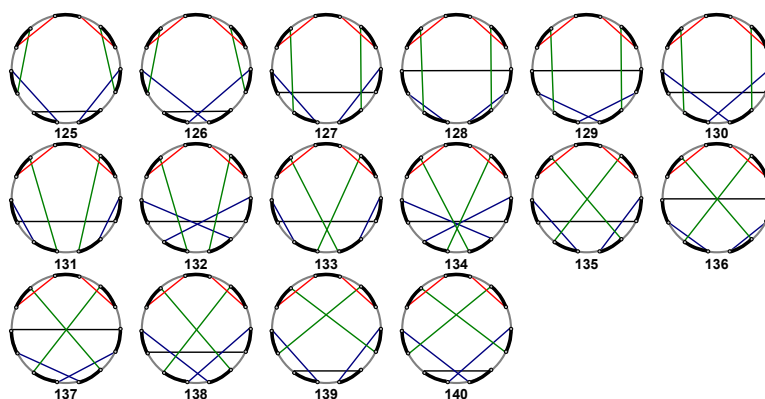


Рис. 4.18. Всі симетричні діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{1,1;7}^N$  11 типу.

де  $c(i; j)$  визначається за формулою (1.6).

Тоді мають місце наступні властивості:

- 1<sup>0</sup>) для довільного натурального  $g$  величина  $SGN_2(g) < 0$ ;
- 2<sup>0</sup>)  $\lim_{g \rightarrow \infty} \frac{SGN_1(g)}{\overline{4g} \cdot |SGN_2(g)|} = 1$ .

З іншого боку, з урахуванням формули (4.15), при  $g \rightarrow \infty$  в якості величини  $d_N(n) = d_N(g + 1)$  природно обрати величину  $S_H^\pm(g; 1) = SHN_1(g) + SHN_2(g)$ .

Тоді, застосовуючи властивість 2<sup>0</sup>), не важко показати, що при  $g \rightarrow \infty$  відношення

$$\frac{S_H^\pm(g; 1)}{2(g + 1)} \quad \text{та} \quad \frac{2^{3g} \cdot (g!)^3}{(2g + 2)!}$$

є еквівалентними нескінченно великими величинами.

Таким чином, одержано асимптотичну оцінку для  $d_N^{**}(n)$ . А саме:

**Твердження 4.14.** При  $n \rightarrow \infty$

$$d_N^{**}(n) \sim \bar{\delta}(n) = \frac{2^{3(n-1)} \cdot ((n-1)!)^3}{(2n)!}. \quad (4.26)$$

#### ВИСНОВКИ ТА ПРИКІНЦЕВІ ЗАУВАЖЕННЯ

Таким чином, в представлений роботі:

1) повністю розв'язано задачу про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(M_g)$  (на замкнених орієнтовних поверхнях роду  $g \geq 0$ );

2) вперше встановлено точне значення числа топологічно нееквівалентних функцій з класів  $C_{1,1}(N_5)$  та  $C_{1,1}(N_6)$  (на замкнених неорієнтовних поверхнях роду 5 і 6);

3) досліджено асимптотичну поведінку числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(N_g)$ , коли  $g \rightarrow \infty$ .

Крім того, як з'ясувалось, існує тісний зв'язок між задачею про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(M_g)$ , відомою «Задачею комівояжера» («Travelling salesman problem») [22] та задачами про перестановки геному [19].

Подальша робота може бути пов'язана із:

- 1) узагальненням одержаних результатів на випадок зняття обмеження про збереження орієнтації гомеоморфізму  $h': \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  у означенні топологічно еквівалентних функцій;
- 2) встановленням формул для підрахунку точного значення числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(N_g)$ .

Аналізуючи результати робіт [23] і [11], цілком досяжним здається розв'язання задач про підрахунок числа  $O$ -топологічно та топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,n-2}(M_1)$  (на двовимірному торі  $T^2$ ).

