Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, т. 12, № 2, 139–204

УДК 510.22 + 51-71 + 517.983

Я. І. Грушка

(Інститут математики НАН України, Київ)

Еволюційні розширення кінематичних множин та універсальних кінематик

grushka@imath.kiev.ua

Analogs of set-theoretic inclusion relation and set-theoretic operation of disjoint union for kinematic changeable sets and universal kinematic sets are introduced and their properties are investigated. The obtained results may be used for formulation of mathematical foundations of special relativity in the framework of theory of kinematic changeable sets.

Введено аналоги теоретико-множинного відношення включення та теоретико-множинної операції диз'юнктного об'єднання для кінематичних мінливих множин та універсальних кінематичних множин, а також досліджено їхні властивості. Отримані результати можуть бути застосовані для формулювання математичних основ спеціальної теорії відносності в рамках теорії кінематичних мінливих множин.

1. Вступ.

Досягнення сучасної теоретичної фізики широко відомі, але проблема математично строгого обґрунтування її основ, тобто шоста проблема Гільберта, залишається відкритою і по сьогодні [1, 2, 3, 4, 5]. В роботах [10, 8, 9, 7, 6, 11] було запропоновано новий математичний апарат для розв'язання зазначеної проблеми — математичну теорію мінливих множин. З інтуїтивної точки зору мінливі множини являють собою сукупності об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати в процесі постійних трансформацій (зокрема змінювати свої властивості в часі, розпадатись на частини, чи навпаки — об'єднуватись в одне ціле). Крім того, характер еволюції мінливої множини та її компонентів може змінюватись залежно від способу спостереження (тобто від області сприймання або системи відліку). В роботах [12, 13, 14, 15] на базі теорії мінливих множин було побудовано новий клас математичних об'єктів — кінематичні мінливі множини, які призначені для математичного моделювання еволюції фізичних систем в рамках різних законів кінематики, а також показано, що теорія кінематичних мінливих множин може бути застосована для математично строгого обґрунтування кінематики спеціальної теорії відносності та її тахіонних розширень. Кінематичні мінливі множини являють собою математичні об'єкти, в яких мінливі множини оснащені різноманітними геометричними та топологічними структурами, а саме: метричними, топологічними, лінійними, банаховими, гільбертовими та іншими просторами. Крім того, в роботі [14] досліджено кінематичні мінливі множини із заданим універсальним перетворенням координат (універсальні кінематичні множини, або універсальні кінематики). Роботи [12, 13, 14, 15] можна вважати продовженням ідей, висловлених на фізичному рівні в роботах [16, 17, 18], в яких ставилась проблема дослідження довільних можливих систем просторово-часових перетворень координат.

В фізиці часто зустрічаються міркування, коли до фізичної системи подумки долучають додаткові, реально не існуючі в ній компоненти. Наприклад, під час виведення формул перетворень Лоренца для систем відліку з паралельними осями використовується метод "світлової сфери", тобто припускається, що в нульовий момент часу на початку відліку "спалахнуло світло" і світлові промені розходяться від початку відліку у всіх напрямках (див., наприклад, [19, стор. 25]). Таке припущення зовсім не означає, що в довільній моделі еволюції в рамках спеціальної теорії відносності (СТВ) мусить існувати "світлова сфера". Просто робиться припущення, що перетворення координат не зміниться, коли ми до будь-якої еволюційної моделі в рамках СТВ долучимо світлову сферу, тобто коли замість даної моделі розглянемо "розширену" модель, в якій світлова сфера вже присутня.

В роботі [20] було визначено аналоги теоретико-множинного відношення включення та теоретико-множинної операції об'єднання для базових мінливих множин (тобто для мінливих множин з однією системою відліку). На основі введених понять було дано математично строге обґрунтування процедури долучення до вихідної моделі нових "віртуальних" еволюціонуючих об'єктів за припущення, що еволюція цих, нових, об'єктів **не впливає** на еволюцію вихідної системи в рамках теорії базових мінливих множин.

В даній роботі робиться спроба перенесення конструкцій роботи [20] на кінематичні мінливі множини з багатьма системами відліку. В роботі введені аналоги теоретико-множинного відношення включення для кінематичних мінливих множин та універсальних кінематик, а також досліджено їхні властивості. У випадку операції об'єднання, виникають певні труднощі при визначенні відображень уніфікації та перетворень координат, пов'язані з існуванням багатьох систем відліку. В силу цих труднощів, для зазначених об'єктів поки що вдалося побудувати лише аналог операції диз'юнктного об'єднання.

З однієї сторони, дана робота містить чисто технічні результати, необхідні для доведення теореми про еволюційне розширення для універсальних кінематик і математично строгого формулювання основ спеціальної теорії відносності в рамках теорії кінематичних мінливих множин. З іншого боку, отримані результати можуть мати і самостійний інтерес, оскільки в роботі досліджуються цікаві математичні об'єкти, що мають досить красиві властивості.

2. Мінливі множини і кінематика

2.1. Математичні об'єкти для побудови геометричних оточень мінливих множин.

Даний підрозділ носить суто технічний характер. Тут не вводяться ніякі принципово нові поняття, а лише робиться спроба вкласти найбільш часто вживані математичні простори, які хоч якимось чином пов'язані з геометрією, в одну математичну структуру, зручну для побудови абстрактних кінематик.

Означення 1. *Трійку* $\mathbb{L} = (\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ *будемо називати* ***лінійною структурою*** *над множиною* $\mathfrak{X}$*, якщо:*

1. $\mathbb{K} = (\mathbf{K}, +_{\mathbb{K}}, \times_{\mathbb{K}})$ *— поле.*
2. $\oplus : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}$ *— бінарна операція над* $\mathfrak{X}$*;*
3. $\otimes : \mathbf{K} \times \mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}$ *— бінарна операція з* $\mathbf{K} \times \mathfrak{X}$ *в* $\mathfrak{X}$*.*
4. *Трійка* $(\mathfrak{X}, \oplus, \otimes)$ *є лінійним простором над полем* $\mathbb{K}$*.*

Якщо $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$*, то лінійну структуру* $\mathbb{L}$ *будемо називати* ***числовою лінійною структурою*** *над* $\mathfrak{X}$*.*

Якщо $\mathbb{L} = (\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ є лінійною структурою над $\mathfrak{X}$, то лінійний простір над полем $\mathbb{K}$, породжений цією структурою будемо, позначати через $\mathfrak{Lp}(\mathfrak{X}, \mathbb{L})$ $(\mathfrak{Lp}(\mathfrak{X}, \mathbb{L}) = (\mathfrak{X}, \oplus, \otimes))$.

Наступне означення базується на концепції, що більшість найбільш часто вживаних математичних об'єктів (в тому числі функції, відношення, алгебраїчні операції, упорядковані пари або набори) є множинами.

Означення 2. *Шестірку множин $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \mathcal{T}, \mathbb{L}, \rho, \|\cdot\|, (\cdot,\cdot))$ будемо називати* ***координатним простором****, якщо виконуються наступні умови:*

1. $\mathfrak{X} \neq \emptyset$.
2. $\mathcal{T} \cup \mathbb{L} \neq \emptyset$.
3. *Якщо $\mathcal{T} \neq \emptyset$, то $\mathcal{T}$ — топологія на $\mathfrak{X}$.*
4. *Якщо $\mathbb{L} \neq \emptyset$, то $\mathbb{L}$ — числова лінійна структура над $\mathfrak{X}$.*
5. *Якщо $\mathbb{L} \neq \emptyset$ і $\mathcal{T} \neq \emptyset$, то пара $(\mathfrak{Lp}(\mathfrak{X}, \mathbb{L}), \mathcal{T})$ є лінійним топологічним простором.*
6. *Якщо $\rho \neq \emptyset$, то:*

   6.1) *ρ — метрика на $\mathfrak{X}$;*

   6.2) *$\mathcal{T} \neq \emptyset$ і топологія $\mathcal{T}$ породжена метрикою ρ.*

7. *Якщо $\|\cdot\| \neq \emptyset$, то:*

   7.1) *$\mathbb{L} \neq \emptyset$ і $\|\cdot\|$ — норма на лінійному просторі $\mathfrak{Lp}(\mathfrak{X}, \mathbb{L})$;*

   7.2) *$\rho \neq \emptyset$ і ρ — метрика, породжена нормою $\|\cdot\|$.*

8. *Якщо $(\cdot,\cdot) \neq \emptyset$, то:*

   8.1) *$\|\cdot\| \neq \emptyset$ (а отже, згідно з* **7.1)***, і $\mathbb{L} \neq \emptyset$);*

   8.2) *$(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток на лінійному просторі $\mathfrak{Lp}(\mathfrak{X}, \mathbb{L})$;*

   8.3) *норма $\|\cdot\|$ породжена скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$.*

Зауваження про позначення. Нехай $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \mathcal{T}, \mathbb{L}, \rho, \|\cdot\|, (\cdot,\cdot))$ — координатний простір, де у випадку $\mathbb{L} \neq \emptyset$, $\mathbb{L} = (\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ — числова лінійна структура над $\mathfrak{X}$. Надалі будемо використовувати такі позначення:

1. $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}) := \mathfrak{X}$ (множину $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ будемо називати ***множиною значень координат*** $\mathfrak{Q}$).

2. $\mathcal{T}p(\mathfrak{Q}) := \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}p(\mathfrak{Q})$ будемо називати ***топологією*** $\mathfrak{Q}$).

3. $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) := \mathbb{L}$ ($\mathbb{L}s(\mathfrak{Q})$ будемо називати ***лінійною структурою*** $\mathfrak{Q}$).

4. $\mathfrak{Ps}(\mathfrak{Q}) := \begin{cases} \mathbb{K}, & \mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) \neq \emptyset \\ \emptyset, & \mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) = \emptyset \end{cases}$ ($\mathfrak{Ps}(\mathfrak{Q})$ будемо називати ***полем скалярів*** $\mathfrak{Q}$).

5. Для елементів $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathfrak{Ps}(\mathfrak{Q})$ ($n \in \mathbb{N}$) будемо вживати позначення, $(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)_{\mathfrak{Q}} := \lambda_1 \otimes x_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes x_n$.

6. $\mathbf{di}_{\mathfrak{Q}} := \rho$ ($\mathbf{di}_{\mathfrak{Q}}$ будемо називати ***дистанцією*** на $\mathfrak{Q}$).

7. $\|\cdot\|_{\mathfrak{Q}} := \|\cdot\|$ ($\|\cdot\|_{\mathfrak{Q}}$ будемо називати ***нормою*** на $\mathfrak{Q}$).

8. $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{Q}} := (\cdot,\cdot)$ ($(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{Q}}$ будемо називати ***скалярним добутком*** на $\mathfrak{Q}$).

Елементи $x \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ будемо називати ***координатами*** координатного простору $\mathfrak{Q}$, а у випадку $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) \neq \emptyset$ ці елементи будемо також називати ***векторами (векторними координатами)*** $\mathfrak{Q}$. У випадку, коли це не викликає непорозумінь у позначеннях $(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)_{\mathfrak{Q}}$, $\mathbf{di}_{\mathfrak{Q}}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{Q}}$, $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{Q}}$ символ $\mathfrak{Q}$ будемо опускати, вживаючи замість них позначення $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, $\mathbf{di}$, $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ відповідно.

2.2. Кінематичні мінливі множини

В даній роботі використовуються поняття та позначення теорії мінливих множин, які містяться в роботі [8] (див. також [7, 9, 11, 10, 20, 12, 14]).

Означення 3. *1. Пару $\mathcal{G}_0 = (\mathfrak{Q}, k)$ будемо називати* ***геометричним оточенням*** *базової мінливої множини $\mathcal{B}$, якщо:*

а) $\mathfrak{Q}$ *— координатний простір;*

б) $k : \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \mapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ *— відображення з $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$.*

При цьому пару $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}_0) = (\mathcal{B}, (\mathfrak{Q}, k))$ будемо називати ***базовою кінематичною мінливою множиною****, або, скорочено —* ***базовою кінематичною*** *множиною.*

2. Нехай, $\mathcal{Z}$ — мінлива множина. Індексовану сім'ю пар виду $\mathcal{G} = ((\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}))$ будемо називати ***геометричним оточенням*** *мінливої множини $\mathcal{Z}$, якщо для довільної області сприймання $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ пара $(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}})$ є геометричним оточенням базової мінливої множини $\mathfrak{l}^{\wedge}$, породженої областю сприймання $\mathfrak{l}$, тобто якщо пара $(\mathfrak{l}^{\wedge}, (\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}))$ є базовою кінематичною множиною для довільної $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$.*
При цьому пару $\mathfrak{C} = (\mathcal{Z}, \mathcal{G})$ будемо називати ***кінематичною мінливою множиною****, або, скорочено —* ***кінематичною*** *множиною.*

Підкреслимо, що в цій статті розглядаються лише кінематичні множини зі сталою (не змінною в часі) геометрією. Такі кінематичні множини достатні для побудови абстрактних кінематик в інерційних системах відліку. Зробивши певну модифікацію означення 3, визначити кінематичні множини з мінливою геометрією, в принципі, можливо.

2.2.1 Система позначень для базових кінематичних множин

Нехай, $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}_0)$ де $\mathcal{G}_0 = (\mathfrak{Q}, k)$ — довільна базова кінематична множина. Надалі будемо використовувати наступну систему позначень.

а) Позначення, індуковані з теорії базових мінливих множин:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}); & \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}); & \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}{\leftarrow}} := \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}; \\ \underset{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}{\leftarrow} := \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}; & \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbb{L}d(\mathcal{B}); & \\ \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbf{Tm}(\mathcal{B}); & \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}); & \leq_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := \leq_{\mathcal{B}}, \end{array}$$

де $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ — база елементарних процесів базової мінливої множини $\mathcal{B}$.

б) Позначення, індуковані з позначень для координатних просторів:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}\right); & \mathcal{T}p\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathcal{T}p\left(\mathfrak{Q}\right); & \\ \mathbb{L}s\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbb{L}s\left(\mathfrak{Q}\right); & \mathfrak{Ps}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathfrak{Ps}\left(\mathfrak{Q}\right); & \mathbf{di}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := \mathbf{di}_{\mathfrak{Q}}; \\ \|\cdot\|_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := \|\cdot\|_{\mathfrak{Q}}; & (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{Q}}. & \end{array}$$

У випадку $\mathbb{L}s\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) \neq \emptyset$ для довільних $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$, $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathfrak{Ps}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ будемо використовувати позначення, $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathcal{Q}}$.

в) Власні позначення для базових кінематичних множин:

$$\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathcal{B}; \quad \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathfrak{Q};$$
$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}(x) := k(x) \ \left(x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right).$$

Зауважимо, що функція $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}(\cdot)$ ставить у відповідність кожному елементарному стану $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ його координату $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}(x)$.

г) Скорочені варіанти позначень

- У тому випадку, коли наперед відомо, про яку базову кінематичну множину $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ йде мова у позначеннях $\leq_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}$, $\underset{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}{\leftarrow}$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}{\leftarrow}}$ символ "$\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$" будемо опускати, застосовуючи позначення $\leq$, $\leftarrow$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\leftarrow}$ відповідно. При цьому, для довільних елементарно-часових станів $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ замість позначення $\omega_2 \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}{\leftarrow}} \omega_1$ часто будемо використовувати позначення $\omega_2 \underset{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}{\leftarrow} \omega_1$ або $\omega_2 \leftarrow \omega_1$.
- У тому випадку, коли наперед відомо, про яку базову кінематичну множину $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ йде мова, замість позначень $\mathbf{di}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}$, $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}(x)$ будемо використовувати позначення $\mathbf{di}$, $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$, $\mathfrak{q}(x)$ відповідно.

2.2.2 Система позначень для кінематичних множин

Нехай, $\mathfrak{C} = (\mathcal{Z}, \mathcal{G})$, де $\mathcal{G} = ((\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}))$ — кінематична множина.

а) Мінливу множину $\mathbb{BE}\,(\mathfrak{C}) := \mathcal{Z}$ будемо називати ***базою еволюції*** кінематичної множини $\mathfrak{C}$.

б) Множини $\mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}) := \mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z}) = \mathcal{I}nd\,(\mathbb{BE}\,(\mathfrak{C}))$; $\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}) := \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}) = \mathcal{L}k\,(\mathbb{BE}\,(\mathfrak{C}))$ будемо називати ***множиною індексів*** та ***множиною систем відліку*** кінематичної множини $\mathfrak{C}$ (відповідно). Причому у випадку кінематичних множин, на відміну від абстрактних мінливих множин, буде використовуватись термін "система відліку", а не "область сприймання".

в) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ зберігаються всі позначення, введені для областей сприймання в теорії мінливих множин ($\mathtt{ind}\,(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$, $\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}}$, $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l})$, $\leq_{\mathfrak{l}}$, $\mathbb{L}d(\mathfrak{l})$).

г) Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ індукуються позначення для відображень уніфікації:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathfrak{C} \rangle := \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z} \rangle\,.$$

Зокрема, коли мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою, будемо говорити, що кінематична множина $\mathfrak{C}$ є ***чітко видимою*** і використовувати позначення:

$$\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C} \rangle \;:= \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle\,.$$

д) За означенням 3, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ пара $\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l} = (\mathfrak{l}^{\hat{}}, (\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}))$ є базовою кінематичною множиною. $\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}$ будемо називати ***образом кінематичної множини*** $\mathfrak{C}$ у системі відліку $\mathfrak{l}$.

е) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ введемо наступні позначення:

$$\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}) := \mathbf{Zk}(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}})\,; \quad \mathbb{L}s(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}) := \mathbb{L}s(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathbb{L}s(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}})\,;$$

$$\mathcal{T}p(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}) := \mathcal{T}p(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathcal{T}p(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}})\,; \quad \mathfrak{Ps}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}) := \mathfrak{Ps}(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathfrak{Ps}(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}})\,;$$

$$\|\cdot\|_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}} := \|\cdot\|_{\mathfrak{C}\upharpoonright\mathfrak{l}} = \|\cdot\|_{\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}}\,; \quad \mathbf{di}_{\mathfrak{l}}(\cdot;\,\mathfrak{C}) := \mathbf{di}_{\mathfrak{C}\upharpoonright\mathfrak{l}} = \mathbf{di}_{\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}};$$

$$(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}} := (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{C}\upharpoonright\mathfrak{l}} = (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}}\,; \quad \mathsf{BE}(\mathfrak{l}) := \mathsf{BE}(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathfrak{l}^{\hat{}};$$

$$\mathsf{BG}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}) := \mathsf{BG}(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}.$$

Також для систем відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ таких, що $\mathbb{L}s(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}) \neq \emptyset$ і довільних $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C})$, $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathfrak{Ps}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C})$ будемо використовувати позначення, $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}} := (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathcal{Q}_l}$.

є) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ введемо таке позначення:

$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x;\,\mathfrak{C}) := \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}\upharpoonright\mathfrak{l}}(x) = k_{\mathfrak{l}}(x),\; x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})\,.$$

Таким чином, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(\cdot;\,\mathfrak{C})$ є відображенням з $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C})$.

ж) Скорочені варіанти позначень:

- У тих випадках, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину $\mathfrak{C}$ йде мова, замість позначень $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathfrak{C}\rangle$, $\langle ! \,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathfrak{C}\rangle$, $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\mathbb{L}s(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\mathbf{di}_{\mathfrak{l}}(\cdot;\, \mathfrak{C})$, $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}$, $\mathcal{T}p(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\mathfrak{Ps}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}$, $\mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x;\, \mathfrak{C})$ будемо використовувати позначення, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle$, $\langle ! \,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle$, $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$, $\mathbb{L}s(\mathfrak{l})$, $\mathbf{di}_{\mathfrak{l}}$, $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{l}}$, $\mathcal{T}p(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{Ps}(\mathfrak{l})$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{l}}$, $\mathsf{BG}(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x)$ відповідно.

- У тих випадках, коли наперед відомо, про яку систему відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ йде мова, замість позначень $\mathbf{di}_{\mathfrak{l}}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{l}}$, $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{l}}$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x)$, $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}$ будемо використовувати позначення $\mathbf{di}$, $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$, $\mathfrak{q}(x)$, $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ відповідно. Також будемо користуватися скороченими варіантами позначень для областей сприймання мінливих множин, описаними в роботах [8, стор. 35], [10, стор. 210]. Тобто, іншими словами, використовуються всі скорочені варіанти позначень, описані в пункті **г)** підрозділу 2.2.1 (але, із заміною символу “$\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$” на символ “$\mathfrak{l}$” і терміну “базова кінематична множина” на термін “система відліку”).

Властивості 1. (Див. [14, зауваження 3, а також властивості 3, властивості 4 та твердження 3].) *Нехай, $\mathfrak{C}$ — довільна кінематична множина. Тоді:*

1. *Множини $\mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ та $\mathcal{I}nd(\mathfrak{C})$ завжди непорожні, причому $\mathcal{I}nd(\mathfrak{C}) = \{\mathtt{ind}(\mathfrak{l}) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})\}$.*

2. *Для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ рівність $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathtt{ind}(\mathfrak{l}) = \mathtt{ind}(\mathfrak{m})$.*

3. *Для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ відображення уніфікації $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathfrak{C}\rangle$ є відображенням з $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})}$ в $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})}$, де $2^{\mathbf{M}}$ означає множину всіх підмножин множини $\mathbf{M}$.*

4. *Довільну систему відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *можна подати у вигляді упорядкованої пари,* $\mathfrak{l} = (\mathtt{ind}(\mathfrak{l}), \mathfrak{l}^{\wedge})$, *де* $\mathfrak{l}^{\wedge}$ *є базовою мінливою множиною. При цьому* $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}^{\wedge})$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}^{\wedge})$, $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}^{\wedge})$, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}^{\wedge})$, $\leq_{\mathfrak{l}} = \leq_{\mathfrak{l}^{\wedge}}$, $\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} = \underset{\mathfrak{l}^{\wedge}}{\leftarrow}$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}} = \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}^{\wedge}}{\leftarrow}}$, $\mathbb{L}d(\mathfrak{l}) = \mathbb{L}d(\mathfrak{l}^{\wedge})$.

5. *Для довільних* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *і* $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ *справедлива рівність,* $\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A = A$.

6. *Якщо* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *і* $A \subseteq B \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, *то* $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A \subseteq \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle B$.

7. *Для довільних* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *і* $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ *справедливе включення:*
$$\langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A \subseteq \langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A.$$

8. *Якщо* $\mathfrak{C}$ *— чітко видима кінематична множина, то для довільних систем відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *множини* $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ *і* $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ *є рівнопотужними. При цьому відображення:* $f(\omega) = \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \omega$ ($\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$) *є бієкцією (взаємнооднозначною відповідністю) між цими множинами.*

Зауваження 1. Використовуючи властивість 1(4) [1], згідно з позначеннями, введеними в пункті **e)** підрозділу 2.2.2, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ отримуємо рівності:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathsf{BE}(\mathfrak{l})) & = & \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}); \\ \mathfrak{Bs}(\mathsf{BE}(\mathfrak{l})) & = & \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}); \\ \mathbb{L}d(\mathsf{BE}(\mathfrak{l})) & = & \mathbb{L}d(\mathfrak{l}). \end{array} \tag{1}$$

Властивості 2. (Див. [14, зауваження 3, а також властивості 5].) *Нехай,* $\mathfrak{C}$ *— довільна чітко видима кінематична множина і* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *— довільні системи відліку* $\mathfrak{C}$. *Тоді:*

[1] Посилання на властивість 1(4) означає посилання на пункт 4 з групи властивостей “Властивості 1”.

1. $\forall\,\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\ \ \langle !\,\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega=\omega$*;*

2. $\forall\,A\subseteq\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\ \langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,A=\{\langle !\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega\mid\omega\in A\}$*;*

3. $\forall\,\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\ \langle !\,\mathfrak{p}\leftarrow\mathfrak{m}\rangle\,\langle !\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega=\langle !\,\mathfrak{p}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega$.

3. Перетворення координат у кінематичних множинах.

Нехай, $\mathbb{T}=(\mathbf{T},\leq)$ — довільна лінійно упорядкована множина і $\mathcal{X}$ — довільна множина. Для довільної пари $\omega=(t,x)\in\mathbf{T}\times\mathcal{X}$ будемо використовувати позначення:

$$\mathsf{bs}\,(\omega):=x,\quad \mathsf{tm}\,(\omega):=t. \tag{2}$$

Нехай, $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ – базова кінематична множина.

1. Множину:

$$\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right):=\mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\times\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right),$$

будемо називати ***множиною Мінковського*** базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$.

2. Через $\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}$ будемо позначати відображення з $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ в $\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$, що задається формулою:

$$\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}(\omega):=\left(\mathsf{tm}\,(\omega)\,,\mathsf{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}(\mathsf{bs}\,(\omega))\right),\quad \omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right).$$

Для елементарно-часового стану $\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ значення $\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}(\omega)$ будемо називати ***координатами Мінковського*** ω.

3. Якщо $\mathfrak{C}$ — довільна кінематична множина, то для довільної системи відліку $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ вводимо позначення:

$$\begin{aligned}&\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C}):=\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})\times\mathbf{Zk}(\mathfrak{l}).\\&\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C}):=\left(\mathsf{tm}\,(\omega)\,,\mathsf{q}_{\mathfrak{l}}(\mathsf{bs}\,(\omega))\right)\in\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C}),\quad\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}).\end{aligned}\tag{3}$$

Множину $\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C})$ будемо називати ***множиною Мінковського*** для системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематичній множині $\mathfrak{C}$. Значення $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ будемо називати ***координатами Мінковського*** елементарно-часового стану $\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l})$ ***у системі відліку*** $\mathfrak{l}$.

Коли наперед відомо, про яку кінематичну множину $\mathfrak{C}$ йде мова, замість позначень $\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C})$, $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ будемо використовувати позначення $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$, $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega)$ відповідно.

Означення 4. *Нехай, $\mathfrak{C}$ — чітко видима кінематична множина і $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ — довільні системи відліку $\mathfrak{C}$.*

1. *Відображення $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\,\cdot\,;\mathfrak{C}):\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\mapsto\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$, що задається формулою:*

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C})=\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}(\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega),\quad \omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$$

   будемо називати ***реальним перетворенням координат*** *з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$.*
   Для елементарно-часового стану $\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l})$ значення $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ можна назвати координатами Мінковського ω у (іншій) системі відліку $\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$.

2. *Відображення $\widetilde{Q}:\mathbb{M}k(\mathfrak{l})\mapsto\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ будемо називати* ***універсальним перетворенням координат*** *з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$, якщо:*

   - *$\widetilde{Q}$ є бієкцією між $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ та $\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$.*
   - *Для довільного елементарно-часового стану $\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність:*

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C})=\widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega)\right).$$

3. *Будемо говорити, що системи відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$* ***допускають універсальне перетворення координат****, якщо існує хоч одне універсальне перетворення координат $\widetilde{Q}:\mathbb{M}k(\mathfrak{l})\mapsto\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$.*

Якщо системи відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ *допускають універсальне перетворення координат, будемо використовувати позначення:*

$$\mathfrak{l}\underset{\mathfrak{C}}{\rightleftarrows}\mathfrak{m},$$

у випадку, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину $\mathfrak{C}$ *йде мова, будемо використовувати позначення* $\mathfrak{l}\rightleftarrows\mathfrak{m}$.

4. *Індексовану сім'ю* $\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ *будемо називати* ***універсальним перетворенням координат для кінематичної множини*** $\mathfrak{C}$, *якщо:*

   - *Для довільних* $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ $\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}$ *є універсальним перетворенням координат з* $\mathfrak{l}$ *в* $\mathfrak{m}$.
   - *Для довільних* $\mathfrak{l},\mathfrak{m},\mathfrak{p}\in\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ *і* $\mathrm{w}\in\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ *справедливі рівності:*

$$\widetilde{Q}_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}}(\mathrm{w})=\mathrm{w};\qquad \widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}}\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w})\right)=\widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}). \qquad (4)$$

5. *Будемо говорити, що кінематична множина* $\mathfrak{C}$ ***допускає універсальне перетворення координат****, якщо існує хоч одне універсальне перетворення координат* $\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ *для* $\mathfrak{C}$.

Зауваження 2. У випадку, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину $\mathfrak{C}$ йде мова, замість позначення $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ будемо використовувати позначення $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega)$.

Твердження 1 ([12])**.** *Для довільної чітко видимої кінематичної множини* $\mathfrak{C}$ *наступні твердження рівносильні:*

1. $\mathfrak{C}$ *допускає універсальне перетворення координат.*

2. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *має місце співвідношення* $\mathfrak{l} \rightleftarrows \mathfrak{m}$ *(тобто довільні дві системи відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *допускають універсальне перетворення координат).*

3. *Існує система відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *така, що для довільної системи відліку* $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *виконується співвідношення* $\mathfrak{l} \rightleftarrows \mathfrak{m}$.

В роботах [13, 15] показано, що кінематичні множини, пов'язані із класичною спеціальною теорією відносності в інерційних системах відліку і її узагальненнями в сенсі E. Recami [21], допускають універсальне перетворення координат, а також наведено приклади кінематичних мінливих множин, у яких не існує універсального перетворення координат, і які можуть бути корисними для математичного моделювання еволюції фізичних систем за умов гіпотези про існування частинок з різними "власними" швидкостями світла (на фізичному рівні подібні моделі розглядались в роботах [22, 23, 24, 25, 26]).

4. Універсальні кінематичні множини.

4.1. Означення універсальних кінематичних множин

Означення 5. *Якщо* $\overleftarrow{\mathcal{Q}} = \left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ *є універсальним перетворенням координат для чітко видимої кінематичної множини* $\mathfrak{C}$*, то пару*

$$\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right)$$

будемо називати ***універсальною кінематичною множиною****, або, скорочено,* ***універсальною кінематикою****.*

4.2. Система позначень для універсальних кінематик

Всюди в даному підрозділі $\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right)$, де $\overleftarrow{\mathcal{Q}} = \left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ — довільна універсальна кінематика. Надалі будемо вживати наступну систему позначень.

4.2.1 Позначення, індуковані з теорії кінематичних множин

а) Мінливу множину

$$\mathbb{BE}(\mathcal{F}) := \mathbb{BE}(\mathfrak{C})$$

будемо називати ***базою еволюції*** універсальної кінематики $\mathcal{F}$.

б) Введемо позначення:

$$\mathcal{I}nd(\mathcal{F}) := \mathcal{I}nd(\mathfrak{C}) = \mathcal{I}nd(\mathbb{BE}(\mathfrak{C})) = \mathcal{I}nd(\mathbb{BE}(\mathcal{F}));$$
$$\mathcal{L}k(\mathcal{F}) := \mathcal{L}k(\mathfrak{C}) = \mathcal{L}k(\mathbb{BE}(\mathfrak{C})) = \mathcal{L}k(\mathbb{BE}(\mathcal{F})).$$

Множину $\mathcal{L}k(\mathcal{F})$ будемо називати ***множиною систем відліку*** універсальної кінематики $\mathcal{F}$.

в) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$:

- зберігаються всі позначення, введені в теорії мінливих множин ($\mathtt{ind}(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{l}^{\frown}$, $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$, $\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}}$, $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l})$, $\leq_{\mathfrak{l}}$, $\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{l}^{\frown}$, $\mathbb{L}d(\mathfrak{l})$).
- індукуються всі позначення, введені в теорії кінематичних мінливих множин:

$$\begin{array}{ll} \mathsf{BG}(\mathfrak{l};\,\mathcal{F}) := \mathsf{BG}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}); & \mathbb{L}s(\mathfrak{l};\,\mathcal{F}) := \mathbb{L}s(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}); \\ \mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\,\mathcal{F}) := \mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}); & \mathbf{di}_{\mathfrak{l}}(\cdot;\,\mathcal{F}) := \mathbf{di}_{\mathfrak{l}}(\cdot;\,\mathfrak{C}); \\ \mathcal{T}p(\mathfrak{l};\,\mathcal{F}) := \mathcal{T}p(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}); & \|\cdot\|_{\mathfrak{l},\mathcal{F}} := \|\cdot\|_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}; \\ \mathfrak{Ps}(\mathfrak{l};\,\mathcal{F}) := \mathfrak{Ps}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}); & (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{l},\mathcal{F}} := (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}. \end{array}$$

- Також для систем відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ таких, що $\mathbb{L}s(\mathfrak{l};\mathcal{F}) \neq \emptyset$ і довільних $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\mathcal{F})$, $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathfrak{Ps}(\mathfrak{l};\mathcal{F})$ індукується позначення: $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l},\mathcal{F}} := (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}$.

г) Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ переносяться позначення

$$\begin{array}{ll} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F} \rangle := \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C} \rangle; & \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F} \rangle := \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C} \rangle; \\ \mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathcal{F}) := \mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C}) & \mathcal{F} \upharpoonright \mathfrak{l} := \mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}; \\ \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega;\mathcal{F}) := \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega;\mathfrak{C}); & \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega;\mathcal{F}) := \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega;\mathfrak{C}) \\ & \qquad\qquad (\text{де} \quad \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})) \\ \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x;\mathcal{F}) := \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x;\mathfrak{C}); \quad (\text{де} \quad x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})). & \end{array}$$

Зауважмо, що із введених позначень випливає, що для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ довільної універсальної кінематики $\mathcal{F}$ справедлива рівність, $\mathsf{BE}(\mathcal{F} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathsf{BE}(\mathfrak{l})$.

4.2.2 Власні позначення для універсальних кінематик

Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ через $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l};\mathcal{F}]$ будемо позначати відображення з $\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathcal{F})$ в $\mathbb{M}k(\mathfrak{m};\mathcal{F})$, що діє за формулою:

$$[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l};\mathcal{F}]\,\mathrm{w} = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l};\mathcal{F}]\,(\mathrm{w}) := \widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}), \quad \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathcal{F}).$$

При цьому, коли немає нагальної необхідності, круглі дужки у позначенні $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l};\mathcal{F}]\,(\mathrm{w})$ будемо опускати ($[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l};\mathcal{F}]\,(\mathrm{w}) = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l};\mathcal{F}]\,\mathrm{w}$).

4.2.3 Скорочені варіанти позначень

- У тих випадках, коли наперед відомо, про яку універсальну кінематику $\mathcal{F}$ йде мова, замість позначень $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\cdot;\mathcal{F})$, $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\cdot;\mathcal{F})$, $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l};\mathcal{F}]$, $\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathcal{F})$ будемо використовувати позначення $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\cdot)$, $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\cdot)$, $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]$, $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ відповідно.

