Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 14, № 1, 140–146

УДК 517.5 + 513.83

Х. К. Даккіл

(*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ*)

moon5385@gmail.com

Про гладкі відображення постійної кратності

Присвячено 70-річчю професора Юрія Борисовича Зелінського

Основне питання, що досліджується у роботі — це побудова неперервного гладкого відображення постійної непарної кратності відкритої кулі евклідового простору в себе, яке продовжується до гомеоморфізму на межі.

A purpose of an article is construction of the smooth mapping of constant odd multiplicity in and onto an open ball of the Euclidean space, provided that on the boundary of the ball the mapping is a homeomorphism.

Означення 1. *Відображення областей $f\colon D \longrightarrow D_1$ називається власним, якщо прообраз довільного компакта буде компактом.*

В [1] показано, що обмеження неперервного відображення замкнутої області на її внутрішність буде власним тоді і тільки тоді, коли образи межі і внутрішності області не перетинаються.

Мета роботи дати відповідь (можливо, неповну) на наступне запитання [2,3].

Питання. *Чи існує для кожного власного відображення $f\colon D \longrightarrow D_1$ (D, D_1 — області на n-вимірних многовидах), гомотопне до f власне відображення g таке, що кожна точка образу $g(D)$ має не більше, ніж $|deg\, f| + 2$ прообразів (де $deg\ f$ — степінь відображення f [1])?*

Ми дослідимо можливість побудови неперервного гладкого відображення постійної непарної кратності на відкритій кулі у евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, яке є неперервним продовженням гомеоморфного відображення межі кулі. Подібні задачі розглядалися в роботах [4,5].

Теорема 1. *Існує гладке неперервне відображення n-вимірної кулі $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$ в себе, яке є гомеоморфізмом на межі кулі, а кожна внутрішня точка кулі має в точності k прообразів, де k є непарним числом.*

Доведення. Розглянемо функцію

$$g(x) = \sin(kx - 1/2)\pi, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

де k — непарне число. Нехай

$$p(x) = 2^{-1}(\sin(kx - 1/2)\pi + 1), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Далі задамо функцію $q(x)$ (див Мал. 1) на сегменті $0 \leq x \leq 1$ так, що $q(0) = 0$, а $q(x) = 2^{-m}(1 + p(2^m(x - 2^{-m})))$ для $2^{-m} \leq x \leq 2^{-m+1}$ при кожному $m = 1, 2, \ldots$.

Тепер ми задамо функцію

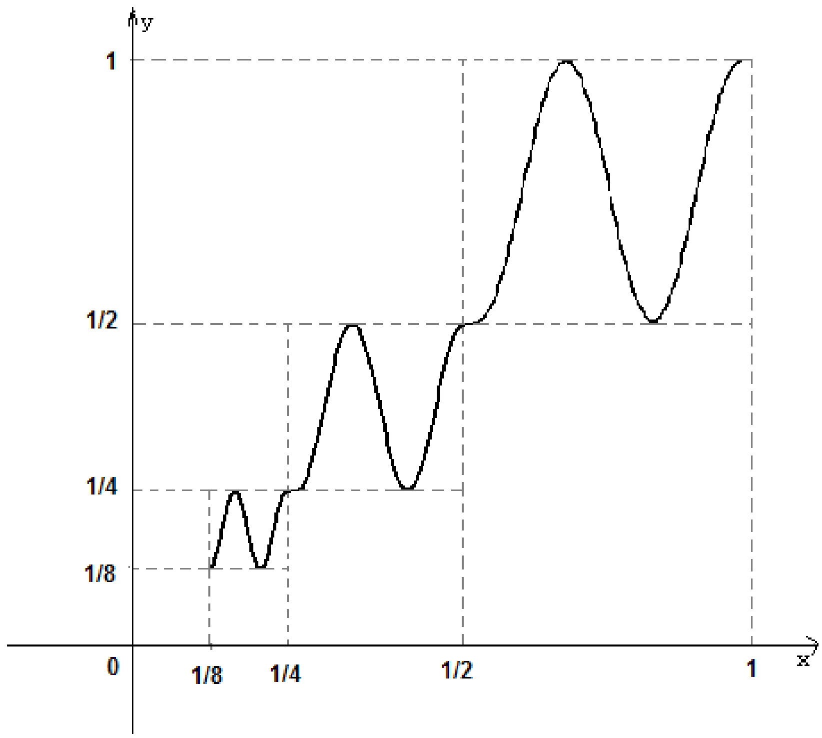
$$s(x) = \begin{cases} q(x+1) - 1 & \text{для} \quad -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - q(1-x) & \text{для} \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Отже, ми маємо (див. Мал. 2) неперервну нескінченно диференційовну функцію на замкненому інтервалі $B^1 = [-1, 1]$ (замкненій одновимірній кулі), яка є однозначною на межі, і кожна точка внутрішності кулі має в точності k прообразів.

