

*И. Ю. Власенко, Т. В. Рыбалкина*

*Институт математики НАН Украины, Киев.*  
vlasenko@imath.kiev.ua, rybalkina\_t@ukr.net

## **Примеры внутренних отображений цилиндра с нейтрально неблуждаю- щими точками, не являющимися нейтрально рекуррентными**

We construct examples of inner mappings of cylinder with neutrally non-wandering points that are not neutrally recurrent.

Побудовано приклади внутрішніх відображень циліндра, які мають нейтрально неблуждаючі точки, що не є нейтрально рекуррентними.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] были введены новые топологические инварианты внутренних отображений, в качестве модели для которых были взяты инвариантные множества динамических систем, образованные гомеоморфизмами. В частности, были введены множества нейтрально рекуррентных и нейтрально неблуждающих точек. Как известно, их аналоги — множества рекуррентных и неблуждающих точек различны (см. [3], глава 1.1). Однако оставался открытым вопрос, различны ли множества нейтрально рекуррентных и нейтрально неблуждающих точек. Построенный в [4] пример дал на этот вопрос положительный ответ. Однако построенное отображение является внутренним отображением некоторого абстрактного топологического пространства, не вложимого ни в какое конечномерное многообразие. В данной работе также построены примеры отображений, у которых нейтрально неблуждающее множество отлично от

нейтрально рекуррентного множества, а также дополнительно нейтрально неблуждающее множество отлично от нейтрально предельного множества, и нейтрально предельное множество отлично от нейтрально рекуррентного множества. Кроме того, в отличие от примера в [4], построенного на некотором абстрактном топологическом пространстве, данные примеры являются накрытиями двумерного цилиндра.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

*Внутренним отображением* будем называть открытое (образ открытого множества открыт) изолированное (прообраз каждой точки состоит из изолированных точек) отображение. Пусть  $f: X \rightarrow X$  — внутренний эндоморфизм цилиндра  $X = \mathbb{R} \times S^1$ .

Следующие определения были введены в [1, 2].

**Определение 2.1.** *Нейтральным сечением точки  $x$  назовем множество*

$$O_f^\perp(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(f^n(x)). \quad (2.1)$$

**Определение 2.2.** *Точка  $x$  называется нейтрально рекуррентной (или  $\perp$ -рекуррентной), если  $x$  граничная точка для множества  $O_f^\perp(x) \setminus \{x\}$ .*

**Определение 2.3.** *Точка  $x$  называется блуждающей точкой  $f$ , если найдется такая ее окрестность  $U$ , что  $f^m(U) \cap U = \emptyset$  для всех  $m \in \mathbb{Z}$ . При этом  $U$  называется окрестностью блуждания для  $x$ . Иначе точка называется неблуждающей.*

Определение ниже применимо только для локально связных пространств, но в данном случае его достаточно. Общая форма этого определения есть в [2].

**Определение 2.4.** Точка  $x$  называется **нейтрально блуждающей** (или  **$\perp$ -блуждающей**) точкой  $f$ , если найдется открытая окрестность  $U$  точки  $x$  такая, что  $U$  является компонентой связности множества  $\cup_{n \geq 0} f^{-n}(f^n(U))$ . При этом  $U$  называется **окрестностью  $\perp$ -блуждания** для  $x$ . Иначе точка называется  **$\perp$ -неблуждающей**.

Здесь и везде знак  $\perp$ - будет синонимом и сокращением слова “нейтрально”. Тогда в определениях выше  $\perp$ -блуждающее означает нейтрально блуждающее,  $\perp$ -рекуррентное означает нейтрально рекуррентное и т. д.

**Определение 2.5.** Множество  $U$  назовем **нейтрально инвариантным** относительно  $f$ , если для всех  $x \in U$ ,  $O_f^\perp(x) \subset U$ .

**Определение 2.6.** Множество  $f^{-n}(f^n(U)) \setminus f^{-(n-1)}(f^{n-1}(U))$  назовем  **$n$ -й нейтральной итерацией** множества  $U$ .

**Определение 2.7.** **Нейтральным предельным множеством** точки  $x$  назовем

$$\perp(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{O_f^\perp(x) \setminus f^{-n}(f^n(x))}$$

**Определение 2.8.** Множество точек  $y$  таких, что найдется  $x$ , такое, что  $y \in \perp(x)$ , назовем **множеством нейтральных предельных точек** отображения  $f$  и обозначим через  $\text{Lim}^\perp(f)$ .

### 3. ИТЕРИРОВАННАЯ ГРУППА МОНОДРОМИИ

**Определение 3.1.** Открытое множество  $U$  **правильно накрыто** отображением  $f$ , если  $f^{-1}(U)$  можно представить в виде дизъюнктного объединения открытых множеств  $V_i \subset X$ , каждое из которых гомеоморфно отображается на  $U$  при помощи  $f$ .

**Определение 3.2.** Непрерывное отображение  $f: X \rightarrow X$  называется **накрывающим**, если любая точка  $x \in X$  имеет

открытую окрестность, правильно накрытую отображением  $f$ . В этом случае мы говорим, что  $f$  — накрытие.

**Определение 3.3.** Гомеоморфизм  $h: X \rightarrow X$  называется *скольжением* или же *автоморфизмом накрытия*  $f: X \rightarrow X$ , если  $f \circ h = f$ .

Предположим, что  $X$  — многообразие с абелевой фундаментальной группой  $\pi_1(X)$ , для которого существует накрывающее отображение  $f: X \rightarrow X$ . Тогда для каждого  $n \geq 1$  отображения  $f^n$  также являются накрытиями. Отметим, что  $f$  индуцирует гомоморфизм фундаментальной группы  $\pi_1(X)$  в себя. Поскольку  $\pi_1(X)$  — абелева, то образ  $\pi_1(X)$  является нормальной подгруппой в  $\pi_1(X)$ . Такие накрытия называют *регулярными*. В этом случае фактор-группа  $G_f = \pi_1(X)/f(\pi_1(X))$  действует на  $X$ , так, что отображение  $f$  можно рассматривать как фактор-отображение  $f: X \rightarrow X/G_f \cong X$ .

Аналогично, так как  $\pi_1(X)$  абелева, то накрытие  $f^n: X \rightarrow X$  также будет регулярным, а значит  $f^n: X \rightarrow X/G_{f^n} \cong X$ , где  $G_{f^n} = \pi_1(X)/f^n(\pi_1(X))$  — группа автоморфизмов накрытия  $f^n$  (см., например, [5]).