- Також будемо користуватися скороченими варіантами позначень для систем відліку кінематичних множин, описаними у пункті **ж)** підрозділу 2.2.2 (при цьому символ $\mathfrak{C}$ слід замінити на символ $\mathcal{F}$ і термін "кінематична множина" на термін "універсальна кінематика"). Зокрема, залишаються в силі всі скорочені варіанти позначень, описані в пункті **г)** підрозділу 2.2.1 (але із заміною символу "$\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$" на символ "$\mathfrak{l}$" і терміну "базова кінематична множина" на термін "система відліку").

Нехай $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика. Використовуючи прийняті позначення, а також означення 4 (пункти 2,4) для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ отримуємо рівність:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega) = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega) \quad (\forall \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}))\,, \tag{5}$$

тобто, враховуючи означення 4 (пункт 1), рівність:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}\left(\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega\right) = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega) \quad (\forall \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}))\,. \tag{6}$$

Крім того, за означенням 4 (пункт 4), для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ отримуємо рівності:

$$[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w} = \mathrm{w}; \quad (\forall \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}))\,; \tag{7}$$

$$[\mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m}]\, [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w} = [\mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w} \quad (\forall \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}))\,. \tag{8}$$

Твердження 2 ([14])**.** *Нехай $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ — універсальні кінематики, причому:*

1. *$\mathcal{L}k(\mathcal{F}_1) = \mathcal{L}k(\mathcal{F}_2)$.*
2. *Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}_1) = \mathcal{L}k(\mathcal{F}_2)$ справедливі рівності:*

$$\mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathcal{F}_1) = \mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathcal{F}_2)\,;$$
$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x,\, \mathcal{F}_1) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x,\, \mathcal{F}_2) \;\; (\forall x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}))\,.$$

3. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}_1) = \mathcal{L}k(\mathcal{F}_2)$ *справедливі рівності:*

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_1 \rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_2 \rangle\,;$$
$$[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_1] = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_2]\,.$$

Тоді $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

Зауваження 3. Із системи позначень для універсальних кінематик, прийнятої в даному підрозділі, випливає, що для довільної універсальної кінематики $\mathcal{F}$ мають місце властивості 1 та властивості 2 (з заміною символу "$\mathfrak{C}$" на символ "$\mathcal{F}$" і терміну "кінематична множина" на термін "універсальна кінематика", а також з виключенням зайвих слів "чітко видима", оскільки довільна універсальна кінематика, за означенням, вже є чітко видимою).

4.3. Зауваження про системи відліку та їхні індекси

Нехай $\mathcal{Y}$ — довільна мінлива множина або довільна кінематична множина, або довільна універсальна кінематика. Із [14, властивості 3(1,2)], а також із властивостей 1(1,2) та зауваження 3 випливає, що для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{Y})$ існує єдина система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Y})$ така, що:

$$\mathtt{ind}(\mathfrak{l}) = \alpha.$$

надалі цю систему відліку будемо позначати через $\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{Y})$:

$$\forall \alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{Y}) \qquad \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{Y}) = \mathfrak{l}, \text{ де } \quad \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Y})\,,\ \mathtt{ind}(\mathfrak{l}) = \alpha.$$

Безпосередньо з означення системи відліку $\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{Y})$, враховуючи [14, властивість 3(1)], властивість 1(1) та зауваження 3 отримуємо такі властивості:

Властивості 3. *Нехай* $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}_1$ *— довільні мінливі множини або кінематичні множини ,або універсальні кінематики; тоді:*

1. *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Y})$ *справедлива рівність:*

$$\mathfrak{l} = \mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}(\mathcal{Y}), \quad \textit{при цьому}$$
$$\mathcal{L}k(\mathcal{Y}) = \{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{Y}) \mid \alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{Y})\}. \tag{9}$$

2. *Якщо* $\mathcal{L}k(\mathcal{Y}_1) = \mathcal{L}k(\mathcal{Y})$, *то:*

   а) $\mathcal{I}nd(\mathcal{Y}) = \mathcal{I}nd(\mathcal{Y}_1)$*;*

   б) *для довільного індексу* $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{Y}) = \mathcal{I}nd(\mathcal{Y}_1)$ *справедлива рівність:*

$$\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{Y}) = \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{Y}_1).$$

4.4. Еквівалентність універсальних кінематик відносно перетворення координат.

Означення 6. *Універсальні кінематики* $\mathcal{F}_1$ *і* $\mathcal{F}_2$ *будемо називати* ***еквівалентними відносно перетворення координат****, якщо:*

1. $\mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)$*;*

2. *Для довільного індексу* $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)$ *базові кінематичні множини* $\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)$ *і* $\mathcal{F}_2 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)$ *є хроногеометрично спорідненими, тобто виконуються рівності:*

$$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)); \tag{10}$$
$$\mathsf{BG}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1); \mathcal{F}_1) = \mathsf{BG}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2); \mathcal{F}_2) \tag{11}$$

   (зауважимо, що з рівностей (10) і (11) випливають рівності $\mathbf{Zk}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1); \mathcal{F}_1) = \mathbf{Zk}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2); \mathcal{F}_2)$ *і* $\mathbb{M}k(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1); \mathcal{F}_1) = \mathbb{M}k(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2); \mathcal{F}_2)$*)*

3. *Для довільних індексів* $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)$ *справедливі рівності:*

$$[\mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1] = [\mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2), \mathcal{F}_2].$$

Той факт, що універсальні кінематики $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ еквівалентні відносно перетворення координат, будемо позначати наступним чином:

$$\mathcal{F}_1 \, [\equiv] \, \mathcal{F}_2.$$

Безпосереднім і прямим наслідком означення 6 є наступне твердження.

Твердження 3. *Відношення $[\equiv]$ є відношенням еквівалентності на будь-якій множині $\mathcal{M}$, що складається з універсальних кінематик.*

5. Еволюційні розширення базових кінематичних множин.

Означення 7. *Базові кінематичні множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0$ і $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1$ будемо називати* ***хроногеометрично спорідненими****, якщо:*

1) $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right)$*;*
2) $\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right)$*.*

Надалі через $\underset{\rightarrow}{\subseteq}$, $\underset{\rightarrow}{\sqsubseteq}$ будемо позначати відношення еволюційного та суперэволюційного включення базових мінливих множин, введені в роботі [20]. Інколи для базових мінливих множин $\mathcal{B}_1$і $\mathcal{B}_2$ замість позначень $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_2$ ($\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_2$) будемо використовувати позначення $\mathcal{B}_2 \underset{\leftarrow}{\supseteq} \mathcal{B}_1$, ($\mathcal{B}_2 \underset{\leftarrow}{\sqsupseteq} \mathcal{B}_1$) відповідно.

Зауваження 4. Нехай, $\mathcal{B}_0$ і $\mathcal{B}_1$ — базові мінливі множини такі, що $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_1$. Тоді, згідно з [20, твердження 4], $\mathfrak{Bs}\,(\mathcal{B}_0) \subseteq \mathfrak{Bs}\,(\mathcal{B}_1)$.

Отже, *якщо для хроногеометрично споріднених базових кінематичних множин $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0$ і $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1$ справедливе співвідношення* $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right)$, *то* $\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right) = \mathfrak{Bs}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right)\right) \subseteq \mathfrak{Bs}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right)\right) = \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right)$. Зокрема, *якщо* $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right)$ то, згідно з [20, твердження 5], $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right)$, *а отже* $\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right) \subseteq \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right)$.

Означення 8.

1. *Базову кінематичну множину $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1$ будемо називати* ***еволюційним розширенням*** *базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0$, якщо:*

   (1.а) *$\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0$ і $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1$ є хроногеометрично спорідненими;*

   (1.б) *Базова мінлива множина $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right)$ є еволюційним розширенням базової мінливої множини $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right)$ (тобто $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right) \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right)$);*

   (1.в) *Для довільного $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right) (\subseteq \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right))$ справедлива рівність $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1}(x) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0}(x)$ (тобто, іншими словами, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1}$).*

   Якщо базова кінематична множина $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1$ є еволюційним розширенням базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0$, то будемо також говорити, що $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0$ еволюційно включається в $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1$ і позначати цей факт через $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1$ або через $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1 \underset{\leftarrow}{\supsetneq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0$.

2. *Базову кінематичну множину $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1$ будемо називати* ***супереволюційним розширенням*** *базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0$, якщо:*

   (2.а) *$\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0$ і $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1$ є хроногеометрично спорідненими;*

   (2.б) *Базова мінлива множина $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right)$ є супереволюційним розширенням базової мінливої множини $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right)$ (тобто $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right)$).*

   (2.в) *Для довільного $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right) (\subseteq \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right))$ справедлива рівність $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1}(x) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0}(x)$ (тобто, іншими словами, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0}$).*

   Якщо базова кінематична множина $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1$ є супереволюційним розширенням базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0$, то *будемо, також говорити, що $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$ суперeволюційно включається в $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ і позначати цей факт через $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ або через $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\leftarrow}{\sqsupseteq} \mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$.*

Також будемо використовувати позначення $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\not\subseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ та $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\not\sqsubseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ у випадках, коли виконуються умови $\neg\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right)$ або $\neg\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right)$, відповідно (де символ “$\neg$” означає логічну операцію заперечення).

Згідно із [20, твердження 5], для довільних базових мінливих множин $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$ з умови $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_1$ випливає співвідношення $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_1$. Звідси отримуємо наступний наслідок з означення 8.

Наслідок 1. *Будь-яке суперeволюційне розширення $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ довільної базової кінематичної множини $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$ є її еволюційним розширенням, тобто якщо $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$, то $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$.*

Зауваження 5. В роботі [20, приклад 1] було показано, що існують базові мінливі множини $\mathcal{B}_0$ і $\mathcal{B}_1$ такі, що $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_1$, але $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\not\sqsubseteq} \mathcal{B}_1$. Розглянемо довільний координатний простір $\mathfrak{Q}$ і довільне відображення $\mathbf{k}_1 : \mathfrak{Bs}\,(\mathcal{B}_1) \mapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$. Оскільки $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_1$, то, згідно з [20, твердження 4], $\mathfrak{Bs}\,(\mathcal{B}_0) \subseteq \mathfrak{Bs}\,(\mathcal{B}_1)$. Отже відображення $\mathbf{k}_1$ визначене і на множині $\mathfrak{Bs}\,(\mathcal{B}_0)$. Покладемо:

$$\mathbf{k}_0 := (\mathbf{k}_1)_{\restriction \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}_0)}\,,$$

де $(\mathbf{k}_1)_{\restriction \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}_0)}$ — звуження відображення $\mathbf{k}_1$ на множину $\mathfrak{Bs}\,(\mathcal{B}_0)$. Тоді отримаємо базові кінематичні множини $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} = (\mathcal{B}_0, (\mathfrak{Q}, \mathbf{k}_0))$ і $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} = (\mathcal{B}_1, (\mathfrak{Q}, \mathbf{k}_1))$ такі, що $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$, але $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\not\sqsubseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$. Таким чином, *не кожне еволюційне розширення базової кінематичної множини $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$ є її суперeволюційним розширенням.*

Твердження 4. *Еволюційне включення базових кінематичних множин має такі властивості:*

1. *$\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$ для довільної базової кінематичної множини $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$;*

2. Якщо $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1 \underset{\to}{\subsetneq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2$ *і* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2 \underset{\to}{\subsetneq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1$ *то* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1 = \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2$*;*

3. Якщо $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1 \underset{\to}{\subsetneq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2$ *і* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2 \underset{\to}{\subsetneq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_3$ *то* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1 \underset{\to}{\subsetneq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_3$*.*

Доведення. 1. У випадку $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0 = \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1$ умови (1.а) та (1.в) означення 8 виконуються тривіальним чином. Умова (1.б) також виконується, оскільки, в силу [20, твердження 6], $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right) \underset{\to}{\subsetneq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right)$.

2. Нехай $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1 \underset{\to}{\subsetneq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2$ і $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2 \underset{\to}{\subsetneq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1$. Тоді, за означенням 8 (пункт 1), $\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2\right)$, $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right) \underset{\to}{\subsetneq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2\right)$, $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2\right) \underset{\to}{\subsetneq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right)$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2}$ і $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1}$. Отже, використовуючи [20, твердження 6], отримуємо $\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2\right)$, $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right) = \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2\right)$ і $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1} = \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2}$. Тому, $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1 = \left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right), \left(\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right), \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1}\right)\right) = \left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2\right), \left(\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2\right), \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2}\right)\right) = \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2$.

3. Нехай $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1 \underset{\to}{\subsetneq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2$ і $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2 \underset{\to}{\subsetneq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_3$. Тоді, за означенням 8 (пункт 1), $\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_3\right)$, $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_3\right)$, $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right) \underset{\to}{\subsetneq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2\right)$, $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2\right) \underset{\to}{\subsetneq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_3\right)$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2}$ і $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_3}$. Отже, використовуючи [20, твердження 6], отримуємо $\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_3\right)$, $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_3\right)$, $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1\right) \underset{\to}{\subsetneq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_3\right)$ і $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_3}$. Тому, за означенням 8 (пункт 1), $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1 \underset{\to}{\subsetneq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_3$. □

Твердження 5. *Супереволюційне включення базових кінематичних множин має такі властивості:*

1. $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0$ *довільної базової кінематичної множини* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0$*;*

2. Якщо $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2$ *і* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1$ *то* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1 = \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2$*;*

3. Якщо $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2$ *і* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_3$ *то* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_3$*.*

Доведення. 1. У випадку $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0 = \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1$ умови (2.а) та (2.в) означення 8 виконуються тривіальним чином. Умова (2.б) також виконується, оскільки, в силу [20, твердження 10], $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right) \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_0\right)$.

2. Нехай $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2$ і $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1$. Тоді, за наслідком 1, $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1 \underset{\to}{\subsetneq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2$ і $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2 \underset{\to}{\subsetneq} \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1$. Отже, за твердженням 4, $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_1 = \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_2$.

3. Нехай $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$ і $\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}$. Тоді, за означенням 8 (пункт 2), $\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right)$, $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right)$, $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)$, $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right)$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}}$ і $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}}$. Отже, використовуючи [20, твердження 10], отримуємо $\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right)$, $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right)$, $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right)$ і $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}}$. Тому, за означенням 8 (пункт 2), $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}$. □

Твердження 6. *Нехай $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}, \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$ — базові кінематичні множини, причому $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subset} \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$. Тоді:*

1. $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)$*;*

2. $\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)$*;*

3. якщо ж, додатково, $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$*, то* $\mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)$*.*

Доведення. Якщо $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subset} \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$, то, за означенням 8:

$$\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\subset} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right).$$

1. Оскільки $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\subset} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)$, то, згідно з [20, означення 9] та системою позначень, прийнятою в пункті 2.2.1, отримуємо:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right)\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right).$$

2. Аналогічно, використовуючи [20, твердження 4], отримуємо:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right)\right) \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)\right) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right).$$

3. Нехай додатково, $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$. Тоді, за означенням 8, $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)$. Із останнього суперееволюційного включення, за означенням [20, означення 10], випливає включення $\mathbb{L}d\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right)\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)\right)$. Звідси, враховуючи систему позначень, прийняту в пункті 2.2.1, отримуємо включення $\mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)$. □

6. Еволюційні розширення кінематичних множин

Означення 9. *Будемо говорити, що кінематичні множини* $\mathfrak{C}_1$ *і* $\mathfrak{C}_2$ ***хроногеометрично споріднені****, якщо:*

1. $\mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)$.

2. *Для довільного індексу* $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)$ *базові кінематичні множини:*

$$\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1) \quad i \quad \mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2)$$

   є хроногеометрично спорідненими.

Зауваження 6. 1. Нехай $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — гільбертовий простір над полем дійсних чисел і $\mathbf{Pk}\,(\mathfrak{H})$ — множина всіх операторів перетворення координат над $\mathfrak{H}$ (означення множини $\mathbf{Pk}\,(\mathfrak{H})$ можна знайти в роботах [14, 15]). Нехай $\mathcal{B}_1$,$\mathcal{B}_2$ — базові мінливі множини такі, що $\mathfrak{Bs}\,(\mathcal{B}_i) \subseteq \mathfrak{H}$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_i) = (\mathbb{R}, \leq)$ $(i \in \{1,2\})$, де $\leq$ — стандартний порядок на полі дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді, використовуючи [14, теорема 3 та властивості 7], неважко довести, що для довільної множини $\mathbb{S} \subseteq \mathbf{Pk}\,(\mathfrak{H})$ кінематичні множини $\mathfrak{Kim}\,(\mathbb{S}, \mathcal{B}_1; \mathfrak{H})$ і $\mathfrak{Kim}\,(\mathbb{S}, \mathcal{B}_2; \mathfrak{H})$ — хроногеометрично споріднені (означення кінематичних множин $\mathfrak{Kim}\,(\mathbb{S}, \mathcal{B}_1; \mathfrak{H})$ і $\mathfrak{Kim}\,(\mathbb{S}, \mathcal{B}_2; \mathfrak{H})$ можна знайти в роботі [15]). Зокрема при $c \in (0, \infty]$ хроногеометрично спорідненими будуть такі пари кінематичних множин, введених в роботі [15]:

а) $\mathfrak{KP}\,(\mathfrak{H}, \mathcal{B}_1, c)$ і $\mathfrak{KP}\,(\mathfrak{H}, \mathcal{B}_2, c)$;

б) $\mathfrak{KP}_0\,(\mathfrak{H}, \mathcal{B}_1, c)$ і $\mathfrak{KP}_0\,(\mathfrak{H}, \mathcal{B}_2, c)$;

в) $\mathfrak{KPT}\,(\mathfrak{H}, \mathcal{B}_1, c)$ і $\mathfrak{KPT}\,(\mathfrak{H}, \mathcal{B}_2, c)$;

г) $\mathfrak{KPT}_0\,(\mathfrak{H}, \mathcal{B}_1, c)$ і $\mathfrak{KPT}_0\,(\mathfrak{H}, \mathcal{B}_2, c)$.