Далі ми будемо розглядати n-вимірну кулю B^n як надбудову SB^{n-1} [6] над $(n-1)$-вимірною кулею B^{n-1} (наприклад, двовимірна куля $B^2 = SB^1 = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ є надбудовою над замкненим інтервалом $[-1, 1]$). Далі ми розповсюдимо функцію $s(x)$ на відображення надбудови за формулою

$$s_2(x, y) = \begin{cases} (1 - |y|)s(x/(1 - |y|)) & \text{для} \quad y \neq -1; 1, \\ 0 & \text{для} \quad y \in \{-1; 1\}. \end{cases}$$

Ця формула задає відображення двовимірної кулі. Аналогічне відображення легко побудувати у будь якій розмірності за індукцією

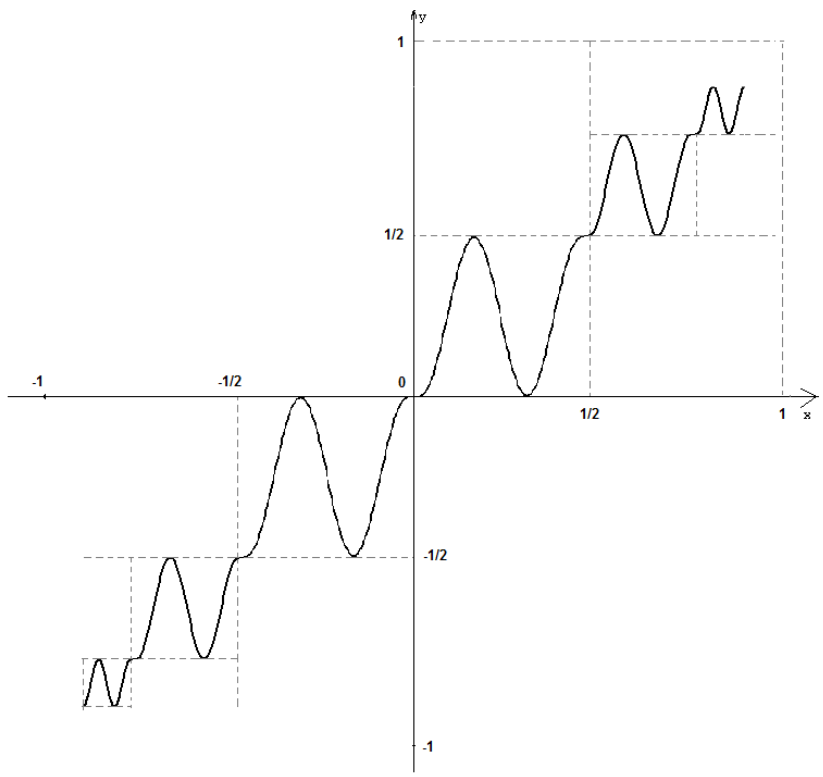


Мал. 1

$$s_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \begin{cases} (1-|x_n|)s_{n-1}(x_1/(1-|x_n|),\ x_2/(1-|x_n|), \ldots, x_{n-1}/(1-|x_n|)) \\ \qquad \text{при} \quad x_n \neq -1; 1, \\ 0 \qquad \text{при} \quad x_n = -1; 1. \end{cases}$$

Легко бачити, що так задане відображення задовольняє умови теореми при $k \geq 3$, а при $k = 1$ існує тотожний гомеоморфізм кулі на себе.



Мал. 2

Теорему доведено.

Висновок. *Нехай множина X має форму декартового добутку $X = Y \times B^n$. Тоді на X можна задати гладке неперервне відображення в X, яке буде гомеоморфізмом на $Y \times \partial B^n$, а кожна точка з $Y \times \mathrm{Int}\ B^n$ має рівно k прообразів, де k є непарним числом.*

Зауваження 1. З цього результату випливає, що для довільного гладкого гомеоморфізму декартового добутку $X = Y \times B^n$ на себе (множник Y може бути порожньою множиною) існує в точності k-кратне відображення множини $Y \times \mathrm{Int}\ B^n$ на себе, яке зберігає гомеоморфізм на $Y \times \partial B^n$.

Зауваження 2. З теореми випливає часткова відповідь на поставлене вище запитання. Для довільного гладкого гомеоморфізму кулі існує у точності трикратне відображення внутрішності кулі на себе, яке гомотопне до заданого і зберігає гомеоморфізм на межі. Гомотопність випливає з того, що відображення $s(x)$ гомотопне тотожному відображенню.

Зауваження 3. У роботі [5] показано, що не існує відображення відрізка на себе постійної кратності, відмінної від одиниці. Покажемо, що для відображень, образ яких знаходиться у більш складних многовидах, такі відображення можна побудувати.