Другими словами, мы имеем убывающую последовательность нормальных подгрупп

$$\pi_1 X \supset f(\pi_1 X) \supset \dots \supset f^n(\pi_1 X) \supset f^{n+1}(\pi_1 X) \supset \dots,$$

и соответствующую возрастающую последовательность фактор-групп:

$$G_f \subset G_{f^2} \subset \dots \subset G_{f^n} \subset \dots.$$

Прямой предел этих групп по вложению обозначим через  $G_{f^\infty}$  и назовем *группой итерированной монодромии накрытия  $f$* . Эта группа действует на  $X$  гомеоморфизмами.

Для произвольной точки  $x \in X$  рассмотрим точку  $f^n(x)$ . Элементы группы  $G_{f^n}$  — гомеоморфизмы  $X \rightarrow X$ , которые отображают точку  $x$  в различные прообразы точки  $f^n(x)$  под действием  $f^{-n}$ . Поэтому значение многозначного отображения

$f^{-n} \circ f^n$  в точке  $x$  совпадает с объединением значений всех элементов группы  $G_{f^n}$  в точке  $x$ , т. е.

$$f^{-n}(f^n(x)) = \bigcup_{h \in G_{f^n}} h(x).$$

Отсюда вытекает, что группа  $G_{f^\infty}$  итерированной монодромии накрытия  $f$  оставляет инвариантными нейтральные сечения точек.

#### 4. СЕМЕЙСТВО НАКРЫТИЙ ЦИЛИНДРА

Будем строить примеры с помощью специального семейства внутренних отображений двумерного цилиндра  $\mathbb{R} \times S^1$ , с координатами  $r \in \mathbb{R}$  и  $\varphi \in [0, 1)$ . Эти внутренние отображения имеют вид  $f(r, \varphi) = (r + 1 + d(r, \varphi), 2\varphi)$ , где функция  $d(r, \varphi)$  подобрана так, что при любом фиксированном значении  $\varphi$  отображение  $r + d(r, \varphi)$  является гомеоморфизмом отрезка  $[0, 1]$  на себя, а отображение  $f(r, \varphi)$  топологически сопряжено само с собой с помощью гомеоморфизма сдвига  $r \mapsto r + 1$ . Как следствие, тогда  $d(r + 1, \varphi) = d(r, \varphi)$ . Легко проверить, что координатные прямые  $\varphi = \text{const}$  этого цилиндра образуют для всех отображений такого вида инвариантное слоение. В частности, прямая  $\varphi = 0$  отображается ими в себя.

В таком виде эти отображения являются накрытиями цилиндра степени 2. Группа автоморфизмов такого накрытия является циклической степени 2. Соответственно, группа автоморфизмов  $k$ -й степени такого накрытия является циклической степени  $2^k$ , а описанная выше группа итерированной монодромии — группой двоично-рациональных вычетов по модулю 1.

Для гомеоморфизма группы итерированной монодромии накрытий цилиндра можно ввести обозначения вида  $h_\varphi$ , где  $h_0$  — тождественное отображение, а  $h_\psi$  — автоморфизм некоторой степени накрытия, который переводит прямую  $\varphi = 0$  в прямую  $\varphi = \psi$ . Из коммутативности следует, что  $h_{\varphi_1} \circ h_{\varphi_2} = h_{\varphi_1 + \varphi_2}$ .

## 5. ПОСТРОЕНИЕ ПРИМЕРОВ

Построим примеры накрытий цилиндра, у которых есть  $\perp$ -неблуждающие точки, не являющиеся  $\perp$ -рекуррентными.

**Пример 5.1.** *Пример отображения, имеющего  $\perp$ -неблуждающие  $\perp$ -предельные, но не  $\perp$ -рекуррентные точки.*

**Построение.** Пусть внутреннее отображение цилиндра  $f(r, \varphi) = (R(r, \varphi), \Phi(\varphi))$  задано с помощью пары функций  $R(r, \varphi) = r + 1 + d(r, \varphi)$  и  $\Phi(\varphi) = 2\varphi$ , где

$$d(r, \varphi) = \frac{1}{4} \min(\{r\}, 1 - \{r\}) \min(\{\varphi\}, 1 - \{\varphi\}),$$

причем функция  $d(r, \varphi)$  подобрана так, чтобы отображение  $r + d(r, \varphi)$  при любом фиксированном значении  $\varphi$  являлось гомеоморфизмом отрезка  $[0, 1]$  на себя.

Благодаря специальному виду функции  $d(r, \varphi)$ , отображение  $f^{-1}$ , обратное к отображению  $f$ , можно выписать явно. Именно, пусть  $f((r', \varphi')) = (r, \varphi)$ . Тогда

$$\begin{cases} r' + 1 + \frac{1}{4} \min(\{r'\}, 1 - \{r'\}) \min(\{\varphi\}, 1 - \{\varphi\}) = r \\ 2\varphi' \bmod 1 = \varphi. \end{cases}$$

Заметим, что обозначение точки прообраза через  $(r', \varphi')$  неоднозначно. Отображение  $f$  является накрытием степени 2, поэтому у точки  $(r, \varphi)$  ровно 2 прообраза. Обозначим их  $(r'_0, \varphi'_0)$  и  $(r'_1, \varphi'_1)$ .

Отображение  $f$  имеет треугольный вид<sup>1</sup>, и  $\varphi'$  можно разрешить через  $\varphi$  независимо от  $r$  и  $r'$ . Для  $\varphi'$  имеется 2 значения:  $\varphi'_0 = \frac{\varphi}{2}$  и  $\varphi'_1 = (\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}) \bmod 1$ . Обозначим

$$C_0 = \frac{1}{4} \min(\{\varphi'_0\}, 1 - \{\varphi'_0\}), \quad C_1 = \frac{1}{4} \min(\{\varphi'_1\}, 1 - \{\varphi'_1\}).$$

<sup>1</sup>Отображение  $f$  от  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$  имеет треугольный вид, если его координатная функция  $f_n$  зависит только от переменной  $x_n$ ; координатная функция  $f_{n-1}$  зависит только от  $x_{n-1}$  и  $x_n$ ; координатная функция  $f_{n-2}$  зависит только от  $x_{n-2}, \dots, x_n$  и т. д.