2. З прикладів, наведених в попередньому пункті зауваження, випливає, що на хроногеометрично споріднені кінематичні множини можна дивитися, як на різні моделі еволюції, що розгортаються в одному і тому ж геометрично-часовому оточенні.

Твердження 7. *Якщо для універсальних кінематик* $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathcal{Q}_1}\right)$ *і* $\mathcal{F}_2 = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}\right)$ *виконується співвідношення* $\mathcal{F}_1 \,[\equiv]\, \mathcal{F}_2$, *то кінематичні множини* $\mathfrak{C}_1$ *і* $\mathfrak{C}_2$ *є хроногеометрично спорідненими.*

Доведення. Якщо $\mathcal{F}_1 \,[\equiv]\, \mathcal{F}_2$, то, за означенням 6, $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)$. Згідно з системою позначень теорії універсальних кінематик, $\mathcal{L}k\,(\mathcal{F}_i) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_i)$ $(i \in \{1,2\})$. Тому, згідно з властивістю 3(2), $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_i) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_i)$ $(i \in \{1,2\})$, причому:

$$\begin{aligned}&\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_i) = \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_i)\\ &\qquad\qquad (\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_i)\,,\ i \in \{1,2\})\,.\end{aligned}$$

Отже, згідно з системою позначень теорії універсальних кінематик (див. пункт “e)” підрозділу 4.2.1) за означенням 6, для довільного $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}&\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) = \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)) = \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2)) = \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))\,;\\ &\mathsf{BG}\,(\mathfrak{C}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) = \mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)\,; \mathfrak{C}_1) = \mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)\,; \mathfrak{C}_1) =\\ &\qquad = \mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)\,; \mathcal{F}_1) = \mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2)\,; \mathcal{F}_2) = \mathsf{BG}\,(\mathfrak{C}_2 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))\,.\end{aligned}$$

Отже, за означенням 7, базові кінематичні множини $\mathfrak{C}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)$ і $\mathfrak{C}_2 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2)$ є хроногеометрично спорідненими (для довільного $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)$). Тому, за означенням 9, хроногеометрично спорідненими є кінематичні множини $\mathfrak{C}_1$ і $\mathfrak{C}_2$. □

Означення 10. *1. Будемо говорити, що кінематична множина* $\mathfrak{C}_2$ *є, відповідно,* ***еволюційним (суперэволюційним) розширенням*** *кінематичної множини* $\mathfrak{C}_1$, *якщо:*

(a) Кінематичні множини $\mathfrak{C}_1$ *і* $\mathfrak{C}_2$ *хроногеометрично споріднені.*

(b) Для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)$ має місце еволюційне (суперэволюційне) включення:

$$\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1) \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2)$$
$$\Big(\, \mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1) \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2) \,\Big) \tag{12}$$

(c) Для довільних індексів $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)$ і довільної мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))$ {[2]} виконується рівність:

$$\langle \mathbf{lk}_\beta\,(\mathfrak{C}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)\,, \mathfrak{C}_1 \rangle\, A = \langle \mathbf{lk}_\beta\,(\mathfrak{C}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2)\,, \mathfrak{C}_2 \rangle\, A.$$

2. *У тому випадку, коли кінематична множина $\mathfrak{C}_2$ є, відповідно, еволюційним (суперэволюційним) розширенням кінематичної множини $\mathfrak{C}_1$, будемо також говорити, що $\mathfrak{C}_1$ еволюційно (суперэволюційно) включається в $\mathfrak{C}_2$, використовуючи, відповідно, наступні позначення:*

$$\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathfrak{C}_2 \text{ або } \mathfrak{C}_2 \underset{\leftarrow}{\supsetneq} \mathfrak{C}_1 \qquad \Big(\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathfrak{C}_2 \text{ або } \mathfrak{C}_2 \underset{\leftarrow}{\sqsupset} \mathfrak{C}_1\Big)\,.$$

Твердження 8. *Нехай $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ і $\mathfrak{C}_3$ — довільні кінематичні множини. Тоді:*

1. *$\mathfrak{C} \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathfrak{C}$.*
2. *Якщо $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathfrak{C}_2$ і $\mathfrak{C}_2 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathfrak{C}_1$, то $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$.*

---

[2] З еволюційного (суперэволюційного) включення (12), за означенням 8 і твердженням [20, твердження 5] випливає еволюційне включення, $\mathsf{BE}\,(\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathsf{BE}\,(\mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))$, а отже, за означенням [20, означення 9], отримуємо включення:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathsf{BE}\,(\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1))) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathsf{BE}\,(\mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))) = \\ = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))\,.$$

3. Якщо $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathfrak{C}_2$ *і* $\mathfrak{C}_2 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathfrak{C}_3$, *то* $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathfrak{C}_3$.

Доведення. Перший та третій пункти твердження 8 випливають безпосередньо з означень 9, 10 та твердження [20, твердження 6]. Отже, потребує доведення лише другий пункт даного твердження.

Нехай для кінематичних множин $\mathfrak{C}_1$ і $\mathfrak{C}_2$ виконуються умови $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathfrak{C}_2$ і $\mathfrak{C}_2 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathfrak{C}_1$. Тоді, за означеннями 9 і 10, $\mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)$ і для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)$ мають місце еволюційні включення:

$$\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1) \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2) \quad \text{і} \quad \mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2) \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)\,.$$

Отже, згідно з твердженням 4:

$$\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1) = \mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2) \quad (\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2))\,. \tag{13}$$

Звідси, згідно з позначеннями, прийнятими в пункті **д)** підрозділу 2.2.2:

$$\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)\,\hat{} = \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2)\,\hat{}\,,$$

а тому, згідно з властивістю 1(4):

$$\begin{aligned} \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1) &= (\mathtt{ind}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1))\,, \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)\,\hat{}\,) = (\alpha, \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)\,\hat{}\,) = \\ &= (\alpha, \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2)\,\hat{}\,) = \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2) \;\; (\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2))\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Отже, згідно з формулою (9):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) &= \{\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1) \mid \alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1)\} = \\ &= \{\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2) \mid \alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)\} = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)\,. \end{aligned} \tag{15}$$

З рівностей (13) та (9) випливає, що:

$$\mathfrak{C}_1 \restriction \mathfrak{l} = \mathfrak{C}_2 \restriction \mathfrak{l} \qquad (\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2))\,. \tag{16}$$

Використовуючи рівність (14) та пункт 1c означення 10, для довільних індексів $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_2\right)$ і довільної мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right)$ отримуємо:

$$\left\langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathfrak{C}_1\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right), \mathfrak{C}_1\right\rangle A = \left\langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathfrak{C}_2\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right), \mathfrak{C}_2\right\rangle A.$$

Отже, в силу рівності $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right)$ отримуємо рівність:

$$\left\langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathfrak{C}_1\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right), \mathfrak{C}_1\right\rangle = \left\langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathfrak{C}_2\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right), \mathfrak{C}_2\right\rangle.$$

Звідси, в силу довільності індексів $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_2\right)$ і рівності (9), для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_2\right)$ маємо рівність:

$$\left\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_1\right\rangle = \left\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_2\right\rangle.$$

Таким чином, в силу рівностей (15), (16) бачимо, що всі умови твердження [12, твердження 4] виконані, і, згідно з цим твердженням, отримуємо рівність $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$. □

Наступне твердження показує, що із супереволюційного включення кінематичних множин випливає їх еволюційне включення.

Твердження 9. *Якщо $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ — кінематичні множини і $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_2$, то $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$.*

Доведення. Дане твердження є безпосереднім наслідком означення 10 та наслідку 1. □

Твердження 10. *Нехай $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ — кінематичні множини, причому $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$. Тоді для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_2\right)$ справедливі наступні твердження:*

1. $\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right)$;

2. $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right)$;

3. $\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right)$;

4. *якщо ж, додатково,* $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_2$, *то* $\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right)$ *і* $\mathbb{L}d\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right)$*;*

5. *для довільного* $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right)$ *виконується рівність:*

$$\mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)}\left(x, \mathfrak{C}_1\right) = \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2)}\left(x, \mathfrak{C}_2\right);$$

6. *для довільного* $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right)$ *виконується рівність:*

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)\rangle}\left(\omega, \mathfrak{C}_1\right) = \mathbf{Q}^{\langle \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2)\rangle}\left(\omega, \mathfrak{C}_2\right).$$

Доведення. Оскільки $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$, то, за означеннями 10 та 9, $\mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_2\right)$. Розглянемо довільний індекс $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_2\right)$.

1. За означенням 10, $\mathfrak{C}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)$. Звідси, за означенням 8 $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right)$. Згідно з позначеннями, введеними в пункті **e)** підрозділу 2.2.2, $\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_i\right)$ $\left(\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) := \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_i \upharpoonright \mathfrak{l}\right) = \mathfrak{l}^\wedge\right)$ $(i \in \{1,2\})$. Тому, отримуємо, $\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right)$.

2. Оскільки $\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right)$, то, використовуючи рівності (1) та [20, означення 9], отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) &= \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right)\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right)\right) = \\ &= \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right).\end{aligned}$$

3. Аналогічно, використовуючи рівності (1) та [20, твердження 4], отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) &= \mathfrak{Bs}\left(\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right)\right) \subseteq \mathfrak{Bs}\left(\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right)\right) = \\ &= \mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right).\end{aligned}$$

4. Нехай, додатково, $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_2$. Тоді, за означенням 10, $\mathfrak{C}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_2 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)$. Звідси, за означенням 8,

$\mathsf{BE}(\mathfrak{C}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)) \underset{\to}{\sqsubset} \mathsf{BE}(\mathfrak{C}_2 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2))$. Тому, враховуючи позначення, введені в пункті **е)** підрозділу 2.2.2, отримуємо,

$$\mathsf{BE}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)) \underset{\to}{\sqsubset} \mathsf{BE}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2)).$$

Із останнього супереволюційного включення, за означенням [20, означення 10], випливає включення $\mathbb{L}d(\mathsf{BE}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1))) \subseteq \mathbb{L}d(\mathsf{BE}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2)))$. Звідси, враховуючи рівності (1), отримуємо включення $\mathbb{L}d(\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)) \subseteq \mathbb{L}d(\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2))$.

5. Нехай $x \in \mathfrak{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1))$. За означенням 10, $\mathfrak{C}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1) \underset{\to}{\subseteq} \mathfrak{C}_2 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2)$. Тому, використовуючи позначення, введене в пункті є) підрозділу 2.2.2 і означення 8, отримуємо

$$\mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)}(x, \mathfrak{C}_1) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)}(x) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_2 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2)}(x) = \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2)}(x, \mathfrak{C}_2).$$

6. Використовуючи результат, отриманий в попередньому пункті і означення координат Мінковського (див. формулу (3)), для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1))$ отримуємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1) \rangle}(\omega, \mathfrak{C}_1) = \big(\mathsf{tm}(\omega), \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)}(\mathsf{bs}(\omega), \mathfrak{C}_1)\big) =$$
$$= \big(\mathsf{tm}(\omega), \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2)}(\mathsf{bs}(\omega), \mathfrak{C}_2)\big) = \mathbf{Q}^{\langle \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2) \rangle}(\omega, \mathfrak{C}_2).$$

□

Твердження 11. *Нехай $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ і $\mathfrak{C}_3$ — довільні кінематичні множини. Тоді:*

1. $\mathfrak{C} \underset{\to}{\sqsubset} \mathfrak{C}$.
2. *Якщо* $\mathfrak{C}_1 \underset{\to}{\sqsubset} \mathfrak{C}_2$ *і* $\mathfrak{C}_2 \underset{\to}{\sqsubset} \mathfrak{C}_1$, *то* $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$.
3. *Якщо* $\mathfrak{C}_1 \underset{\to}{\sqsubset} \mathfrak{C}_2$ *і* $\mathfrak{C}_2 \underset{\to}{\sqsubset} \mathfrak{C}_3$, *то* $\mathfrak{C}_1 \underset{\to}{\sqsubset} \mathfrak{C}_3$.

Доведення. Перший та третій пункти даного твердження випливають безпосередньо з означень 9, 10 та твердження 5. Другий пункт випливає з твердження 9 та другого пункту твердження 8. □

7. Еволюційні розширення універсальних кінематик

Означення 11. *Будемо говорити, що універсальна кінематика* $\mathcal{F}_2 = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}\right)$ *є, відповідно,* ***еволюційним (суперeволюційним) розширенням*** *універсальної кінематики* $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathcal{Q}_1}\right)$, *якщо* $\mathcal{F}_1 [\equiv] \mathcal{F}_2$ *і при цьому* $\mathfrak{C}_1 \underset{\to}{\subsetneq} \mathfrak{C}_2$ $(\mathfrak{C}_1 \underset{\to}{\sqsubset} \mathfrak{C}_2)$*. Якщо* $\mathcal{F}_2$ *є еволюційним (суперeволюційним) розширенням* $\mathcal{F}_1$*, то будемо використовувати позначення:*

$$\mathcal{F}_1 \underset{\to}{\subsetneq} \mathcal{F}_2 \quad \left(\mathcal{F}_1 \underset{\to}{\sqsubset} \mathcal{F}_2\right).$$

Твердження 12. *Для універсальних кінематик* $\mathcal{F}_1$ *і* $\mathcal{F}_2$ *співвідношення* $\mathcal{F}_1 \underset{\to}{\subsetneq} \mathcal{F}_2$ *виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1. $\mathcal{F}_1 [\equiv] \mathcal{F}_2$. *(звідси, за означенням 6, випливає, що* $\mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)$*).*

2. *Для довільного індексу* $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)$ *має місце еволюційне включення:*

$$\mathcal{F}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1) \underset{\to}{\subsetneq} \mathcal{F}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2) \tag{17}$$

(звідси, за твердженням 6, випливає, що $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2))$*).*

3. *Для довільних індексів* $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)$ *і довільної мінливої системи* $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2))$ *виконується рівність:*

$$\langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1 \rangle A = \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2), \mathcal{F}_2 \rangle A. \tag{18}$$

Доведення. **A)**. Нехай $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathcal{Q}_1}\right)$, $\mathcal{F}_2 = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}\right)$ — універсальні кінематики і при цьому виконується умова $\mathcal{F}_1 \underset{\to}{\subsetneq} \mathcal{F}_2$. Тоді, за означенням 11, мусять виконуватись умови:

$$\mathcal{F}_1 \,[\equiv]\, \mathcal{F}_2 \quad \text{і} \quad \mathfrak{C}_1 \underset{\to}{\subsetneq} \mathfrak{C}_2.$$

З умови $\mathcal{F}_1 \,[\equiv]\, \mathcal{F}_2$, за означенням 6, випливає рівність $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)$. Отже:

$$\mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)\,.$$

Оскільки, $\mathcal{L}k\,(\mathcal{F}_i) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_i)$ $(i \in \{1,2\})$, то згідно з властивістю 3(2) маємо:

$$\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_i) = \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_i) \quad (i \in \{1,2\}\,,\ \alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_i) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_i)). \tag{19}$$

Отже, враховуючи систему позначень теорії універсальних кінематик (див. підрозділ 4.2.1) при $i \in \{1,2\}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_i) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_i)$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_i)) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_i))$ отримуємо:

$$\mathfrak{C}_i \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_i) = \mathfrak{C}_i \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_i) = \mathcal{F}_i \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_i)\,; \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{lk}_\beta\,(\mathfrak{C}_i) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_i)\,, \mathfrak{C}_i \rangle\, A &= \langle \mathbf{lk}_\beta\,(\mathcal{F}_i) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_i)\,, \mathfrak{C}_i \rangle\, A = \\ &= \langle \mathbf{lk}_\beta\,(\mathcal{F}_i) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_i)\,, \mathcal{F}_i \rangle\, A. \end{aligned} \tag{21}$$

З умови $\mathfrak{C}_1 \underset{\to}{\subsetneq} \mathfrak{C}_2$, за означенням 10 випливає, що для довільних індексів $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)$ і довільної мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))$ виконуються співвідношення:

$$\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1) \underset{\to}{\subsetneq} \mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2)\,; \tag{22}$$

$$\langle \mathbf{lk}_\beta\,(\mathfrak{C}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)\,, \mathfrak{C}_1 \rangle\, A = \langle \mathbf{lk}_\beta\,(\mathfrak{C}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2)\,, \mathfrak{C}_2 \rangle\, A. \tag{23}$$

Звідси, враховуючи (20), (21) і (19) отримуємо співвідношення (17), (18). Отже, умови 1-3 даного твердження — виконані.