Побудуємо гладке неперервне відображення довільної кратності $k \geq 3$ відрізка на коло S^1. Задамо спочатку на відрізку $0 \leq x \leq k-2,\ k = 3, 4, \dots,$ функцію

$$r(x) = \begin{cases} q(x) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1, k = 3, \\ (1 + \sin \pi(x - 1/2))/2 \qquad \text{при} \quad 1 \leq x \leq k-2. \end{cases}$$

Тепер гладка функція (див. Мал. 3) $f(x) = e^{2\pi i r(x)}$ відображає відрізок $0 \leq x \leq k-2$ на одиничне коло $x^2 + y^2 = 1$ і є k–кратною на цьому відрізку.

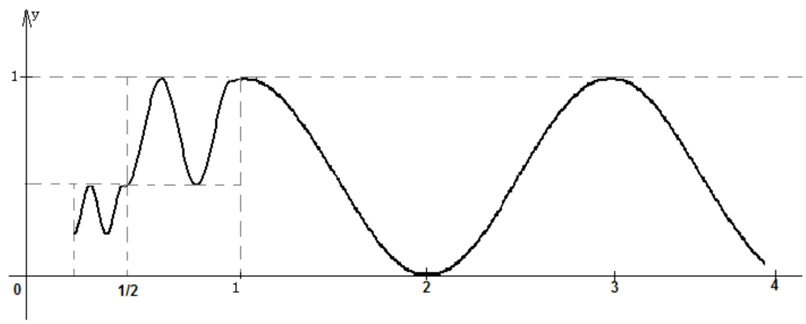
Далі ми будемо розглядати n-вимірну кулю B^n, як декартовий добуток відрізка $0 \leq x \leq k-2$ на $n-1$ екземпляр одиничних відрізків $I^{n-1} := \underbrace{[0,1] \times \ldots \times [0,1]}_{(n-1)-\text{раз}}$, тобто,

$$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \ : 0 \leq x_1 \leq k-2, 0 \leq x_i \leq 1, i = 2, \dots, n\}.$$

Задамо відображення n-вимірної кулі B^n на циліндр $S^n := S^1 \times I^{n-1}$ за формулою: $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f(x_1), x_2, \dots, x_n)$.

Звідси випливає наступне твердження.

Теорема 2. *Для будь-якого $k \geq 3$ існує гладке неперервне відображення n-вимірної кулі B^n на циліндр S^n, для якого кожна точка образу має у точності k прообразів.*



Мал. 3

Відкриті питання:

1. Чи існує відображення замкнутої кулі D на себе постійної кратності $k \geq 3$ (відомо, що для $k = 2$ такого відображення не існує [7])?

2. Чи існує відображення n-вимірного дійсного проективного простору в n-вимірний евклідів простір таке, що кожна точка образу має не більше, ніж два прообрази при $n \geq 4$ (відомо, що при $n = 2$ і 3 такі відображення існують [8])?

Різні оцінки кратності відображень областей на многовидах отримано у роботах [9-12].

Література

[1] *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2008. — **73.** — 308 с.

[2] *Zelinskii Y. B.* Continuous mappings between domains of manifolds // Bull. Soc.Sci. Lett. Lòdž Sé. Rech. Déform. — 2010. — **60.** — № 2. — P. 11 – 14.

[3] *Zelinskii Y. B.* Open topological and geometrical problems in analysis // https://www.academia.edu/29063888/Open topological and geometrical problems in analysis.

[4] *Mioduszewski J.* Funkcje ciagle o stalej krotnosci skonczonej na odcinku i prostej // Prace matematyczne. — 1961. — **5.** — P. 79 – 93.

[5] *Zelinskii Y. B., Dakhil H. K.* On mappings of constant multiplicity // Advances in Analysis. — 2017 (подано до друку).

[6] *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. — М.: Мир. — 1971. — 680 с.

[7] *Чернавский А. В.* Конечнократные открытые отображения многообразий // Мат. сб. — 1964. — **65(107)**, № 3. — С. 356 – 369.

[8] *Зелинский Ю. Б.* Об отображении проективного пространства в сферу // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 7. — С. 1037 – 1044.

[9] *Зелинский Ю. Б.* О некоторых проблемах Косинского // Укр. мат. журн. — 1975. — **27**, № 4. — С. 510 – 516.

[10] *Зелинский Ю. Б.* О кратности непрерывных отображений областей // Укр. матем. журн. — 2005. — **57**, № 4. — С. 554 – 558.

[11] *Зелинский Ю. Б.* Об отображении областей на многообразиях // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2008. — **5.** — № 1. — С. 149 – 152.

[12] *Зелинский Ю. Б.* Открытые вопросы отображения областей на многообразиях // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2010. — **7.** — № 2. — С. 242 – 248.