Тогда для  $r'_0$  и  $r'_1$  выполнены соотношения

$$r'_0 + 1 + C_0 \min(\{r'_0\}, 1 - \{r'_0\}) = r,$$

$$r'_1 + 1 + C_1 \min(\{r'_1\}, 1 - \{r'_1\}) = r.$$

Запишем  $r'_i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , как сумму целой  $[r'_i]$  и дробной  $\{r'_i\}$  частей:

$$[r'_i] + \{r'_i\} + 1 + C_i \min(\{r'_i\}, 1 - \{r'_i\}) = [r] + \{r\}.$$

Функция  $d(r, \varphi)$  подобрана так, чтобы отображение  $r + d(r, \varphi)$  при любом значении  $\varphi$  являлось гомеоморфизмом отрезка  $[0, 1]$  на себя, поэтому всегда  $[r'_i] + 1 = [r]$ . Отсюда следует, что

$$\{r'_i\} + C_i \min(\{r'_i\}, 1 - \{r'_i\}) = \{r\}.$$

Тогда  $\{r'_i\}$  разрешается через  $\{r\}$  следующим образом:

$$\{r'_i\} = \begin{cases} \frac{\{r\}}{1+C_i} & \{r'_i\} \leq 1 - \{r'_i\} \\ \frac{\{r\}-C_i}{1-C_i} & \{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}. \end{cases}$$

Поскольку условия  $\{r'_i\} \leq 1 - \{r'_i\}$  и  $\{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}$  выражены в терминах искомой величины  $\{r'_i\}$ , их удобнее переписать в терминах сравнения  $\{r\}$  с некоторым пороговым значением. Если  $\{r'_i\} \leq 1 - \{r'_i\}$ , то  $\{r'_i\} \leq \frac{1}{2}$ , следовательно,  $\{r\} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_i$ . И наоборот, если  $\{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}$ , то  $\{r'_i\} \geq \frac{1}{2}$ , следовательно,  $\{r\} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_i$ . Тогда, зная  $\varphi'_i$ ,  $r'_i$  можно однозначно вычислить через  $r$  и  $\varphi'_i$ :

$$\begin{aligned} [r'_i] &= [r] - 1, \\ \{r'_i\} &= \begin{cases} \frac{\{r\}}{1+C_i} & \{r\} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_i \\ \frac{\{r\}-C_i}{1-C_i} & \{r\} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_i. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Заметим, что поскольку  $\varphi$  может принимать значения на отрезке  $[0, 1)$ , то выражения  $C_i = \frac{1}{4} \min(\{\varphi'_i\}, 1 - \{\varphi'_i\})$  принимают значения на отрезке  $[0, \frac{1}{8}]$ . При этом, если  $C_i = 0$ , то график выражения (5.2) есть график тождественного отображения, а если  $C_i > 0$ , то график выражения (5.2) представляет собой

ломаную из двух звеньев, которая строго ниже графика тождественного отображения на внутренности отрезка  $[0, 1]$  и пересекается с графиком тождественного отображения в точках  $(0, 0)$  и  $(1, 1)$ . Как следствие, для любой точки цилиндра, у которой дробная часть ее  $r$ -координаты  $\{r\} \neq 0$ , если ее прообраз под действием  $f$  не лежит на прямой  $\varphi = 0$ , то у ее прообраза дробная часть ее  $r$ -координаты будет строго меньше, чем у исходной точки.

Нейтральные итерации прямой  $\varphi = \text{const}$  всюду плотны в цилиндре. Кроме того, окружности  $r = 0 \pmod{1}$  инвариантны, и на них отображение совпадает со стандартным растягивающим отображением  $2\varphi$ . Следовательно, окружности  $r = 0 \pmod{1}$  являются нейтральным предельным множеством для своих точек.

Легко проверить, что отображение  $f$  топологически сопряжено само с собой с помощью гомеоморфизма сдвига  $r \mapsto r + 1$ . Как следствие, на всех замкнутых кольцах  $U_k$  между окружностями  $r = k$  и  $r = k + 1$  динамика одинакова с точностью до сдвига  $r \mapsto r + 1$ . Поэтому достаточно рассмотреть только одно кольцо.

Рассмотрим замкнутое кольцо  $U_0$ , ограниченное окружностями  $r = 0$  и  $r = 1$ . По построению все точки цилиндра блуждающие, а кольца между окружностями  $r = 0 \pmod{1}$  являются нейтрально инвариантными. Поэтому  $U_0$  является фундаментальной окрестностью второго рода<sup>1</sup> и для любой точки  $x \in U_0$ ,  $O_f^\perp(x) \subset U_0$ . Поскольку  $U_0$  замкнуто, то и  $\perp(x) \subset U_0$ . Для точек  $x \in \text{Int}(U_0)$  конкретный вид множеств  $\perp(x)$  зависит от свойств отображения  $f$ .

Для любого отрезка  $I_{\phi_0}$ , образованного пересечением координатной прямой  $\varphi = \phi_0$  с замкнутым кольцом  $U_0$ , множество  $\bigcup_m f^{-m}(f^m(I_{\phi_0}))$  плотно в замкнутом кольце  $U_0$ .

<sup>1</sup>См. раздел 4.6 в [2].

Рассмотрим отрезок  $I_0 = U_0 \cap \{\varphi = 0\}$ . Этот отрезок удобен тем, что для любой его внутренней точки  $x \in \text{Int}(I_0)$  образы этой точки под действием последовательности нейтральных отображений  $f^{-n} \circ f^n$  накапливаются по направлению к окружности  $r = 0$ . Докажем этот факт.

Функция  $d(r, \varphi)$  выбрана так, что когда  $\varphi = 0$ , то  $d(r, \varphi) = 0$ . Поэтому  $f^n((r, 0)) = (r + n, 0)$  для любой точки вида  $(r, 0)$  и  $n \geq 0$ . В частности, точки из  $I_0$  также имеют вид  $(r, 0)$ .

Рассмотрим вышеприведенное выражение (5.2) для вычисления прообразов точки под действием  $f^{-1}$ . Применяя его к вычислению  $f^{-n}$  из точек  $(r + n, 0)$  легко видеть, что для других точек нейтрального сечения точки  $(r, 0)$   $\varphi \neq 0$ , поэтому, как уже было отмечено выше, из выражения (5.2) следует, что дробная часть ее  $r$ -координаты будет строго меньше, чем у исходной точки.

Таким образом, точки из внутренности отрезка  $I_0$  не являются  $\perp$ -рекуррентными, и для любой точки из внутренности отрезка  $I_0$  ее нейтральные итерации все дальше сдвигаются по направлению к окружности  $r = 0$ . Возникает вопрос: как устроено нейтрально предельное множество этих точек? Стоит ли оно из окружности  $r = 0$ , или туда входят и другие точки?

Используя определение  $f$  и выражение (5.2), нейтральные итерации точек можно явно и точно вычислить. К примеру, рассмотрим нейтральное сечение точки  $A = (\frac{1}{2}, 0)$ .