Б) Навпаки, нехай виконуються умови 1-3 даного твердження. Тоді, $\mathcal{F}_1 \,[\equiv]\, \mathcal{F}_2$, а також мають місце співвідношення (20), (21). Тому із співвідношень (17), (18) випливають співвідношення (22), (23) для $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) \subseteq$

$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right)$. І, враховуючи, що, згідно з твердженням 7, кінематичні множини $\mathfrak{C}_1$ і $\mathfrak{C}_2$ — хроногеометрично споріднені, за означенням 10 отримуємо еволюційне включення $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathfrak{C}_2$. Тому, враховуючи, що $\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}_2$, за означенням 11, отримуємо еволюційне включення $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{F}_2$. □

Аналогічно до твердження 12 доводиться наступне твердження.

Твердження 13. *Для універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ співвідношення $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{F}_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1. *$\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}_2$.*
2. *Для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_2\right)$ має місце суперреволюційне включення:*
$$\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{F}_2 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right). \qquad (24)$$
3. *Для довільних індексів $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_2\right)$ і довільної мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)$ виконується рівність:*

$$\left\langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_1\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right), \mathcal{F}_1 \right\rangle A = \left\langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_2\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right), \mathcal{F}_2 \right\rangle A. \qquad (25)$$

Твердження 14. *Нехай $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ і $\mathcal{F}_3$ — довільні універсальні кінематики. Тоді:*

1. *$\mathcal{F} \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{F}$.*
2. *Якщо $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{F}_2$ і $\mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{F}_1$, то $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.*
3. *Якщо $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{F}_2$ і $\mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{F}_3$, то $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{F}_3$.*

Доведення. Перший і третій пункти даного твердження випливають безпосередньо з означення 11, а також з тверджень 3 та 8.

Доведемо другий пункт твердження. Нехай $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathcal{Q}_1}\right)$, $\mathcal{F}_2 = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}\right)$ — універсальні кінематики, де

$$\overleftarrow{\mathcal{Q}_1} = \left(\widetilde{Q}^{(1)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C}_1)=\mathcal{L}k(\mathcal{F}_1)}, \quad \overleftarrow{\mathcal{Q}_2} = \left(\widetilde{Q}^{(2)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C}_2)=\mathcal{L}k(\mathcal{F}_2)},$$

причому $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_1$. Тоді, за означенням 11, $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_1$ і $\mathcal{F}_1 [\equiv] \mathcal{F}_2$. Отже, за твердженням 8, $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$. Тому:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}k(\mathcal{F}_1) &= \mathcal{L}k(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C}_2) = \mathcal{L}k(\mathcal{F}_2); \\ \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) &= \mathcal{I}nd(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd(\mathfrak{C}_2) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2); \\ \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1) &= \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1) = \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2) = \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2) \\ &\qquad (\forall \alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)). \end{aligned}$$

Оскільки $\mathcal{F}_1 [\equiv] \mathcal{F}_2$, то, використовуючи означення 6, а також позначення, прийняті в підрозділі 4.2., для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}_1) = \mathcal{L}k(\mathcal{F}_2)$ виду $\mathfrak{l} = \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1) = \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)$, $\mathfrak{m} = \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1) = \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_2)$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2))$ отримуємо:

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}^{(1)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} &= [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_1] = [\mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1] = \\ &= [\mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2), \mathcal{F}_2] = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_2] = \widetilde{Q}^{(2)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}. \end{aligned}$$

Отже, для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}_1) = \mathcal{L}k(\mathcal{F}_2)$ виконується рівність $\widetilde{Q}^{(1)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} = \widetilde{Q}^{(2)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}$. Тому, $\overleftarrow{\mathcal{Q}_1} = \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}$ і $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathcal{Q}_1}\right) = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}\right) = \mathcal{F}_2$. □

Безпосередньо з означення 11, а також з твердження 9, випливає наступне твердження:

Твердження 15. *Якщо $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ — універсальні кінематики і $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_2$, то $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_2$.*

Твердження 16. *Нехай, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ і $\mathcal{F}_3$ — довільні універсальні кінематики. Тоді:*

1. $\mathcal{F} \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathcal{F}$.

2. *Якщо* $\mathcal{F}_1 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_2$ *і* $\mathcal{F}_2 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_1$, *то* $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

3. *Якщо* $\mathcal{F}_1 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_2$ *і* $\mathcal{F}_2 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_3$, *то* $\mathcal{F}_1 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_3$.

Доведення. Перший і третій пункти даного твердження випливають безпосередньо з означення 11, а також з тверджень 3 та 11. Другий пункт випливає з тверджень 15 та 14, пункт 2. □

Твердження 17. *Нехай* $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ *— універсальні кінематики, причому* $\mathcal{F}_1 \underset{\to}{\subseteq} \mathcal{F}_2$. *Тоді для довільного індексу* $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)$ *справедливі наступні твердження:*

1. $\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \underset{\to}{\subseteq} \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)$.

2. $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)$.

3. $\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)$.

4. *Якщо ж, додатково,* $\mathcal{F}_1 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_2$, *то* $\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)$ *і* $\mathbb{L}d\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)$.

5. *Для довільного* $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right)$ *виконується рівність:*
$$\mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)}\left(x, \mathcal{F}_1\right) = \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)}\left(x, \mathcal{F}_2\right).$$

6. *Для довільного* $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right)$ *виконується рівність:*
$$\mathbf{Q}^{\langle \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1) \rangle}\left(\omega, \mathcal{F}_1\right) = \mathbf{Q}^{\langle \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2) \rangle}\left(\omega, \mathcal{F}_2\right).$$

Доведення. Нехай $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathcal{Q}_1}\right)$ і $\mathcal{F}_2 = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}\right)$ — універсальні кінематики, такі, що $\mathcal{F}_1 \underset{\to}{\subseteq} \mathcal{F}_2$. Тоді, за означенням 11, $\mathfrak{C}_1 \underset{\to}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$, а при додатковій умові $\mathcal{F}_1 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_2$, отримаємо супереволюційне включення $\mathfrak{C}_1 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_2$.

Згідно із пунктом б) підрозділу 4.2.1 для $i \in \{1,2\}$ маємо $\mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_i\right) = \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_i\right)$. Звідси, згідно з властивістю 3(2), маємо:

$$\mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_i\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_i\right); \tag{26}$$

$$\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right) = \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_i\right) \qquad \left(\forall \alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_i\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_i\right)\right). \tag{27}$$

Отже, використовуючи пункт г) підрозділу 4.2.1, для $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_i\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_i\right)$, $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right)\right) = \mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_i\right)\right)$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right)\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_i\right)\right)$ отримуємо:

$$\mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right)}\left(x, \mathcal{F}_i\right) = \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_i\right)}\left(x, \mathfrak{C}_i\right); \tag{28}$$

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right)\rangle}\left(\omega, \mathcal{F}_i\right) = \mathbf{Q}^{\langle \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_i\right)\rangle}\left(\omega, \mathfrak{C}_i\right). \tag{29}$$

З рівностей (26)–(29) з використанням твердження 10 отримуємо твердження 17. $\square$

8. Диз'юнктні еволюційні об'єднання універсальних кінематик

8.1. Існування і єдиність диз'юнктного еволюційного об'єднання універсальних кінематик

Означення 12. *Еквівалентні відносно перетворення координат універсальні кінематики $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ будемо називати* ***диз'юнктними****, якщо для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_2\right)$ {[3]} справедлива рівність $\mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \cap \mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right) = \emptyset$. У цьому випадку також будемо говорити, що універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ диз'юнктна з $\mathcal{F}_2$.*

Твердження 18. *Якщо універсальні кінематики $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ — диз'юнктні, то для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_2\right)$*

[3] Оскільки, за умовою означення, універсальні кінематики $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ еквівалентні відносно перетворення координат, то, за означенням 6, $\mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_2\right)$.

справедлива рівність:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right) = \emptyset.$$

Доведення. Справді, припустимо, що $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right) \neq \emptyset$, для деякого індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_2\right)$. Тоді існує елементарно-часовий стан $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)$. Згідно з [11, властивість 2.1(6)], $\mathsf{bs}\left(\omega\right) \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right)$ і $\mathsf{bs}\left(\omega\right) \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)$. Отже, $\mathsf{bs}\left(\omega\right) \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \cap \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)$, тобто $\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \cap \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right) \neq \emptyset$, що, за означенням 12, неможливо. Отже, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right) = \emptyset$. □

Означення 13. *Нехай $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1$ — довільні універсальні кінематики або кінематичні чи мінливі множини такі, що $\mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right)$. Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ покладемо:*

$$\mathfrak{l}\downharpoonright_{\mathcal{F}_1} := \mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}\left(\mathcal{F}_1\right). \tag{30}$$

*Систему відліку $\mathfrak{l}\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}$ будемо називати **спорідненою** з $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}_1$.*

На основі означення 13 отримуємо наступні властивості.

Властивості 4. *Нехай $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — довільні універсальні кінематики або кінематичні чи мінливі множини такі, що $\mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_2\right)$. Операція виділення спорідненої системи відліку має такі властивості:*

1. *$\mathfrak{l}\downharpoonright_{\mathcal{F}} = \mathfrak{l}$ для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$;*
2. *$\mathfrak{l}\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\downharpoonright_{\mathcal{F}_2} = \mathfrak{l}\downharpoonright_{\mathcal{F}_2}$, зокрема $\mathfrak{l}\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\downharpoonright_{\mathcal{F}} = \mathfrak{l}$ для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$.*

Твердження 19. *Нехай $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ — диз'юнктні універсальні кінематики і $\mathcal{F}$ довільна універсальна кінематика така, що $\mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_2\right)$. Тоді для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ справедлива рівність:*

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\downharpoonright_{\mathcal{F}_2}\right) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right) \cap \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\downharpoonright_{\mathcal{F}_2}\right) = \emptyset.$$

Доведення. Розглянемо довільну систему відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$. Покладемо: $\alpha := \mathtt{ind}\,(\mathfrak{l})$. Тоді $\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_1} = \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)$; $\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_2} = \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2)$. Отже, використовуючи означення 12 та твердження 18, отримуємо бажаний результат. □

Означення 14. *Будемо говорити, що універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є диз'юнктним еволюційним об'єднанням універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$, якщо:*

1. $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}_2$.
2. *Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ справедлива рівність:* [4]
$$\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) = \mathsf{BE}\,(\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_1}) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\,(\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_2})$$
3. *Для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність:* [5]
$$\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}\rangle\,\omega = \begin{cases} \langle !\,\mathfrak{m} \mid_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1\rangle\,\omega, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_1}) \\ \langle !\,\mathfrak{m} \mid_{\mathcal{F}_2} \leftarrow \mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_2}, \mathcal{F}_2\rangle\,\omega, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_2})\,. \end{cases}$$
4. *Для довільних $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність:*
$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}\,(\omega;\mathcal{F}) = \begin{cases} \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_1}\rangle}\,(\omega, \mathcal{F}_1)\,, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_1}) \\ \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_2}\rangle}\,(\omega, \mathcal{F}_2)\,, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_2})\,. \end{cases}$$

Для доведення деяких властивостей диз'юнктного еволюційного об'єднання універсальних кінематик знадобиться наступна лема.

---

[4] З умови $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}_2$ випливає рівність $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)$. Отже, за означенням 13, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ існують системи відліку $\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_1}$ і $\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_2}$.

[5] З умови $\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) = \mathsf{BE}\,(\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_1}) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\,(\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_2})$, згідно із [20, наслідок 2], випливає рівність $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathsf{BE}(\mathfrak{l})) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathsf{BE}\,(\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_1})) \cup \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathsf{BE}\,(\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_2}))$, тобто рівність $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_1}) \cup \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_2})$, де, згідно із твердженням 19, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_1}) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l} \mid_{\mathcal{F}_2}) = \emptyset$.

Лема 1. *Якщо для базової мінливої множини $\mathcal{B}$ справедлива рівність $\mathcal{B} = \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$ (де $\mathcal{A}$ — непорожня множина індексів і $\mathcal{B}_\alpha$ ($\alpha \in \mathcal{A}$) — базові мінливі множини), то*

$$\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{B}_\alpha\right).$$

Доведення. Згідно з [20, наслідок 2]:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right).$$

Отже, згідно [11, властивість 2.1(6)] або [8, property 7.1(6)]:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) &= \left\{\mathsf{bs}\left(\omega\right) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\right\} = \\ &= \left\{\mathsf{bs}\left(\omega\right) \mid \omega \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right\} = \\ &= \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \left\{\mathsf{bs}\left(\omega\right) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right\} = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{B}_\alpha\right).\end{aligned}$$

□

Твердження 20. *Нехай універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є диз'юнктним еволюційним об'єднанням диз'юнктних універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ і $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ — довільна система відліку $\mathcal{F}$. Тоді:*

1. $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\right) = \mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \overleftarrow{\vee} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)$.
2. $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \sqcup \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)$.
3. $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \sqcup \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)$.
4. *Для довільного елемента $x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність:*

$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(x, \mathcal{F}\right) = \begin{cases}\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}}\left(x, \mathcal{F}_1\right), & x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right); \\ \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}}\left(x, \mathcal{F}_2\right), & x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right).\end{cases}$$

Доведення. Розглянемо довільну систему відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$.

1. Згідно з твердженням 19,

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)\right) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right) = \emptyset.$$

Отже, згідно з [20, Лема 1, пункт 3] сім'я з двох базових мінливих множин $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)$ і $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)$ є еволюційно насиченою. Тому, згідно з [20, твердження 15] існує суперобеволюційне об'єднання $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \overset{\leftarrow}{\vee} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)$. Отже, використовуючи [20, наслідок 4] і пункт 2 означення 14 отримуємо:

$$\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) = \mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right) = \mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \overset{\leftarrow}{\vee} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right).$$

2. Згідно з другим пунктом означення 14 та [20, наслідок 2] отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}(\mathfrak{l})\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)\right) = \\ = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)\right) \cup \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \cup \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right),\end{aligned}$$

де, згідно з твердженням 19, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right) = \emptyset$. Отже:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \sqcup \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right).$$

3. Згідно з другим пунктом означення 14 та лемою 1 отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}(\mathfrak{l})\right) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)\right) = \\ = \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)\right) \cup \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)\right) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \cup \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right),\end{aligned}$$

де, згідно з твердженням 19, $\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \cap \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right) = \emptyset$. Отже:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \sqcup \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right).$$

4. Нехай, $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$. Тоді, згідно з третім пунктом даного твердження, має місце одна і тільки одна з умов $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)$ або $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)$.

а) Розглянемо випадок $x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1})$. Згідно з [11, властивість 2.1(6)] або [8, властивість 7.1(6)] існує елементарно-часовий стан $\omega_x \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1})$ такий, що $x = \mathsf{bs}(\omega_x)$. Оскільки $\omega_x \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1})$, то згідно з другим пунктом даного твердження $\omega_x \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$. Отже, згідно з четвертим пунктом означення 14:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega_x; \mathcal{F}) = \mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1} \right\rangle}(\omega_x; \mathcal{F}_1).$$

Звідси, використовуючи означення координат Мінковського (див. формулу (3)), отримуємо:

$$(\mathsf{tm}(\omega_x), \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(\mathsf{bs}(\omega_x); \mathcal{F})) = \Big(\mathsf{tm}(\omega_x), \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}}(\mathsf{bs}(\omega_x); \mathcal{F}_1)\Big).$$

Отже, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x; \mathcal{F}) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(\mathsf{bs}(\omega_x), \mathcal{F}) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}}(\mathsf{bs}(\omega_x); \mathcal{F}_1) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}}(x; \mathcal{F}_1)$.

б) Аналогічно у випадку $x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2})$ отримуємо $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x; \mathcal{F}) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}}(x; \mathcal{F}_2)$. □

Твердження 21. *Нехай універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є диз'юнктним еволюційним об'єднанням диз'юнктних універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$. Тоді:*

1. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}$.
2. *Якщо $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{F}}$ для деякої універсальної кінематики $\widetilde{\mathcal{F}}$, то $\mathcal{F} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{F}}$.*

Доведення.

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Доведемо, що $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}$.

1.1) Оскільки $\mathcal{F}$ є диз'юнктним еволюційним об'єднанням $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$, то, за означенням 14 (п.1), $\mathcal{F} [\equiv] \mathcal{F}_1$.

1.2) Оскільки $\mathcal{F} [\equiv] \mathcal{F}_1$, то, за означенням 6 (п.1), $\mathcal{I}nd(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1)$ і, використовуючи означення 6 (п.2) та систему позначень теорії універсальних кінематик (див. підрозділ 4.2.), для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1)$ отримуємо:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})) = \mathbf{Tm}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})) =$$

$$= \mathbf{Tm}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right);$$

$$\mathsf{BG}\left(\mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right) = \mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right), \mathcal{F}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right), \mathcal{F}_1\right) = \\ = \mathsf{BG}\left(\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right).$$

Отже, за означенням 7, базові кінематичні множини $\mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)$ і $\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)$ — хроногеометрично споріднені.