## ЛІТЕРАТУРА

- [1] Prishlyak A. O. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface // *Topology Appl.* — 2002. — **119**, 3. — P. 257–267.
- [2] Шарко В. В. Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях // *Укр. мат. журн.* — 1998. — **55**, 5. — С. 687–700.
- [3] Кадубовський О. А. Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях // *Укр. мат. журн.* — 2006. — **58**, 3. — С. 343–351.
- [4] Кадубовський А. А. Топологическая классификация гладких функций с одной критической точкой типа седло на неориентируемых поверхностях // *Труды международного геометрического центра.* — 2008. — **1**, 1–2. — С. 13–22.
- [5] Кадубовський О. А. Про число топологічно нееквівалентних функцій з однією виродженою критичною точкою типу сідла на двовимірній сфері // *Проблеми топології та суміжні питання.* — 2010. — **3**, 3. — С. 87–107.
- [6] Кадубовский А. А. О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II // *Труды международного геометрического центра.* — 2015. — **8**, 1. — С. 46–61.
- [7] Кадубовський О. А. Про один клас хордових діаграм максимального роду // *Вісник Київського університету ім. Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки.* — 2006. — **1**. — С. 17–27.
- [8] Кадубовський О. А., Вощина Л. В. Про число нееквівалентних двокольорових хордових  $O$ -діаграм максимального роду // *Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ.* — 2015. — **5**. — С. 51–64.
- [9] Kadubovskiy O. A., Voschana L. V. Enumeration of 2-color chord diagrams of maximal genus under rotation and reflection // *Sixteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk*

- Conference, May 14–15, 2015, Kyiv: Conference materials. Vol. 2. Algebra. Geometry. Analysis.* — 2015. — **2**. — P. 20–21.
- [10] Кадубовський А. А. Двухцветные хордовые  $N$ -диаграммы с одним черным циклом // *Труды института прикладной математики и механики НАН Украины.* — 2012. — 24. — С. 134–146.
- [11] Grusea Simona, Labarre Anthony. The distribution of cycles in breakpoint graphs of signed permutations // *Discrete Appl. Math.* — 2013. — **161**, 10–11. — P. 1448–1466.
- [12] Cori Robert, Marcus Michel. Counting non-isomorphic chord diagrams // *Theoret. Comput. Sci.* — 1998. — **204**, 1–2. — P. 55–73.
- [13] Stoimenow A. Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants // *J. Knot Theory Ramifications.* — 1998. — **7**, 1. — P. 93–114.
- [14] Мантуров В. О. Атомы, высотные атомы, хордовые диаграммы и узлы. Перечисление атомов малой сложности с использованием языка Mathematica 3.0 // *Топологические методы в теории гамильтоновых систем: сборник статей под ред. А.В. Болсинова, А.Т. Фоменко, А.И. Шафаревича.* — 1998. — С. 203–212.
- [15] Khruzin A. Enumeration of chord diagrams // *arXiv:math.CO/0008209.* — 1998.
- [16] Callan D. Non-crossing Partitions under Rotation and Reflection // *arXiv:math.CO/0510447.* — 2000.
- [17] Кадубовський О. А., Сторожилова О. В., Сторожилова Н. В. Двокольорові  $O$  і  $N$ -діаграми // *Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки.* — 2010. — **10**, 1. — С. 41–50.
- [18] Кадубовський О. А., Саприкіна Ю. С., Мазур С. Ю. Двокольорові  $O$ -діаграми з одним чорним циклом // *Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки.* — 2010. — **10**, 1. — С. 51–60.



- [19] *Bafna Vineet, Pevzner Pavel A.* Genome rearrangements and sorting by reversals // *SIAM J. Comput.* — 1996. — **25**, 2. — P. 272–289.
- [20] *Boccaro G.* Nombre de représentations d'une permutation comme produit de deux cycles de longueurs données // *Discrete Math.* — 1980. — **29**, 2. — P. 105–134.
- [21] *Hanlon Philip J., Stanley Richard P., Stembridge John R.* Some combinatorial aspects of the spectra of normally distributed random matrices // Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials, and applications (Tampa, FL, 1991). — Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992. — **138** of *Contemp. Math.* — P. 151–174.
- [22] *Helsgaun Keld.* General  $k$ -opt submoves for the Lin-Kernighan TSP heuristic // *Math. Program. Comput.* — 2009. — **1**, 2-3. — P. 119–163.
- [23] *Doignon Jean-Paul, Labarre Anthony.* On Hultman numbers // *J. Integer Seq.* — 2007. — **10**, 6. — P. Article 07.6.2, 13.
- [24] «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences» // *published electronically at <http://oeis.org>.*