Нейтральное сечение состоит из точек  $f^{-n}(f^n(A))$ . Его можно представить как объединение непересекающихся “нейтральных итераций”, множеств  $\Delta_k = f^{-k}(f^k(A)) \setminus f^{-(k-1)}(f^{k-1}(A))$ . Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \{A\} = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right\}, \\ \Delta_1 &= f^{-1}(f^1(A)) \setminus \{A\} = \left\{\left(\frac{4}{9}, \frac{1}{2}\right)\right\}, \\ \Delta_2 &= \left\{\left(\frac{64}{153}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{64}{153}, \frac{3}{4}\right)\right\}, \\ \Delta_3 &= \left\{\left(\frac{2048}{5049}, \frac{1}{8}\right), \left(\frac{2048}{5355}, \frac{3}{8}\right), \left(\frac{2048}{5355}, \frac{5}{8}\right), \left(\frac{2048}{5049}, \frac{7}{8}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Заметим, что отображение  $f$  симметрично по  $\varphi$  относительно инволюции  $\varphi \mapsto 1 - \varphi$ , поэтому нейтральное сечение и множества  $\Delta_k$  также симметричны. Соответственно, достаточно указать только половину этих множеств. В частности,

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \left\{ \left( \frac{131072}{328185}, \frac{1}{16} \right), \left( \frac{131072}{358785}, \frac{3}{16} \right), \left( \frac{131072}{369495}, \frac{5}{16} \right), \left( \frac{131072}{358479}, \frac{7}{16} \right), \dots \right\}, \\ \Delta_5 &= \left\{ \left( \frac{16777216}{42335865}, \frac{1}{32} \right), \left( \frac{16777216}{47000835}, \frac{3}{32} \right), \left( \frac{16777216}{49142835}, \frac{5}{32} \right), \left( \frac{16777216}{48394665}, \frac{7}{32} \right), \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{16777216}{49111623}, \frac{9}{32} \right), \left( \frac{16777216}{51359805}, \frac{11}{32} \right), \left( \frac{16777216}{50588685}, \frac{13}{32} \right), \left( \frac{16777216}{46930455}, \frac{15}{32} \right), \dots \right\}. \end{aligned}$$

Как мы видим, с каждой новой “нейтральной итерацией” множеством  $\Delta_k$ , максимальное значение  $r$ -координаты точек множества  $\Delta_k$  уменьшается, что подтверждает рассуждения выше. Однако этот максимум не сходится к нулю. К примеру, среди точек нейтрального сечения точки  $A = (\frac{1}{2}, 0)$  есть подпоследовательности, которые сходятся к некоторой точке  $B = (0.393208 \dots, 0) \in I_0$ .

Остановимся на этом факте подробнее. Поскольку точные значения в виде дробей точек из нейтрального сечения точки  $A$  достаточно громоздки, воспользуемся тем, что  $f$  имеет треугольный вид, и введем короткие обозначения для точек нейтральных сечений. Поскольку для любой точки цилиндра на каждой прямой  $\varphi = \text{const}$  содержится не более одной точки ее нейтрального сечения, введем для точек нейтрального сечения обозначения вида  $A_\varphi$ , где  $A$  — точка, для которой рассматривается нейтральное сечение,  $\varphi$  — угловая координата обозначаемой точки нейтрального сечения точки  $A$ . К примеру, точку  $(\frac{4}{9}, \frac{1}{2})$  обозначим через  $A_{\frac{1}{2}}$ , а исходная точка  $A = (\frac{1}{2}, 0)$  получит дополнительное обозначение  $A_0$ .

В этих обозначениях сходящиеся к  $B$  подпоследовательности можно записать как  $(A_{\frac{1}{2^n}})$  и  $(A_{1-\frac{1}{2^n}})$ . Эти две подпоследовательности симметричны и переходят друг в друга с помощью инволюции  $\varphi \mapsto 1 - \varphi$ .

Покажем, что эти подпоследовательности действительно сходятся к точке  $B$ . Из-за симметрии достаточно показать это только для подпоследовательности  $(A_{\frac{1}{2^n}})$ .

Отметим, что поскольку  $f$  самосопряжено с помощью сдвига  $r \mapsto r + 1$ , то для  $f$  существует эффективный алгоритм вычисления итераций нейтрального сечения, отличный от последовательного вычисления множеств  $f^{-n}(f^n(x))$ . Именно, пусть у нас вычислено множество  $f^{-n}(f^n(x))$ . Сдвинем его точки отображением  $r \mapsto r + 1$ . В силу самосопряженности, полученные точки принадлежат множеству  $f^{-n}(f^{n+1}(x))$ , и мы за один шаг можем получить множество  $f^{-(n+1)}(f^{n+1}(x))$ , просто применив выражение (5.2). При этом сдвиг  $r \mapsto r + 1$  и шаг  $[r'_i] = [r] - 1$  из выражения (5.2) взаимно компенсируют друг друга, поэтому там достаточно использовать только выражение для вычисления  $\{r'_i\}$ , добавляя целую часть, взятую из исходных точек. В частности, для точек замкнутого цилиндра  $U_0$  целая часть равна нулю, поэтому для них выражение для вычисления  $\{r'_i\}$  можно использовать напрямую. К примеру, точки  $A_{\frac{1}{8}}$  и  $A_{\frac{5}{8}}$  можно напрямую получить из точки  $A_{\frac{1}{4}}$ , используя (5.2). Этот способ вычислений существенно упрощает дальнейшие рассуждения.

Вернемся к вышеприведенным точным значениям точек  $A_\varphi$  первых 5 итераций нейтрального сечения точки  $A$ . Уже начиная с 4-й итерации, у этих точек, кроме точек  $A_{\frac{1}{16}}$  и  $A_{\frac{15}{16}}$ , которые принадлежат последовательностям  $(A_{\frac{1}{2^n}})$  и  $(A_{1-\frac{1}{2^n}})$ , значение  $r$ -координаты меньше 0.38, что меньше, чем у точки  $B$ . Следовательно, вычисленные из них с помощью (5.2) последующие итерации точек нейтрального сечения точки  $A$  будут иметь еще меньшее значение  $r$ -координаты. Выше значения 0.38 могут быть только точки, вычисленные из  $A_{\frac{1}{16}}$  и  $A_{\frac{15}{16}}$ .

$A_{\frac{15}{16}}$  и другие точки последовательности  $(A_{1-\frac{1}{2^n}})$  мы рассматривать не будем, так как они симметричны последовательности  $(A_{\frac{1}{2^n}})$  и для них справедливо все то же, что и для точек последовательности  $(A_{\frac{1}{2^n}})$ .