1.3) Нехай $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right)$. Покладемо:

$$\mathfrak{l} := \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right).$$

Тоді, за означенням 13:

$$\mathfrak{l} \downharpoonright_{\mathcal{F}_1} = \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right), \quad \mathfrak{l} \downharpoonright_{\mathcal{F}_2} = \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right).$$

Згідно з твердженням 20:

$$\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) = \mathsf{BE}\left(\mathfrak{l} \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right) \overset{\leftarrow}{\vee} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{l} \downharpoonright_{\mathcal{F}_2}\right).$$

Отже, згідно з [20, означення 13], $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l} \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathsf{BE}(\mathfrak{l})$, тобто $\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right)$. Отже, враховуючи систему позначень теорії універсальних кінематик (див. підрозділ 2.2.2, пункт "е)"), отримуємо:

$$\mathsf{BE}\left(\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) = \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \\ \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right) = \mathsf{BE}\left(\mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right) \tag{31}$$

Використовуючи пункт 4 твердження 20, для довільного $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l} \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right)$ отримуємо: $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(x, \mathcal{F}\right) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l} \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}}\left(x, \mathcal{F}_1\right)$, тобто $\mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})}\left(x, \mathcal{F}\right) = \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)}\left(x, \mathcal{F}_1\right)$. Звідси, використовуючи систему позначень теорії кінематичних множин (див. підрозділ 2.2.2, пункт "є)"), маємо:

$$\mathfrak{q}_{\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)}(x) = \mathfrak{q}_{\mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})}(x) \\ \left(\forall x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) = \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right)\right). \tag{32}$$

Враховуючи, що, згідно з пунктом 1.2) даного доведення, базові кінематичні множини $\mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})$ і $\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)$ — хроногеометрично споріднені, з рівностей (31), (32) за означенням 8 отримуємо включення:

$$\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1) \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) \qquad (\forall \alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1)).$$

(З останнього включення, зокрема, випливає, що $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}))$.)

1.4) Нехай $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1)$. Покладемо:

$$\mathfrak{l} := \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}), \quad \mathfrak{m} := \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}).$$

Тоді:

$$\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1} = \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1), \quad \mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1} = \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1). \tag{33}$$

Розглянемо довільну мінливу систему $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}))$, тобто, враховуючи (33), $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$. Використовуючи [9, теорема 5.2] або [8, theorem 11.2], а також пункт 3 означення 14, отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}), \mathcal{F} \rangle A = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F} \rangle A = \\
&\quad = \bigcup_{\omega \in A} \{\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F} \rangle \omega\} = \bigcup_{\omega \in A} \{\langle ! \, \mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1 \rangle \omega\} = \\
&\qquad = \langle \mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1 \rangle A = \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1 \rangle A.
\end{aligned}$$

З результатів, доведених в пунктах 1.1)–1.4), згідно з твердженням 13, випливає, що $\mathcal{F}_1 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathcal{F}$. Аналогічно доводиться, що $\mathcal{F}_2 \underset{\to}{\sqsubseteq} \mathcal{F}$.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Нехай $\widetilde{\mathcal{F}}$ — універсальна кінематика, і $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\to}{\subsetneq} \widetilde{\mathcal{F}}$. Оскільки $\mathcal{F}$, $\widetilde{\mathcal{F}}$ — універсальні кінематики, то їх можна подати у вигляді:

$$\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right), \quad \widetilde{\mathcal{F}} = \left(\widetilde{\mathfrak{C}}, \overleftarrow{\mathcal{Q}^{\sim}}\right),$$

де $\mathfrak{C}$, $\widetilde{\mathfrak{C}}$ — кінематичні множини.

2.1) Оскільки $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \widetilde{\mathcal{F}}$ і $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}$, то, згідно з першим пунктом тверджень 12 та 13, $\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}$ і $\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\widetilde{\mathcal{F}}$. Отже, за твердженням 3, $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\widetilde{\mathcal{F}}$. З останнього співвідношення, зокрема, випливає, що:

$$\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right).$$

Далі, згідно з твердженням 7, кінематичні множини $\mathfrak{C}$ і $\widetilde{\mathfrak{C}}$ — хроногеометрично споріднені. Тому за означенням 9 для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}) = \mathcal{I}nd\left(\widetilde{\mathfrak{C}}\right)$ базові кінематичні множини $\mathcal{F} \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) = \mathfrak{C} \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C})$ і $\widetilde{\mathcal{F}} \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right) = \widetilde{\mathfrak{C}} \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathfrak{C}}\right)$ — хроногеометрично споріднені.

2.2) Зафіксуємо довільний індекс $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$.

2.2.1) Оскільки $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \widetilde{\mathcal{F}}$, то, згідно з другим пунктом твердження 12, маємо:

$$\mathcal{F}_i \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i) \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \widetilde{\mathcal{F}} \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right) \quad (i \in \{1,2\}). \tag{34}$$

Тому, за означенням 8, для $i \in \{1,2\}$ маємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i)) = \mathsf{BE}\,(\mathcal{F}_i \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i)) \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathsf{BE}\left(\widetilde{\mathcal{F}} \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)\right) = \\ = \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)\right).\end{aligned}$$

Звідси, використовуючи другий пункт означення 14 та [20, означення 12], отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})) = \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) \downharpoonright_{\mathcal{F}_2}) = \\ = \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)) \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)\right).\end{aligned}$$

Отже:

$$\mathsf{BE}\,(\mathcal{F} \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})) \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathsf{BE}\left(\widetilde{\mathcal{F}} \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)\right).$$

2.2.2) Оскільки, згідно з (34), $\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$, то, за означенням 8, базові кінематичні множини $\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)$ і $\widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$ є хроногеометрично споріднені. Згідно з першим пунктом даного твердження $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}$. Отже, згідно з другим пунктом твердження 12, маємо, $\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})$. Тому, за означенням 8, базові кінематичні множини $\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)$ і $\mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})$ також хроногеометрично споріднені. З хроногеометричної спорідненості $\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)$ і $\widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$ та $\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)$ і $\mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})$ випливає хроногеометрична спорідненість базових кінематичних множин $\mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})$ і $\widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$.

2.2.3) Із співвідношення (34), за означенням 8 і твердженням [20, твердження 4 (пункт 1)], випливає, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{F}_i \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i)) \subseteq \mathfrak{Bs}\left(\widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)\right)$ $(i \in \{1,2\})$, причому:

$$\mathfrak{q}_{\mathcal{F}_i \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i)}(x) = \mathfrak{q}_{\widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\widetilde{\mathcal{F}})}(x) \qquad (\forall x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{F}_i \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i)) = \mathfrak{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i))), \tag{35}$$

де $(i \in \{1,2\})$. Із співвідношення (35), використовуючи твердження 20 (пункт 4), для $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}))$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q}_{\mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})}(x) &= \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})}(x, \mathcal{F}) = \\
&= \begin{cases} \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}}(x, \mathcal{F}_1), & x \in \mathfrak{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}) \\ \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) \downharpoonright_{\mathcal{F}_2}}(x, \mathcal{F}_2), & x \in \mathfrak{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) \downharpoonright_{\mathcal{F}_2}) \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)}(x, \mathcal{F}_1), & x \in \mathfrak{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \\ \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)}(x, \mathcal{F}_2), & x \in \mathfrak{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)) \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \mathfrak{q}_{\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)}(x), & x \in \mathfrak{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \\ \mathfrak{q}_{\mathcal{F}_2 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)}(x), & x \in \mathfrak{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)) \end{cases} = \mathfrak{q}_{\widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\widetilde{\mathcal{F}})}(x).
\end{aligned}$$

З підпунктів 2.2.1), 2.2.2), 2.2.3), за означенням 8, випливає еволюційне включення:

$$\mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$$

(для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$).

2.3) Нехай $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$. Оскільки $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{F}}$, то, за твердженням 12, для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{F}_i)$ $(i \in \{1,2\})$, отримуємо:

$$\langle \mathbf{lk}_\beta\,(\mathcal{F}_i) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_i)\,,\,\mathcal{F}_i \rangle \{\omega\} = \left\langle \mathbf{lk}_\beta \left(\widetilde{\mathcal{F}}\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha \left(\widetilde{\mathcal{F}}\right),\, \widetilde{\mathcal{F}} \right\rangle \{\omega\}\,.$$

Отже, враховуючи [8, equality (31)] або [9, рівність (9)]), маємо:

$$\langle !\,\mathbf{lk}_\beta\,(\mathcal{F}_i) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_i)\,,\,\mathcal{F}_i \rangle\, \omega = \left\langle !\,\mathbf{lk}_\beta \left(\widetilde{\mathcal{F}}\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha \left(\widetilde{\mathcal{F}}\right),\, \widetilde{\mathcal{F}} \right\rangle \omega$$
$$(\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{F}_i)\,,\; i \in \{1,2\})\,.$$

Звідси, використовуючи означення 14 (пункт 3), для $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}))$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\langle !\,\mathbf{lk}_\beta\,(\mathcal{F}) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})\,,\,\mathcal{F} \rangle\, \omega = \\
&= \begin{cases} \langle !\,\mathbf{lk}_\beta\,(\mathcal{F}) \restriction_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}) \restriction_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1 \rangle\, \omega, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}) \restriction_{\mathcal{F}_1}) \\ \langle !\,\mathbf{lk}_\beta\,(\mathcal{F}) \restriction_{\mathcal{F}_2} \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}) \restriction_{\mathcal{F}_2}, \mathcal{F}_2 \rangle\, \omega, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}) \restriction_{\mathcal{F}_2}) \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \langle !\,\mathbf{lk}_\beta\,(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)\,, \mathcal{F}_1 \rangle\, \omega, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)) \\ \langle !\,\mathbf{lk}_\beta\,(\mathcal{F}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2)\,, \mathcal{F}_2 \rangle\, \omega, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2)) \end{cases} = \\
&= \left\langle !\,\mathbf{lk}_\beta \left(\widetilde{\mathcal{F}}\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha \left(\widetilde{\mathcal{F}}\right),\, \widetilde{\mathcal{F}} \right\rangle \omega. \qquad (36)
\end{aligned}$$

З рівності (36), враховуючи властивість 2(2), для довільної множини $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}))$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{lk}_\beta\,(\mathcal{F}) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})\,,\,\mathcal{F} \rangle\, A = \bigcup_{\omega \in A} \{\langle !\,\mathbf{lk}_\beta\,(\mathcal{F}) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})\,,\,\mathcal{F} \rangle\, \omega\} = \\
&= \bigcup_{\omega \in A} \left\{ \left\langle !\,\mathbf{lk}_\beta \left(\widetilde{\mathcal{F}}\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha \left(\widetilde{\mathcal{F}}\right),\, \widetilde{\mathcal{F}} \right\rangle \omega \right\} = \\
&= \left\langle \mathbf{lk}_\beta \left(\widetilde{\mathcal{F}}\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha \left(\widetilde{\mathcal{F}}\right),\, \widetilde{\mathcal{F}} \right\rangle A.
\end{aligned}$$

В пункті 2.1 було доведено, що $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\widetilde{\mathcal{F}}$. Тому, з результатів, встановлених у підпунктах 2.2)–2.3), згідно з твердженням 12, випливає, що $\mathcal{F} \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \widetilde{\mathcal{F}}$. □

Наслідок 2. *Якщо диз'юнктне еволюційне об'єднання (диз'юнктних) універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ існує, то воно єдине.*

Доведення. Нехай $\mathcal{F}$ і $\widetilde{\mathcal{F}}$ — два диз'юнктні еволюційні об'єднання диз'юнктних універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$. Тоді, згідно з твердженням 21, пункт 1, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}$ і $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \widetilde{\mathcal{F}}$, а отже, згідно з твердженням 15, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{F}$ і $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \widetilde{\mathcal{F}}$. Тому, згідно з пунктом 2 твердження 21, $\mathcal{F} \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \widetilde{\mathcal{F}}$ і $\widetilde{\mathcal{F}} \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{F}$. Звідси, за твердженням 14, пункт 2, $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$. □

Враховуючи наслідок 2, у випадку, якщо $\mathcal{F}$ є диз'юнктним еволюційним об'єднанням (диз'юнктних) універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$, будемо використовувати позначення:

$$\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}_2 := \mathcal{F}.$$

Теорема 1. *Довільні еквівалентні відносно перетворення координат диз'юнктні універсальні кінематики $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ мають диз'юнктне еволюційне об'єднання $\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}_2$.*

Доведення. **I.** Нехай $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ — диз'юнктні універсальні кінематики. Тоді, за означенням 12, $\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}_2$. Тому, за означенням 6, $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)$. Покладемо:

$$\mathcal{A} := \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)\,.$$

Тоді, за означенням 6 (рівність (10)), для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{A}$ базові мінливі множини $\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1))$ і $\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2))$ — хронологічно споріднені. Отже, можна покласти:

$$\mathcal{B}_\alpha := \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2))\,, \quad \alpha \in \mathcal{A}. \tag{37}$$

Згідно з [20, наслідок 2], для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{A}$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_{\alpha}\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right)\right)\right) \cup \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_2\right)\right)\right) = \\ = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \cup \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_2\right)\right).\end{aligned} \tag{38}$$

При цьому, згідно з твердженням 18:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_2\right)\right) = \emptyset, \quad \alpha \in \mathcal{A}. \tag{39}$$

II. Для довільних $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_{\alpha}\right)$ покладемо:

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A := \quad & \left\langle \mathbf{lk}_{\beta}\left(\mathcal{F}_1\right) \leftarrow \mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right), \mathcal{F}_1 \right\rangle \left(A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right)\right)\right) \cup \\ & \cup \left\langle \mathbf{lk}_{\beta}\left(\mathcal{F}_2\right) \leftarrow \mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_2\right), \mathcal{F}_2 \right\rangle \left(A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_2\right)\right)\right).\end{aligned} \tag{40}$$

Доведемо, що сім'я відображень $\left(\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A}\right)$ є уніфікацією сприймання для сім'ї базових мінливих множин $\left(\mathcal{B}_{\alpha} \mid \alpha \in \mathcal{A}\right)$.

а) Оскільки для довільних $\alpha \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_{\alpha}\right)$ маємо $A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_i\right)\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_i\right)\right)$ $(i \in \{1,2\})$, і, згідно з [10, означення 3.1], відображення уніфікації $\left\langle \mathbf{lk}_{\beta}\left(\mathcal{F}_i\right) \leftarrow \mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_i\right), \mathcal{F}_i \right\rangle$ є відображеннями з $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_i\right)\right)}$ в $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\beta}\left(\mathcal{F}_i\right)\right)}$, то $\left\langle \mathbf{lk}_{\beta}\left(\mathcal{F}_i\right) \leftarrow \mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_i\right), \mathcal{F}_i \right\rangle \left(A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_i\right)\right)\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\beta}\left(\mathcal{F}_i\right)\right)$ $(i \in \{1,2\})$. Отже, права частина рівності (40) є підмножиною множини $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\beta}\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \cup \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\beta}\left(\mathcal{F}_2\right)\right)$, тобто, згідно (38), множини $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_{\beta}\right)$. Таким чином:

- $\mathfrak{U}_{\beta\alpha}$ *є відображенням з* $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_{\alpha}\right)}$ *в* $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_{\beta}\right)}$ *для довільних індексів* $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$.