Рассмотрим, что можно вычислить из  $A_{\frac{1}{16}}$ . Это точки  $A_{\frac{1}{32}}$  и  $A_{\frac{17}{32}}$ .  $A_{\frac{1}{32}}$  принадлежит последовательности  $(A_{\frac{1}{2^n}})$ . Рассмотрим  $A_{\frac{17}{32}}$ .  $A_{\frac{17}{32}}$  вычислена из  $A_{\frac{1}{16}}$ . Сравним ее с  $A_{\frac{9}{16}}$ , которая вычислена из  $A_{\frac{1}{8}}$ . Для этих точек выражение (5.2) имеет вид  $\{r'_i\} = \frac{\{r\}}{1+C_i}$ . По сравнению с  $A_{\frac{9}{16}}$ , у  $A_{\frac{17}{32}}$  значение исходной  $r$ -координаты меньше, так как взято у  $A_{\frac{1}{16}}$ , а не  $A_{\frac{1}{8}}$ , а выражение  $1 + C_i$  больше, так как  $\frac{17}{32}$  ближе к  $\frac{1}{2}$ , чем  $\frac{9}{16}$ . Поэтому  $r$ -координата точки  $A_{\frac{17}{32}}$  меньше, чем у точки  $A_{\frac{9}{16}}$ , следовательно, также меньше 0.38. Рассуждая по индукции, это же справедливо и для всех точек последовательности  $(A_{\frac{2^{n-1}+1}{2^n}})$ , вычисляемых их точек последовательности  $(A_{\frac{1}{2^{n-1}}})$ .

Осталось проверить, действительно ли у точек последовательности  $(A_{\frac{1}{2^n}})$   $r$ -координата не стремится к нулю. Вычислим явно эту последовательность.  $\varphi$ -координата точки  $A_{\frac{1}{2^n}}$  — это  $\frac{1}{2^n}$ . В соотношении  $\{r'_0\} = \frac{\{r\}}{1+C_0}$ ,  $C_0 = \frac{1}{4} \min(\{\varphi'_0\}, 1 - \{\varphi'_i\}) = \frac{1}{4}\varphi'_0$ , так как  $\varphi'_0 \leq \frac{1}{2}$ . Поэтому  $C_0 = \frac{1}{2^{n+2}}$  и  $\frac{1}{1+C_0} = \frac{2^{n+2}}{2^{n+2}+1}$ .  $r$ -координата точки  $A_{\frac{1}{2}}$  равна  $\frac{4}{9}$ , как следствие, из соотношения (5.2)  $r$ -координата точки  $A_{\frac{1}{2^n}}$  имеет вид  $\frac{4}{9} \prod_{k=2}^n \frac{2^{k+2}}{2^{k+2}+1}$ . Это выражение не сходится к нулю, поэтому последовательность точек  $(A_{\frac{1}{2^n}})$  нейтрального сечения точки  $A$  действительно сходится к некоторой точке, лежащей выше окружности  $r = 0$ , которую мы обозначим как

$$B = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{9} \prod_{k=2}^n \frac{2^{k+2}}{2^{k+2}+1}, 0 \right) = (0.393208\dots, 0).$$

Поскольку у оставшихся точек нейтрального сечения точки  $A$  значение  $r$ -координаты меньше 0.38, то и у их предельных точек значение  $r$ -координаты также меньше 0.38.

Следовательно,  $B$  — изолированная точка нейтрального предельного множества  $\perp(A)$ .

Выше мы рассмотрели нейтральное сечение единственной точки  $A = (\frac{1}{2}, 0)$  из внутренности отрезка  $I_0$ . Однако если  $r$ -координата точки отрезка  $I_0$  меньше либо равна  $\frac{1}{2}$ , то выражение (5.2) для вычисления  $r$ -координат их нейтральных итераций имеет вид  $\{r'_i\} = \frac{\{r\}}{1+C_i}$ , а, следовательно, линейно зависит от начальной точки, находящейся на отрезке  $I_0$ . Соответственно, у точек отрезка  $I_0$  с  $r$ -координатой в интервале  $(0, \frac{1}{2}]$  их нейтральное предельное множество в точности подобно вышеописанному нейтральному предельному множеству  $\perp(A)$ , только сжато по  $r$ -координате пропорционально расположению этих точек между точкой  $A = (\frac{1}{2}, 0)$  и окружностью  $r = 0$ .

Отсюда следует, что точки отрезка  $I_0$  между точкой  $B$  и окружностью  $r = 0$  принадлежат множеству нейтрально предельных точек  $\text{Lim}^\perp(f)$ .

На самом деле можно показать, что все точки отрезка  $I_0$  принадлежат множеству нейтрально предельных точек  $\text{Lim}^\perp(f)$ . Для точек, расположенных выше точки  $(\frac{1}{2}, 0)$ , рассуждения несколько усложняются, так как полное выражение (5.2) для вычисления  $r$ -координат имеет два варианта, в зависимости от того, выше или ниже  $r$ -координата значения  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_i$ . Однако, если взять достаточно высоко расположенную точку, например, точку  $(\frac{3}{4}, 0)$ , то точки ее нейтрального сечения с  $\varphi$ -координатами, принадлежащими последовательности  $(\frac{1}{2^n})$ , будут иметь  $r$ -координату, большую, чем  $\frac{1}{2}$ . Это можно доказать, полностью повторив для точки  $(\frac{3}{4}, 0)$  рассуждения, которые использовались для  $(\frac{1}{2}, 0)$ , только заменив там выражение для вычисления  $r$ -координат нейтральных итераций с  $\{r'_i\} = \frac{\{r\}}{1+C_i}$  на  $\{r'_i\} = \frac{\{r\}-C_i}{1-C_i}$ . Как следствие, получим, что точки нейтрального сечения точки  $(\frac{3}{4}, 0)$  с  $\varphi$ -координатами, принадлежащими последовательности  $(\frac{1}{2^n})$ , сходятся к некоторой точке, также принадлежащей внутренности отрезка  $I_0$ . Из линейности отображения  $\{r'_i\} = \frac{\{r\}-C_i}{1-C_i}$  этот же факт имеет место и для всех точек внутренности отрезка  $I_0$ , расположенных выше точки

$(\frac{3}{4}, 0)$ , а также для точек, расположенных ниже точки  $(\frac{3}{4}, 0)$ , но выше некоторого предела.