б) Нехай $\alpha \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_{\alpha}\right)$. Тоді, використовуючи властивість 1(5) і рівність (38), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_{\alpha\alpha} A = \quad & \left\langle \mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right) \leftarrow \mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right), \mathcal{F}_1 \right\rangle \left(A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right)\right)\right) \cup \\ & \cup \left\langle \mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_2\right) \leftarrow \mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_2\right), \mathcal{F}_2 \right\rangle \left(A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_2\right)\right)\right) = \\ = \quad & \left(A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right)\right)\right) \cup \left(A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_2\right)\right)\right) = A.\end{aligned}$$

в) Нехай $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq B \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha)$. Тоді, використовуючи властивість 1(6) і (40), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_{\beta\alpha}A = \quad & \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1\rangle (A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1))) \cup \\ & \cup \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2), \mathcal{F}_2\rangle (A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2))) \subseteq \\ \subseteq \quad & \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1\rangle (B \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1))) \cup \\ & \cup \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2), \mathcal{F}_2\rangle (B \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2))) = \\ = \quad & \mathfrak{U}_{\beta\alpha}B.\end{aligned}$$

г) Нехай $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha)$. Покладемо:

$$\begin{aligned} A_i &:= A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i)), \quad i \in \{1,2\}; \\ \widetilde{A} &:= \mathfrak{U}_{\beta\alpha}A. \end{aligned} \tag{41}$$

Тоді, згідно з (38) та (40):

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cup A_2; \\ \widetilde{A} &= \widetilde{A}_1 \cup \widetilde{A}_2, \quad \text{де} \\ \widetilde{A}_1 &= \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1\rangle A_1; \\ \widetilde{A}_2 &= \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2), \mathcal{F}_2\rangle A_2. \end{aligned}$$

Оскільки, згідно з (41), $A_i \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i))$ $(i \in \{1,2\})$ і згідно з [10, означення 3.1], відображення уніфікації $\langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_i) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i), \mathcal{F}_i\rangle$ є відображеннями з $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i))}$ в $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_i))}$, то $\widetilde{A}_i \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_i))$ $(i \in \{1,2\})$, отже, враховуючи рівність (39), для множини $\widetilde{A} = \widetilde{A}_1 \cup \widetilde{A}_2$ маємо:

$$\widetilde{A} \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_i)) = \widetilde{A}_i \quad (i \in \{1,2\}).$$

Тому, використовуючи (40) і властивість 1(7), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_{\gamma\beta}\mathfrak{U}_{\beta\alpha}A = \mathfrak{U}_{\gamma\beta}\widetilde{A} = \langle \mathbf{lk}_\gamma(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1\rangle \widetilde{A}_1 \cup \\ \cup \langle \mathbf{lk}_\gamma(\mathcal{F}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_2), \mathcal{F}_2\rangle \widetilde{A}_2 =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \langle \mathbf{lk}_\gamma(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1 \rangle \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1 \rangle A_1 \cup \\
& \cup \langle \mathbf{lk}_\gamma(\mathcal{F}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_2), \mathcal{F}_2 \rangle \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2), \mathcal{F}_2 \rangle A_2 \subseteq \\
\subseteq \quad & \langle \mathbf{lk}_\gamma(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1 \rangle A_1 \cup \\
& \cup \langle \mathbf{lk}_\gamma(\mathcal{F}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2), \mathcal{F}_2 \rangle A_2 = \mathfrak{U}_{\gamma\alpha} A.
\end{aligned}$$

Отже, згідно з [10, означення 3.1], $(\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ є уніфікацією сприймання для $(\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$, а трійка

$$\mathcal{Z} = (\mathcal{A}, (\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}), (\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A}))$$

є мінливою множиною. При цьому, згідно з позначеннями, прийнятими в теорії мінливих множин (див. [10]):

$$\mathcal{I}nd(\mathcal{Z}) = \mathcal{A} = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2); \tag{42}$$

$$\mathcal{L}k(\mathcal{Z}) = \{(\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}. \tag{43}$$

Згідно з позначеннями, прийнятими в теорії мінливих множин, користуючись формулами (38), (39), (37), для довільної області сприймання $\mathfrak{l} = (\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) &= \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \sqcup \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)) = \\
&= \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}) \sqcup \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2});
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) &= \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}_\alpha) = \mathbb{T}\mathbf{m}\Big(\mathsf{BE}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2))\Big) = \\
&= \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)) = \\
&= \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}).
\end{aligned} \tag{45}$$

Звідси, враховуючи [10, властивість 2.1(4)], отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) &= \{\mathsf{bs}(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\} = \\
&= \{\mathsf{bs}(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}) \cup \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2})\} = \\
&= \{\mathsf{bs}(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1})\} \cup \{\mathsf{bs}(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2})\} = \\
&= \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}) \cup \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}).
\end{aligned} \tag{46}$$

Оскільки, за умовою, універсальні кінематики $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ — диз'юнктні, то, за означенням 12, $\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)\cap\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)=\mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right)\cap\mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)=\emptyset$. Отже, згідно з (46), маємо:

$$\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})=\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)\sqcup\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)\quad\left(\mathfrak{l}\in\mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)\right). \tag{47}$$

Крім того, згідно з (40), для довільних областей сприймання $\mathfrak{l}=(\alpha,\mathcal{B}_\alpha)\in\mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$, $\mathfrak{m}=(\beta,\mathcal{B}_\beta)\in\mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ і довільної множини $A\subseteq\mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\,\mathcal{Z}\rangle\,A=\mathfrak{U}_{\beta\alpha}A=&\\ =\;&\left\langle\mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_1\right)\leftarrow\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right),\,\mathcal{F}_1\right\rangle\left(A\cap\mathbb{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right)\right)\cup\\ &\cup\left\langle\mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_2\right)\leftarrow\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right),\,\mathcal{F}_2\right\rangle\left(A\cap\mathbb{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)\right)=\\ =\;&\left\langle\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1},\,\mathcal{F}_1\right\rangle\left(A\cap\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)\right)\cup\\ &\cup\left\langle\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_2}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2},\,\mathcal{F}_2\right\rangle\left(A\cap\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)\right).\end{aligned} \tag{48}$$

Нехай $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$, $A\subseteq\mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$, $A\neq\emptyset$. Тоді, згідно з (44), хоч одна з множин $A\cap\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)$ або $A\cap\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)$ — непорожня. Оскільки $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ — універсальні кінематики, то, за означенням 5, вони є чітко видимими. Отже, згідно з [12, означення 1], хоч одна з множин $\left\langle\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_i}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_i},\,\mathcal{F}_i\right\rangle\left(A\cap\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_i}\right)\right)$ $(i\in\{1,2\})$ — непорожня. Тобто, згідно з (48):

$$\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\,\mathcal{Z}\rangle\,A\neq\emptyset\quad\text{при}\quad A\neq\emptyset.$$

Це, згідно з [12, означення 1], означає: $\mathcal{Z}$ є чітко видимою мінливою множиною. Використовуючи рівності (44), (48), а також [8, equality (31)] або [9, рівність (9)] для довільних $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ і $\omega\in\mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\,\mathcal{Z}\rangle\,\{\omega\}&=\begin{cases}\left\langle\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1},\,\mathcal{F}_1\right\rangle\{\omega\}, & \omega\in\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)\\ \left\langle\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_2}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2},\,\mathcal{F}_2\right\rangle\{\omega\}, & \omega\in\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)\end{cases}=\\ &=\begin{cases}\left\{\left\langle!\,\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1},\,\mathcal{F}_1\right\rangle\omega\right\}, & \omega\in\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)\\ \left\{\left\langle!\,\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_2}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2},\,\mathcal{F}_2\right\rangle\omega\right\}, & \omega\in\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right).\end{cases}\end{aligned}$$

Звідси, враховуючи рівність [8, equality (31)] або [9, рівність (9)], для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ і $\omega \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$ отримуємо:

$$\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathcal{Z}\rangle\,\omega = \begin{cases} \langle !\,\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1},\, \mathcal{F}_1\rangle\,\omega, & \omega \in \mathbb{Bs}\,(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}) \\ \langle !\,\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_2} \leftarrow \mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2},\, \mathcal{F}_2\rangle\,\omega, & \omega \in \mathbb{Bs}\,(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2})\,. \end{cases} \qquad (49)$$

Нехай $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$. Для $x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$ покладемо:

$$k_{\mathfrak{l}}(x) := \begin{cases} \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}}\,(x; \mathcal{F}_1)\,, & x \in \mathfrak{Bs}\,(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}) \\ \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}}\,(x; \mathcal{F}_2)\,, & x \in \mathfrak{Bs}\,(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2})\,. \end{cases} \qquad (50)$$

Оскільки об'єднання в рівності (47) — диз'юнктне, то позначення (50) — коректне.

Оскільки $\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}_2$, то, за означенням 6, для довільної області сприймання $\mathfrak{l} = (\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ маємо:

$$\begin{aligned} &\mathsf{BG}\,(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}; \mathcal{F}_1) = \mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)\,; \mathcal{F}_1) = \\ &\qquad = \mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2)\,; \mathcal{F}_2) = \mathsf{BG}\,(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}; \mathcal{F}_2)\,; \\ &\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}; \mathcal{F}_1) = \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}; \mathcal{F}_2)\,. \end{aligned} \qquad (51)$$

Покладемо:

$$\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}} := \mathsf{BG}\,(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}; \mathcal{F}_1) = \mathsf{BG}\,(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}; \mathcal{F}_2)\,, \quad \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\,. \qquad (52)$$

Тоді:

$$\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}) = \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}; \mathcal{F}_1) = \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}; \mathcal{F}_2)\,, \quad \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\,.$$

Отже, $k_{\mathfrak{l}}$ є відображенням з $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$ в $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}})$ (для будь-якої області сприймання $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$). Тому, за означенням 3 (пункт 2), пара:

$$\mathfrak{C} = (\mathcal{Z}, ((\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})))$$

є кінематичною мінливою множиною. При цьому, враховуючи позначення, прийняті в підрозділі 2.2.2 і рівності (42), (43), (44), (47), (45), отримуємо:

$$\mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}) = \mathcal{A} = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)\,; \qquad (53)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right) &= \left\{(\alpha,\mathcal{B}_\alpha)\mid \alpha\in\mathcal{A}\right\};\\
\mathbb{BE}(\mathfrak{C}) &= \mathcal{Z}; && (54)\\
\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) &= \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)\sqcup\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)\quad \left(\mathfrak{l}\in\mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)\right); && (55)\\
\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}) &= \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)\sqcup\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)\quad \left(\mathfrak{l}\in\mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)\right);\\
\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) &= \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)=\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)\quad \left(\mathfrak{l}\in\mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)\right). && (56)
\end{aligned}$$

Оскільки (за доведеним вище) мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою, то, згідно з означенням чітко видимої кінематичної множини (див. пункт **г)** підрозділу 2.2.2), кінематична множина $\mathfrak{C}$ є чітко видимою. При цьому, враховуючи позначення, прийняті в підрозділі 2.2.2 і рівність (49), для довільних $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ і $\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ отримуємо:

$$\left\langle !\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\ \mathfrak{C}\right\rangle\omega=\begin{cases}\left\langle !\,\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1},\ \mathcal{F}_1\right\rangle\omega, & \omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)\\ \left\langle !\,\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_2}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2},\ \mathcal{F}_2\right\rangle\omega, & \omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right).\end{cases} \qquad (57)$$

Далі, використовуючи рівності (50), (51), (52) (56), враховуючи позначення, прийняті в підрозділі 2.2.2, та позначення (3), для довільної системи відліку $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathsf{BG}(\mathfrak{l};\mathfrak{C}) &= \mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}=\mathsf{BG}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1};\mathcal{F}_1\right)=\mathsf{BG}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2};\mathcal{F}_2\right); && (58)\\
\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\mathfrak{C}) &= \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}\right)=\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1};\mathcal{F}_1\right)=\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2};\mathcal{F}_2\right); && (59)\\
\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C}) &= \mathbf{Tm}(\mathfrak{l})\times\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\mathfrak{C})=\mathbf{Tm}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)\times\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1};\mathcal{F}_1\right)=\\
&= \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)\times\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2};\mathcal{F}_2\right)=\\
&= \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1};\mathcal{F}_1\right)=\mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2};\mathcal{F}_2\right); && (60)\\
\mathsf{q}_{\mathfrak{l}}\left(x;\mathfrak{C}\right) &= k_{\mathfrak{l}}(x)=\begin{cases}\mathsf{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}}\left(x;\mathcal{F}_1\right), & x\in\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)\\ \mathsf{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}}\left(x,\mathcal{F}_2\right), & x\in\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)\end{cases},\ x\in\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega;\ \mathfrak{C}\right) &= \left(\mathsf{tm}\left(\omega\right),\mathsf{q}_{\mathfrak{l}}\left(\mathsf{bs}\left(\omega\right);\mathfrak{C}\right)\right)=\\
&= \begin{cases}\left(\mathsf{tm}\left(\omega\right),\mathsf{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}}\left(\mathsf{bs}\left(\omega\right);\mathcal{F}_1\right)\right), & \mathsf{bs}\left(\omega\right)\in\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)\\ \left(\mathsf{tm}\left(\omega\right),\mathsf{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}}\left(\mathsf{bs}\left(\omega\right);\mathcal{F}_2\right)\right), & \mathsf{bs}\left(\omega\right)\in\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right).\end{cases} && (61)
\end{aligned}$$

У випадку $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)$, згідно з [10, властивість 2.1(4)], маємо $\mathsf{bs}\left(\omega\right) \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)$. Отже, в цьому випадку, згідно з (61), маємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega;\, \mathfrak{C}\right) &= \Big(\mathsf{tm}\left(\omega\right), \mathsf{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}}\left(\mathsf{bs}\left(\omega\right); \mathcal{F}_1\right)\Big) = \\ &= \mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}\left(\omega; \mathcal{F}_1\right).\end{aligned}$$

Аналогічно, у випадку $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)$ отримуємо, $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega;\, \mathfrak{C}\right) = \mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right\rangle}\left(\omega; \mathcal{F}_2\right)$. Отже, враховуючи (55), для довільних $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ маємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega;\, \mathfrak{C}\right) = \begin{cases}\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}\left(\omega; \mathcal{F}_1\right), & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \\ \mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right\rangle}\left(\omega; \mathcal{F}_2\right), & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right).\end{cases} \tag{62}$$

Використовуючи формули (62), (57) і означення 4 (пункт 1) для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ отримуємо:

$$\begin{aligned}&\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega, \mathfrak{C}\right) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}\left(\langle!\, \mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}, \mathfrak{C}\rangle\, \omega;\, \mathfrak{C}\right) = \\ &\quad= \begin{cases}\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}\left(\langle!\, \mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1\rangle\, \omega;\, \mathfrak{C}\right), & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \\ \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}\left(\langle!\, \mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_2}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}, \mathcal{F}_2\rangle\, \omega;\, \mathfrak{C}\right), & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)\end{cases} = \\ &\quad= \begin{cases}\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}\left(\langle!\, \mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1\rangle\, \omega;\, \mathcal{F}_1\right), & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \\ \mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right\rangle}\left(\langle!\, \mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_2}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}, \mathcal{F}_2\rangle\, \omega;\, \mathcal{F}_2\right), & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)\end{cases} = \\ &\quad= \begin{cases}\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}\left(\omega;\, \mathcal{F}_1\right), & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \\ \mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}\left(\omega;\, \mathcal{F}_2\right), & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right).\end{cases}\end{aligned}$$

Звідси, використовуючи формулу (5), маємо:

$$\begin{aligned}&\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega, \mathfrak{C}\right) = \\ &\quad= \begin{cases}\left[\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1\right]\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}\left(\omega; \mathcal{F}_1\right), & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \\ \left[\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_2}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}, \mathcal{F}_2\right]\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right\rangle}\left(\omega; \mathcal{F}_2\right), & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right).\end{cases}\end{aligned} \tag{63}$$

Покладемо:

$$\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} := \left[\mathfrak{m}\restriction_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1\right], \quad \mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right).$$

Оскільки $\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}_2$, то для довільних $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$, за означенням 6, маємо:

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} &= [\mathfrak{m}\,\rfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\,\rfloor_{\mathcal{F}_1},\,\mathcal{F}_1] = \\ &= \left[\mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{m})}\,(\mathcal{F}_1)\leftarrow\mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}\,(\mathcal{F}_1)\,,\,\mathcal{F}_1\right] = \\ &= \left[\mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{m})}\,(\mathcal{F}_2)\leftarrow\mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}\,(\mathcal{F}_2)\,,\,\mathcal{F}_2\right] = \\ &= [\mathfrak{m}\,\rfloor_{\mathcal{F}_2}\leftarrow\mathfrak{l}\,\rfloor_{\mathcal{F}_2},\,\mathcal{F}_2]\,. \end{aligned}\tag{64}$$

Тому, з формул (63), (62) для довільних $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ отримуємо рівність:

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}\,(\omega,\mathfrak{C})=\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\,(\omega;\,\mathfrak{C})\right),$$

де, згідно (64), (60), $\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}$ є відображенням виду $\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}:\mathbb{M}k(\mathfrak{l})\mapsto\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$. Отже, за означенням 4 (пункт 4), сім'я відображень $\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\,|\,\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})\right)$ є універсальним перетворенням координат для кінематичної множини $\mathfrak{C}$. Тобто пара:

$$\mathcal{F}=\left(\mathfrak{C},\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\,|\,\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})\right)\right)\tag{65}$$

є універсальною кінематикою. При цьому універсальне перетворення координат для кінематики $\mathcal{F}$ задається формулою:

$$\begin{aligned}[\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\,\mathcal{F}] &= [\mathfrak{m}\,\rfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\,\rfloor_{\mathcal{F}_1},\,\mathcal{F}_1] = \\ &= [\mathfrak{m}\,\rfloor_{\mathcal{F}_2}\leftarrow\mathfrak{l}\,\rfloor_{\mathcal{F}_2},\,\mathcal{F}_2]\,,\quad \mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\,(\mathcal{F})=\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})\,.\end{aligned}\tag{66}$$

Рівності (53)–(62) для $\mathcal{F}$ також залишаються справедливими (з заміною символу $\mathfrak{C}$ на $\mathcal{F}$).

Доведемо, що універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є диз'юнктним еволюційним об'єднанням кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$.

1. Доведемо, що $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\mathcal{F}_1$.

1.a) Враховуючи рівність (53), отримуємо:

$$\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F})=\mathcal{A}=\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1)\,.$$

1.б) Нехай $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1)$. Тоді, використовуючи (56), (58) та означення 13, отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})) &= \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})\,\restriction_{\mathcal{F}_1}) = \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1))\\ \mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})\,;\,\mathcal{F}) &= \mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})\,\restriction_{\mathcal{F}_1};\mathcal{F}_1) = \mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)\,;\,\mathcal{F}_1)\,.\end{aligned}$$

1.в) Для довільних $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1)$, згідно з (66), маємо:

$$\begin{aligned}[\mathbf{lk}_\beta\,(\mathcal{F}) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})\,,\,\mathcal{F}] &= [\mathbf{lk}_\beta\,(\mathcal{F})\,\restriction_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})\,\restriction_{\mathcal{F}_1},\,\mathcal{F}_1] =\\ &= [\mathbf{lk}_\beta\,(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)\,,\,\mathcal{F}_1]\,.\end{aligned}$$

З підпунктів **1.а**)–**1.в**), за означенням 6 випливає, що $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\mathcal{F}_1$, тобто що $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}_2$.

2. Нехай $\mathfrak{l} = (\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F}) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$, (де $\alpha \in \mathcal{A} = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F})$). Тоді, згідно (37):

$$\begin{aligned}\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) = \mathcal{B}_\alpha &= \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2)) =\\ &= \mathsf{BE}\,(\mathfrak{l}\,\restriction_{\mathcal{F}_1}) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\,(\mathfrak{l}\,\restriction_{\mathcal{F}_2}) \quad (\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F}))\,.\end{aligned}$$

3. Нехай $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$. Тоді, згідно з (57) та (62), отримуємо:

$$\begin{aligned}\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\,\mathcal{F}\rangle\,\omega &= \begin{cases}\langle !\,\mathfrak{m}\,\restriction_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l}\,\restriction_{\mathcal{F}_1},\,\mathcal{F}_1\rangle\,\omega, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\restriction_{\mathcal{F}_1})\\ \langle !\,\mathfrak{m}\,\restriction_{\mathcal{F}_2} \leftarrow \mathfrak{l}\,\restriction_{\mathcal{F}_2},\,\mathcal{F}_2\rangle\,\omega, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\restriction_{\mathcal{F}_2})\,.\end{cases}\\ \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\,(\omega;\,\mathcal{F}) &= \begin{cases}\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}\,(\omega;\mathcal{F}_1)\,, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\restriction_{\mathcal{F}_1})\\ \mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right\rangle}\,(\omega;\mathcal{F}_2)\,, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\restriction_{\mathcal{F}_2})\,.\end{cases}\end{aligned}$$

З тверджень, доведених вище в пунктах 1,2,3, за означенням 14 випливає, що універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є диз'юнктним еволюційним об'єднанням універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$, тобто $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}_2$. $\square$

8.2. Диз'юнктне еволюційне об'єднання еволюційно видимих універсальних кінематик

Означення 15 ([9, 14, 15]). *1. Нехай $\mathcal{B}$ базова мінлива множина. Будемо говорити, що елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$* ***об'єднані долею в базовій мінливій множині*** *$\mathcal{B}$, якщо виконується хоч одна з умов $\omega_2 \leftarrow \omega_1$ або $\omega_1 \leftarrow \omega_2$.*

2. Нехай $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Y})$, де $\mathcal{Y}$ — довільна мінлива множина або довільна кінематична множина, або довільна універсальна кінематика. Будемо говорити, що елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ об'єднані долею ***в системі відліку*** *$\mathfrak{l}$, якщо вони об'єднані долею в базовій мінливій множині $\mathfrak{l}^\wedge = \mathsf{BE}(\mathfrak{l})$, тобто якщо виконується хоч одна з умов $\omega_2 \leftarrow \omega_1$ або $\omega_1 \leftarrow \omega_2$.*

Означення 16. *1. Мінливу множину $\mathcal{Z}$ будемо називати* ***еволюційно видимою****, якщо:*

(a) $\mathcal{Z}$ є чітко видимою;

(b) для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ і для довільних об'єднаних долею в $\mathfrak{l}$ елементарно-часових станів $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ таких, що $\mathsf{tm}(\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega_1) \neq \mathsf{tm}(\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega_2)$ елементарно-часові стани $\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega_1$ та $\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega_2$ є об'єднані долею в $\mathfrak{m}$.

2. Кінематичну множину $\mathfrak{C}$ (універсальну кінематику $\mathcal{F}$) будемо називати ***еволюційно видимою****, якщо еволюційно видимою є мінлива множина $\mathbb{BE}(\mathfrak{C})$ ($\mathbb{BE}(\mathcal{F})$) відповідно.*

Безпосередньо з означення 16, враховуючи систему позначень теорії кінематичних множин (див. підрозділ 2.2.2), випливає наступне твердження.

Твердження 22. *Кінематична множина $\mathfrak{C}$ є еволюційно видимою тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (a), (b) першого пункту означення 16 (із заміною символу $\mathcal{Z}$ на символ $\mathfrak{C}$).*

Нехай $\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right)$ — універсальна кінематика. Тоді, за означенням 5, кінематична множина $\mathfrak{C}$, а отже і мінлива множина $\mathbb{BE}(\mathcal{F}) = \mathbb{BE}(\mathfrak{C})$ є чітко видимою. Тому справедливе наступне твердження:

Твердження 23. *Універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є еволюційно видимою тоді і тільки тоді, коли виконується умова (b) першого пункту означення 16 (із заміною символу $\mathcal{Z}$ на символ $\mathcal{F}$).*

Таким чином, з фізичної точки зору еволюційну видимість можна інтерпретувати, як інваріантність еволюційних (трансформаційних) зв'язків у різних системах відліку.

Твердження 24. *Нехай $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — еволюційний мультипроектор в сенсі [14, 15] для базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Тоді мінлива множина $\mathcal{Z}\mathsf{im}[\mathfrak{P}, \mathcal{B}]$ є еволюційно видимою.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$, де — еволюційний мультипроектор для $\mathcal{B}$. Покладемо

$$\mathcal{Z} := \mathcal{Z}\mathsf{im}[\mathfrak{P}, \mathcal{B}].$$

(a) Згідно з теоремою про мультиобраз ([14, теорема 2] або [15, theorem 3]), мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою.

(b) Згідно з [14, властивість 6(1)] або [15, property 6(1)], $\mathcal{L}k(\mathcal{Z}) = ((\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \mid \alpha \in \mathcal{A})$. Розглянемо довільні дві області сприймання $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$, $\mathfrak{m} = (\beta, U_\beta[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\beta]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$, де $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. Нехай елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ об'єднані долею в $\mathfrak{l}$ і $\mathsf{tm}(\langle!\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\,\omega_1) \neq \mathsf{tm}(\langle!\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\,\omega_2)$. Відповідно до [14, властивість 6(4)] або [15, property 6(4)] існують об'єднані долею в $\mathcal{B}$ елементарно-часові стани $\omega'_1, \omega'_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що $\omega_1 = U_\alpha(\omega'_1)$, $\omega_2 = U_\alpha(\omega'_2)$. За означеннями [14, означення 9] (пункт 2) або [15, Definition 8] (item 2), відображення U_α є бієкцією. Тому $\omega'_1 = U_\alpha^{[-1]}(\omega_1)$, $\omega'_2 = U_\alpha^{[-1]}(\omega_2)$, де $U_\alpha^{[-1]}$ — відображення, обернене до U_α. Звідси, використовуючи наслідок

[14, наслідок 1] або [15, corollary 1], отримуємо:

$$\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega_1 = U_\beta \left(U_\alpha^{[-1]} (\omega_1) \right) = U_\beta \left(\omega_1' \right);$$
$$\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega_2 = U_\beta \left(U_\alpha^{[-1]} (\omega_2) \right) = U_\beta \left(\omega_2' \right).$$

Тому, оскільки $\mathsf{tm}\left(\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega_1\right) \neq \mathsf{tm}\left(\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega_2\right)$, то, згідно з [14, властивість 6(4)] або [15, property 6(4)], елементарно-часові стани $\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega_1$ і $\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega_2$ об'єднані долею в $\mathfrak{m}$.

З пунктів (a), (b), за означенням 16, випливає, що мінлива множина $\mathcal{Z}$ є еволюційно видимою. □

Оскільки, згідно з другим пунктом означення 16, кінематична множина $\mathfrak{C}$ (універсальна кінематика $\mathcal{F}$) є еволюційно видимою тоді і тільки тоді, коли еволюційно видимою є мінлива множина $\mathbb{BE}(\mathfrak{C})$ ($\mathbb{BE}(\mathcal{F})$), використовуючи теореми про мультиобраз [14, теореми 3 і 4], отримуємо наступні наслідки з твердження 24:

Наслідок 3. *Нехай $\mathfrak{P}$ — кінематичний мультипроектор для базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Тоді кінематична множина $\mathfrak{Kim}\,[\mathfrak{P}, \mathcal{B}]$ є еволюційно видимою.*

Наслідок 4. *Нехай $\mathfrak{P}$ — універсальний кінематичний мультипроектор для базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$. Тоді універсальна кінематика $\mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P}, \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right]$ є еволюційно видимою.*

З наслідків 3 та 4 випливає, що всі кінематичні множини і універсальні кінематики, пов'язані із спеціальною теорією відносності та її тахіонними розширеннями в сенсі E. Recami [21], розглянуті в роботах [13, 14, 15], є еволюційно видимими.

Наступна теорема показує, що еволюційна видимість універсальних кінематик є інваріантною відносно операції диз'юнктного еволюційного об'єднання, тобто диз'юнктне еволюційне об'єднання еволюційно видимих універсальних кінематик є еволюційно видимим.

Теорема 2. *Якщо диз'юнктні універсальні кінематики* $\mathcal{F}_1$ *і* $\mathcal{F}_2$ *є еволюційно видимими, то універсальна кінематика* $\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}_2$ *також є еволюційно видимою.*

Доведення. Нехай $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ — диз'юнктні еволюційно видимі універсальні кінематики. Покладемо:

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}_2.$$

Розглянемо довільні системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$. За означенням 14,

$$\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) = \mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\upharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\upharpoonright_{\mathcal{F}_2}\right).$$

Отже, згідно з [20, наслідок 2],

$$\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}} = \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathsf{BE}(\mathfrak{l})}{\longleftarrow}} = \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\upharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right)}{\longleftarrow}} \cup \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\upharpoonright_{\mathcal{F}_2}\right)}{\longleftarrow}} = \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}\upharpoonright_{\mathcal{F}_1}}{\longleftarrow}} \cup \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}\upharpoonright_{\mathcal{F}_2}}{\longleftarrow}}. \tag{67}$$

Припустимо, що елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ — об'єднані долею в $\mathfrak{l}$ і

$$\mathsf{tm}\left(\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\, \omega_1\right) \neq \mathsf{tm}\left(\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\, \omega_2\right) \tag{68}$$

Оскільки ω_1, ω_2 — об'єднані долею в $\mathfrak{l}$, то повинна виконуватись хоч одна з умов:

$$\omega_2 \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} \omega_1 \quad \text{або} \quad \omega_1 \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} \omega_2. \tag{69}$$

На мові теорії множин сукупність умов (69) переписується у вигляді:

$$\left\{(\omega_2, \omega_1), (\omega_1, \omega_2)\right\} \cap \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}} \neq \emptyset.$$

Звідси, в силу (67), випливає, що мусить виконуватись хоч одна з умов:

$$\left\{(\omega_2, \omega_1), (\omega_1, \omega_2)\right\} \cap \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}\upharpoonright_{\mathcal{F}_1}}{\longleftarrow}} \neq \emptyset \tag{70}$$

$$\{(\omega_2,\omega_1),(\omega_1,\omega_2)\}\cap \underset{\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_2}}{\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\longleftarrow}} \neq \emptyset. \tag{71}$$

У випадку (70) маємо, $\omega_1,\omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1})$ і ω_1,ω_2, об'єднані долею в системі відліку $\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1}\in \mathcal{L}k(\mathcal{F}_1)$. Оскільки $\omega_1,\omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1})$, то, за третім пунктом означення 14, маємо:

$$\langle !\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}\rangle\,\omega_i = \langle !\,\mathfrak{m}\rfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_i, \quad i\in\{1,2\}. \tag{72}$$

Отже, згідно з (68):

$$\mathsf{tm}\left(\langle !\,\mathfrak{m}\rfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_1\right) \neq \mathsf{tm}\left(\langle !\,\mathfrak{m}\rfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_2\right).$$

Тому, оскільки ω_1,ω_2 об'єднані долею в системі відліку $\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1}\in \mathcal{L}k(\mathcal{F}_1)$ і універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ є еволюційно видимою, то, за означенням 16, елементарно-часові стани $\langle !\,\mathfrak{m}\rfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_1$ і $\langle !\,\mathfrak{m}\rfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_2$ об'єднані долею в системі відліку $\mathfrak{m}\rfloor_{\mathcal{F}_1}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F}_1)$. Отже:

$$\begin{gathered}\{(\langle !\,\mathfrak{m}\rfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_1,\langle !\,\mathfrak{m}\rfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_2),\\ (\langle !\,\mathfrak{m}\rfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_2,\langle !\,\mathfrak{m}\rfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_1)\}\cap \underset{\mathfrak{m}\rfloor_{\mathcal{F}_1}}{\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\longleftarrow}} \neq\emptyset.\end{gathered}$$

Звідси, застосовуючи рівність (67) до системи відліку $\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})$ і використовуючи рівність (72), отримуємо:

$$\begin{gathered}\{(\langle !\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}\rangle\,\omega_1,\langle !\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}\rangle\,\omega_2),\\ (\langle !\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}\rangle\,\omega_2,\langle !\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}\rangle\,\omega_1)\}\cap \underset{\mathfrak{m}}{\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\leftarrow}}\neq\emptyset.\end{gathered} \tag{73}$$

Аналогічно доводиться, що співвідношення (73) виконується і у випадку (71).

Отже, в обох випадках елементарно-часові стани $\langle !\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}\rangle\,\omega_1$ і $\langle !\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}\rangle\,\omega_2$ об'єднані долею в системі відліку $\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})$. Враховуючи, що системи відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})$ і об'єднані долею в $\mathfrak{l}$ елементарно-часові стани ω_1,ω_2 вибрано довільним чином, за означенням 16 отримуємо, що універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є еволюційно видимою. □

Література

[1] *Проблемы Гильберта.* Сборник под ред. П.С. Александрова. – Москва: Наука, 1969. – 240 с.

[2] *Гладун А. Д.* Шестая проблема Гильберта // Потенциал. – 2006. – № 3. (http://potential.org.ru/Home/ProblemGilbert).

[3] *Petunin Yu. I., Klyushin D. A.* A structural approach to solving the 6th Hilbert problem // Theory of Probability and Mathematical Statistics. – 2005. – **71**. – P. 165–179.

[4] *Adonai S. Sant'Anna.* The definability of physical concepts // Bol. Soc. Parana. Mat. (3ser.). – 2005. – **23**, No 1-2. – P. 63–175.

[5] *Newton C. A. da Costa, Adonai S. Sant'Anna.* The mathematical role of time and space-time in classical physics // Foundations of Physics Letters. – 2001. – **14**, No 6. – P. 553–563.

[6] *Грушка Я. І.* Примітивні мінливі множини та їх властивості // Математичний Вісник НТШ. – 2012. – **9**. – С. 52–80.

[7] *Грушка Я. І.* Мінливі множини та їх властивості // Доповіді НАН України. – 2012. – № 5. – С. 12–18.

[8] *Grushka Ya.I.* Abstract concept of changeable set // Preprint arXiv:1207.3751v1. – 2012.

[9] *Грушка Я. І.* Видимість у мінливих множинах // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 122–145.

[10] *Грушка Я. І.* Мінливі множини та їх застосування для побудови кінематики тахіонів // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**,№ 1. – С. 192–227.

[11] *Грушка Я. І.* Базові мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем // Укр. мат. журн. – 2013 – **65**, № 9. – С. 1190–1210.

[12] *Грушка Я. І.* Критерій існування універсального перетворення координат у кінематичних мінливих множинах // Буковинський мат. журн. – 2014. –**2**, № 2-3. – С.59–71.

[13] *Грушка Я. І.* Перетворення координат у кінематичних мінливих множинах // Доповіді НАН України. – 2015. – № 3. – С. 24–31.

[14] *Грушка Я. І.* Кінематичні мінливі множини із заданим універсальним перетворенням координат // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 1.

[15] *Grushka Ya. I.* Abstract Coordinate Transforms in Kinematic Changeable Sets and their Properties. – Preprint arXiv:1504.02685v2. – 2015.

[16] *Baccetti V., Tate K., Visser M.* Inertial frames without the relativity principle // J. High Energy Physics. – 2012. – **2012**, No 5.

[17] Lorentz violating kinematics: Threshold theorems // J. High Energy Physics. – 2012. – **2012**, No 3.

[18] *Baccetti V., Tate K., Visser M.* Inertial frames without the relativity principle: breaking Lorentz symmetry. – Preprint: arXiv:1302.5989. – 2013.

[19] *Паули В.* Теория относительности. – Москва: Наука, 1991. – 325 с.

[20] *Грушка Я. І.* Еволюційні розширення та аналоги операції об'єднання для базових мінливих множин // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С. 66–99.

[21] *Recami E.* Classical Tachyons and Possible Applications // Riv. Nuovo Cim. – 1986. – **9**, S 3, No 6. – P. 1–178.

[22] *Coleman S. R., Glashow S. L.* Cosmic ray and neutrino tests of special relativity // Physics Letters B. – 1997. – **405**. – P. 249–252. (arXiv: hep-ph/9703240).

[23] *Coleman S. R., Glashow S. L.* High-energy tests of Lorentz invariance // Physical Review D. – 1999. – **59**. – P. 249–252. (arXiv: hep-ph/9703240).

[24] *Drago A., Masina I., Pagliara G., Tripiccione R.* The Hypothesis of Superluminal Neutrinos: comparing OPERA with other Data // Europhysics Letters. – 2012. – **97**, No 2. (arXiv:1109.5917 [hep-ph]).

[25] *Gertov H.* Lorentz Violations. – Preprint. – University of Southern Denmark. – August, 2012.

[26] *Ter-Kazarian G.* Extended Lorentz code of a superluminal particle. – Preprint arXiv:1202.0469 [physics.gen-ph]. – 2012.

[27] *Биркгоф Г.* Теория Решёток. – Москва: Наука, 1984. – 567 с.