Рассмотрим точки внутренности отрезка  $I_0$ , расположенные между точками  $(\frac{1}{2}, 0)$  и  $(\frac{3}{4}, 0)$ . Спускаясь от точки  $(\frac{3}{4}, 0)$  к точке  $(\frac{1}{2}, 0)$ , сначала все точки нейтрального сечения точки  $(x, 0)$  с  $\varphi$ -координатами, принадлежащими последовательности  $(\frac{1}{2^n})$ , будут иметь  $r$ -координату, большую, чем  $\frac{1}{2}$  и доказательство сводится к случаю точки  $(\frac{3}{4}, 0)$ . Затем, начиная с некоторого значения  $r$ -координаты, только конечное число точек будет вычисляться с помощью выражения  $\{r'_i\} = \frac{\{r\} - C_i}{1 - C_i}$ , а бесконечное число точек — с помощью выражения  $\{r'_i\} = \frac{\{r\}}{1 + C_i}$ . В этом случае сходимость точек нейтрального сечения точки  $(x, 0)$  с  $\varphi$ -координатами, принадлежащими последовательности  $(\frac{1}{2^n})$  к некоторой точке, принадлежащей внутренности отрезка  $I_0$ , доказывается аналогично случаю точки  $(\frac{1}{2}, 0)$ .

Получим, что произвольной точке с координатами  $(x, 0)$  из внутренности отрезка  $I_0$  можно единственным образом сопоставить наивысшую по  $r$ -координате точку ее нейтрально предельного множества, причем эта наивысшая точка нейтрально предельного множества также находится во внутренности отрезка  $I_0$  и причем строго ниже исходной точки. Обозначим  $r$ -координату наивысшей точки через  $\max^+(x)$ .  $\max^+(x)$  можно рассматривать как монотонное отображение отрезка  $[0, 1]$  в себя.

Покажем, что  $\max^+(x)$  непрерывно зависит от  $x$ . Зафиксируем точку  $(x, 0)$  во внутренности отрезка  $I_0$ . Для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  обе точки  $(x \pm \varepsilon, 0)$  также принадлежат внутренности отрезка  $I_0$ . Образы отрезка  $I_0$  под действием отображений  $f^{-n} \circ f^n$  представляют собой конечные наборы отрезков  $I_\varphi$ , где  $\varphi$  — некоторый прообраз 0 относительно отображения  $2^n \varphi$ . Каждый из отрезков  $I_\varphi$  является гомеоморфным образом отрезка  $I_0$  под действием некоторой ветви отображения  $f^{-n} \circ f^n$ . Поэтому на каждом из отрезков  $I_\varphi$  будет в точности по одной точке нейтрального сечения точек  $(x, 0)$  и

$(x \pm \varepsilon, 0)$ , причем в том же порядке, что и на  $I_\varphi$ . Как следствие, нейтральное сечение точки  $(x, 0)$  и любые его подмножества мажорируются соответствующими подмножествами нейтральных сечений выше и ниже расположенных точек  $(x \pm \varepsilon, 0)$ .

В частности, поскольку подпоследовательности точек нейтрального сечения точки  $(x, 0)$  и точек  $(x \pm \varepsilon, 0)$  с  $\varphi$ -координатами, принадлежащими последовательности  $(\frac{1}{2^n})$ , сходятся, из этого следует непрерывность зависимости  $r$ -координаты  $\max^\perp(x)$  наивысшей точки нейтрального предельного множества точки  $(x, 0)$  от выбора исходной точки  $(x, 0)$ .

Отображение  $\max^\perp(x)$  отрезка  $[0, 1]$  в себя монотонно и непрерывно, следовательно, это гомеоморфизм. Отсюда следует, что все точки внутренней отрезка  $I_0$  принадлежат множеству нейтрально предельных точек  $\text{Lim}^\perp(f)$ . А так как точки окружности  $r = 0$   $\perp$ -рекуррентные, то они по определению тоже принадлежат  $\text{Lim}^\perp(f)$ . Из сопряженности сдвигом  $r \mapsto r + 1$  следует, что вся прямая  $\varphi = 0$  принадлежит  $\text{Lim}^\perp(f)$ . Поскольку множество  $\text{Lim}^\perp(f)$  замкнуто, а нейтральные образы прямой  $\varphi = 0$  всюду плотны в цилиндре, отсюда следует, что множество нейтрально предельных точек  $\text{Lim}^\perp(f)$  совпадает со всем цилиндром.

Заметим, что нейтральные итерации  $f^{-n} \circ f^n$ ,  $n \geq 1$ , переводят нейтральные сечения в нейтральные сечения, а сходящиеся подпоследовательности точек нейтрального сечения в сходящиеся подпоследовательности. Поэтому нейтральные предельные множества естественным образом самоподобны и обладают фрактальной структурой. К примеру, у нейтрального сечения точки  $A = (\frac{1}{2}, 0)$  подпоследовательность  $(A_{\frac{1}{2^n}})$  сходятся к точке  $B = (0.393208\dots, 0)$ . Следовательно, для каждой точки нейтрального сечения точки  $B$  найдется подпоследовательность точек нейтрального сечения точки  $A$ , которая к ней сходится.

Далее, для точки  $B$  наивысшей точкой ее нейтрально предельного множества является точка  $B' = (0.309225\dots, 0)$ , к которой сходится подпоследовательность  $(B'_{\frac{1}{2^n}})$  точек ее нейтрального сечения. Следовательно,  $B'$  и все точки ее нейтрального сечения также входят в множество  $\perp(A)$  и т.д. Рисунок 5.1 дает некоторое представление, как устроено множество  $\perp((\frac{3}{4}, 0))$ .

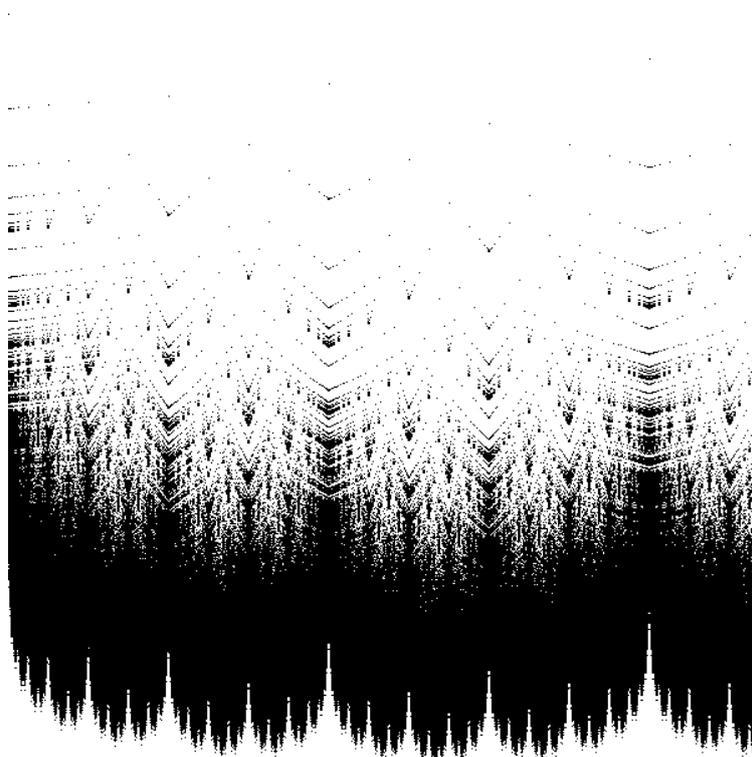


Рис. 5.1. Первые 20 итераций нейтрального сечения точки  $(\frac{3}{4}, 0)$ . Левый нижний угол  $U_0$ .

Покажем теперь, что точки внутренности отрезка  $I_0$  нейтрально неблуждающие. Для этого рассмотрим малую окрестность  $D_\varepsilon$  произвольной точки  $(x, 0)$ , являющуюся внутренностью квадрата, образованного точками  $(x - \varepsilon, -\varepsilon)$ ,  $(x + \varepsilon, -\varepsilon)$ ,  $(x + \varepsilon, +\varepsilon)$ ,  $(x - \varepsilon, +\varepsilon)$ .

Как показано выше, для произвольной точки  $C^2 = (x_2, 0)$  из внутренности отрезка  $I_0$  найдутся  $C^1 = (x_1, 0)$  и  $C^0 = (x_0, 0)$ ,  $x_0 > x_1 > x_2$ , такие, что подпоследовательность  $(C^1_{\frac{1}{2^n}})$  нейтральных сечений точки  $C^1$  стремится к  $C^2 = (x_2, 0)$ , а подпоследовательность  $(C^0_{\frac{1}{2^n}})$  нейтральных сечений точки  $C^0$  стремится к  $C^1 = (x_1, 0)$ .

Тогда в произвольно малой окрестности  $U$  точки  $C^2$  содержится некоторая подпоследовательность последовательности точек  $(C^1_{\frac{1}{2^n}})$  нейтрального сечения точки  $C^1$ , сходящаяся к  $C^2$ , и некоторый набор подпоследовательностей нейтрального сечения точки  $C^0$ , сходящиеся к точкам последовательности точек  $(C^1_{\frac{1}{2^n}})$ , содержащимся в окрестности  $U$ . Обозначим множество угловых координат точек этих подпоследовательностей нейтрального сечения точки  $C^0$  через  $E(U)$ .

Как следствие, для любой произвольно малой окрестности  $U$  точки  $C^2$  можно выбрать два двоично-рациональных числа (обозначим их  $\frac{d_1}{2^{m_1}}$  и  $\frac{d_2}{2^{m_2}}$ ), которые принадлежат  $E(U)$  и, следовательно, такие, что точки  $C^0_{\frac{d_i}{2^{m_i}}} \in U$ .

Рассмотрим ветвь нейтральной итерации, которая переводит точку  $C^2$  в точку ее нейтрального сечения  $C^2_{\frac{d_2}{2^{m_2}} - \frac{d_1}{2^{m_1}}}$ . Обозначим ее через  $h_{\frac{d_2}{2^{m_2}} - \frac{d_1}{2^{m_1}}}$ . Это гомеоморфизм, элемент группы автоморфизмов накрытия для некоторой степени  $f$ . Эта же ветвь нейтральной итерации  $h_{\frac{d_2}{2^{m_2}} - \frac{d_1}{2^{m_1}}}$  переводит точку  $C^0_{\frac{d_1}{2^{m_1}}}$  в  $C^0_{\frac{d_2}{2^{m_2}}}$ . Но  $C^0_{\frac{d_i}{2^{m_i}}} \in U$ . Следовательно, для произвольной окрестности  $U$  имеем, что

$$h_{\frac{d_2}{2^{m_2}} - \frac{d_1}{2^{m_1}}}(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Отсюда следует, что точка  $C^2$  — нейтрально неблуждающая. Искомое утверждение следует из произвольности выбора точки  $C^2$ .

Полученное отображение  $f$  является искомым примером внутреннего отображения, у которого есть  $\perp$ -неблуждающая точка, являющаяся  $\perp$ -предельной, но не являющаяся  $\perp$ -рекуррентной.  $\square$

В предыдущем примере  $\perp$ -неблуждающие точки, не являющиеся  $\perp$ -рекуррентными, были  $\perp$ -предельными.

**Пример 5.2.** *Пример отображения, имеющего  $\perp$ -неблуждающие, но не  $\perp$ -предельные (и, следовательно, не  $\perp$ -рекуррентные) точки.*

**Построение.** Заменяем в предыдущем примере 5.1 функцию  $d(r, \varphi)$  на

$$d(r, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt[2]{\min(\{r\}, 1 - \{r\})} \sqrt[4]{\min(\{\varphi\}, 1 - \{\varphi\})}.$$

Как и в примере выше, благодаря специальному виду функции  $d(r, \varphi)$ , отображение  $f^{-1}$ , обратное к отображению  $f$ , можно выписать явно. Пусть  $f((r', \varphi')) = (r, \varphi)$ . Отображение  $f$  также имеет треугольный вид, и  $\varphi'$  можно разрешить через  $\varphi$  независимо от  $r$  и  $r'$ . Как и в примере 5.1, для  $\varphi'$  имеется 2 значения:  $\varphi'_0 = \frac{\varphi}{2}$  и  $\varphi'_1 = (\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}) \bmod 1$ . Аналогично обозначим  $C_0 = \frac{1}{4} \sqrt[4]{\min(\{\varphi'_0\}, 1 - \{\varphi'_0\})}$  и  $C_1 = \frac{1}{4} \sqrt[4]{\min(\{\varphi'_1\}, 1 - \{\varphi'_1\})}$ . Тогда для  $r'_0$  и  $r'_1$  выполнены соотношения

$$r'_i + 1 + C_i \sqrt[2]{\min(\{r'_i\}, 1 - \{r'_i\})} = r$$

Запишем  $r'_i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , как сумму целой  $[r'_i]$  и дробной  $\{r'_i\}$  частей:

$$[r'_i] + \{r'_i\} + 1 + C_i \sqrt[2]{\min(\{r'_i\}, 1 - \{r'_i\})} = [r] + \{r\}.$$

Как и в примере выше, получим, что

$$\{r'_i\} + C_i \sqrt[2]{\min(\{r'_i\}, 1 - \{r'_i\})} = \{r\}.$$

Тогда  $\{r'_i\}$  разрешается через  $\{r\}$  следующим образом:

$$\{r'_i\} = \begin{cases} \{r\} - C_i \left( \sqrt{\frac{C_i^2}{4} + \{r\} - \frac{C_i}{2}} \right) & \{r'_i\} \leq 1 - \{r'_i\} \\ \{r\} - C_i \left( \frac{C_i}{2} + \sqrt{\frac{C_i^2}{4} + 1 - \{r\}} \right) & \{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}. \end{cases}$$

Поскольку условия  $\{r'_i\} \leq 1 - \{r'_i\}$  и  $\{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}$  выражены в терминах искомой величины  $\{r'_i\}$ , их удобнее переписать в терминах сравнения  $\{r\}$  с некоторым пороговым значением. Если  $\{r'_i\} \leq 1 - \{r'_i\}$ , то  $\{r'_i\} \leq \frac{1}{2}$ , следовательно,  $\{r\} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}C_i$ . И наоборот, если  $\{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}$ , то  $\{r'_i\} \geq \frac{1}{2}$ , следовательно,  $\{r\} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}C_i$ . Тогда, зная  $\varphi'_i, r'_i$  можно однозначно вычислить через  $r$  и  $\varphi'_i$ :

$$\lfloor r'_i \rfloor = \lfloor r \rfloor - 1 \quad (5.3)$$

$$\{r'_i\} = \begin{cases} \{r\} - C_i \left( \sqrt{\frac{C_i^2}{4} + \{r\} - \frac{C_i}{2}} \right) & \{r\} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}C_i \\ \{r\} - C_i \left( \frac{C_i}{2} + \sqrt{\frac{C_i^2}{4} + 1 - \{r\}} \right) & \{r\} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}C_i. \end{cases}$$

Воспользуемся такими же обозначениями  $U_0, I_0$ , что и в примере выше. Можно показать прямым вычислением, что для любой точки  $A = (x, 0)$  внутренности отрезка  $I_0$  подпоследовательность точек  $(A \frac{1}{2^n})$  нейтрального сечения точки  $A = (x, 0)$  сходится к точке  $(0, 0)$ .

Как следствие, точки из внутренности множества  $U_0$  не являются  $\perp$ -предельными точками.

Покажем, что все точки из внутренности множества  $U_0$   $\perp$ -неблуждающие. Так как нейтральные итерации отрезка  $I_0$  всюду плотны в  $U_0$ , достаточно рассмотреть точки из внутренности отрезка  $I_0$ . Рассмотрим произвольную точку  $A \in \text{Int } I_0$ . Рассмотрим произвольную малую открытую окрестность  $U$  точки  $A$ . Пусть точка  $A$  имеет координаты  $(x, 0)$ . Рассмотрим окружность  $r = x$ , проходящую через точку  $A$ . Так как  $U$  — открытая

окружность, найдется  $\varepsilon > 0$  такое, что метрическая окрестность  $B_\varepsilon(A)$  радиуса  $\varepsilon$  вокруг точки  $A$  полностью содержится в  $U$ .

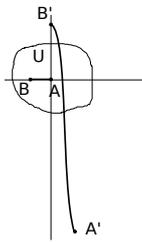


Рис. 5.2. К примеру 5.2.

Пусть  $B \in B_\varepsilon(A) \cap \{r = x\} \cap \cup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(f^n(I_0))$  — точка на окружности  $r = x$ , которая содержится в  $B_\varepsilon(A)$  и в некоторой нейтральной итерации  $I_0$ . Пусть точка  $B$  имеет координаты  $(-\varphi', x)$ . Поскольку  $B$  лежит на нейтральной итерации отрезка  $I_0$ , найдется  $h_{\varphi'}$  — гомеоморфизм группы итерированной монодромии, который сдвигает отрезок, на котором лежит точка  $B$ , в отрезок  $I_0$ . Но тогда при этом отрезок  $I_0$  перейдет в отрезок  $I'_\varphi$ . Поскольку точки отрезка  $I_0$  выше всех своих нейтральных итераций, то точка  $A$  перейдет в точку  $A'$ , которая будет ниже точки  $A$ , а точка  $B$  перейдет в точку  $B'$ , которая будет выше точки  $A$ . Но тогда отрезок  $BA$  окружности  $r = x$  перейдет в отрезок  $B'A'$  замкнутой кривой  $h_{\varphi'}(\{r = x\})$ , который так же, как и отрезок  $BA$ , пересекает каждую координатную прямую  $\varphi = const$  в единственной точке. Эта ситуация изображена на рисунке 5.2. Так как отрезок  $B'A'$  так же, как и отрезок  $BA$ , пересекает каждую координатную прямую  $\varphi = const$  в единственной точке, поскольку является его сдвигом под действием  $h_{\varphi'}$ , точка  $A'$  ниже точки  $A$ , а точка  $B'$  выше точки  $A$ , то отрезок  $B'A'$  пересекает окружность  $r = x$  в шаре

$B_\varepsilon(A)$ . Но отрезок  $B'A'$  по построению лежит в  $h_{\varphi'}(U)$ . Следовательно,  $U \cap h_{\varphi'}(U) \neq \emptyset$  и  $U$  нельзя выделить из множества  $\cup_{h_\varphi \in G_{f^\infty}} h_\varphi(U)$  компонентой связности.

Из произвольности выбора окрестности  $U$  следует, что точка  $A$   $\perp$ -неблуждающая. Из произвольности выбора точки  $A$  следует, что все точки из внутренности  $I_0$   $\perp$ -неблуждающие.

Полученное отображение  $f$  является искомым примером внутреннего отображения, у которого есть  $\perp$ -неблуждающая точка, не являющаяся  $\perp$ -предельной и  $\perp$ -рекуррентной.  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Власенко И. Ю. Динамика внутренних отображений // *Нелінійні коливання*. — 2011. — 2. — С. 181–186.
- [2] Власенко И. Ю. Внутренние отображения: топологические инварианты и их приложения. — Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Інститут математики НАН України, Київ, 2014. — **101**. — С. 225.
- [3] Гринес В. З., Починка О. В. Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. — Москва–Ижевск: РХД, 2011. — С. 423.
- [4] Власенко И. Ю. Пример нейтрально неблуждающей, но не нейтрально рекуррентной точки // *Укр. мат. журн.* — 2015. — **67**, 8. — С. 1030–1033.
- [5] Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. — М.: Мир, 1983. — С. 304.