Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, т. 12, № 2, 113–125

УДК 517.9

В. М. Горбачук

(Національний технічний університет України "КПІ", Київ)

Про розв'язки диференціальних рівнянь у банаховому просторі на всій числовій осі

v.m.horbach@gmail.com

We consider an equation of the form $\left(\frac{d}{dt}-A\right)^n\left(\frac{d}{dt}+A\right)^m y(t) = 0,\ t \in= (-\infty,\infty),\ \ n,m \in \mathbb{N}_0 = \{0\}\cup\mathbb{N},\ n+m \geq 1$, where A is the generator of a bounded analytic C_0-semigroup of linear operators in a Banach space, and describe all its solutions on $(-\infty,\infty)$. It is shown that each such solution is an entire vector-valued function, the set of all the solutions forms an infinite-dimensional space, and for its elements the Phragmen-Lindelöf principle holds true.

Розглядається рівняння вигляду $\left(\frac{d}{dt}-A\right)^n\left(\frac{d}{dt}+A\right)^m y(t) = 0,\ t \in= (-\infty,\infty),\ \ n,m \in \mathbb{N}_0 = \{0\}\cup\mathbb{N},\ n+m \geq 1$, де A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи лінійних операторів у банаховому просторі. Описуються усі його розв'язки на $(-\infty,\infty)$. Доводиться, що кожен такий розв'язок є цілою вектор-функцією, множина усіх розв'язків є нескінченновимірною, а для її елементів виконується принцип Фрагмена-Ліндельофа.

Основна мета роботи – дослідження розв'язків $y(t)$ рівняння

$$\left(\frac{d}{dt}-A\right)^n\left(\frac{d}{dt}+A\right)^m y(t) = 0, \qquad (1)$$
$$t \in \mathbb{R} = (-\infty,\infty), \quad n,m \in \mathbb{N}_0 = \{0\}\cup\mathbb{N},$$

де A – інфінітезімальний генератор, або просто генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ з нормою $\|\cdot\|$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел, такий, що $A^{-1} \in L(\mathfrak{B})$, $L(\mathfrak{B})$ – множина всіх лінійних обмежених на $\mathfrak{B}$ операторів. Зазначимо, що випадки $n = 1, m = 0$ та $n = 0, m = 1$, а також $n = m \geq 1$ розглянуто в [1, 2]. Рівняння ж вигляду (1) на інтервалі $(0, \infty)$ досліджувалось багатьма математиками за різних умов на поведінку розв'язків в околі точки 0 (див., наприклад, [3 - 6]).

1. Нехай $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ – C_0-півгрупа операторів $U(t) \in L(\mathfrak{B})$ (стосовно теорії півгруп у банаховому просторі див. [7, 8]), тобто:

1) $U(0) = I$, I – одиничний оператор в $\mathfrak{B}$;
2) $\forall t, s > 0 : U(t + s) = U(t)U(s)$;
3) $\forall x \in \mathfrak{B} : \lim\limits_{t\to 0} \|U(t)x - x\| = 0$.

Генератор A півгрупи $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ визначається як

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathfrak{B} : \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)x - x) \text{ існує } \right\},$$

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)x - x),\ x \in \mathcal{D}(A).$$

Оператор A замкнений, і його область визначення $\mathcal{D}(A)$ є щільною в $\mathfrak{B}$ (множину всіх таких операторів позначатимемо через $E(\mathfrak{B})$). Більш того, $\mathcal{D}(A)$ є $U(t)$-інваріантною, тобто $U(t)x \in \mathcal{D}(A)$ при $x \in \mathcal{D}(A)$, $t \geq 0$, і $AU(t)x = U(t)Ax$.

Скрізь у подальшому під $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ розуміється півгрупа, що генерується оператором A

C_0-півгрупа $U(t) \in L(\mathfrak{B})$ називається аналітичною з кутом аналітичності $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, якщо оператор-функція $U(\cdot)$ визначена в секторі $S_\theta = \{z : |\arg z| < \theta\}$ має такі властивості:

1) $\forall z_1, z_2 \in S_\theta : U(z_1 + z_2) = U(z_1)U(z_2)$;
2) $\forall x \in \mathfrak{B} : U(z)x$ є аналітичною в S_θ;
3) $\forall x \in \mathfrak{B} : \|U(z)x - x\| \to 0$ при $z \to 0$ у будь-якому замкненому підсекторі сектора S_θ.

Якщо, крім того, сім'я $U(z)$ обмежена на кожному секторі S_ψ з $\psi < \theta$, то півгрупа $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ називається обмеженою аналітичною з кутом θ.

Нехай тепер A – довільний оператор з $E(\mathfrak{B})$. Позначимо через $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ простір цілих векторів оператора A:

$$\mathfrak{G}_{(1)}(A) = \operatorname{proj}\lim_{\alpha\to 0} \mathfrak{G}_1^\alpha(A) = \bigcap_{\alpha>0} \mathfrak{G}_1^\alpha(A),$$

де

$$\mathfrak{G}_1^\alpha(A) =$$
$$= \left\{ x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n) \middle| \exists c = c(x) > 0, \forall k \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} : \|A^k x\| \leq c\alpha^k k^k \right\}$$

– банахів простір відносно норми

$$\|x\|_{\mathfrak{G}_1^\alpha(A)} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\|A^k x\|}{\alpha^k k^k}.$$

Збіжність у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ означає збіжність у кожному $\mathfrak{G}_1^\alpha(A)$, $\alpha > 0$. Зауважимо, що $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ можна отримати, обмежившись лише $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, простір $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ є зчисленно-нормованим (див.[9]).

Твердження 1. (*Див.*[6]). *Нехай $A \in E(\mathfrak{B})$. Тоді для довільних $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ та $z \in \mathbb{C}$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k A^k x}{k!}$ збігається у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$, і оператор-функція*

$$\exp(zA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k A^k}{k!}$$

є цілою в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Більш того, сім'я $\{\exp(zA)\}_{z\in\mathbb{C}}$ утворює однопараметричну групу в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Якщо A – генератор обмеженої аналітичної півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$, то

$$\overline{\mathfrak{G}_{(1)}(A)} = \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{G}_{(1)}(A) = \bigcap_{t\geq 0} \mathcal{R}(e^{tA})$$

($\mathcal{R}(\cdot)$ – область значень оператора), і

$$\forall x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A) : \exp(tA)x = \begin{cases} e^{tA}x, & \text{при} \quad t \geq 0, \\ \left(e^{-tA}\right)^{-1} x, & \text{при} \quad t < 0, \end{cases}$$

З твердження 1 випливає, що для довільного $z \in \mathbb{C}$ має місце включення $\exp(zA)\mathfrak{G}_{(1)}(A) \subset \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і, якщо $A^{-1} \in L(\mathfrak{B})$, то $A\mathfrak{G}_{(1)}(A) = \mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Розглянемо рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} \pm Ay(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{2}$$

де A – генератор обмеженої аналітичної півгрупи в $\mathfrak{B}$. Під класичним розв'язком (або просто розв'язком) рівняння з (2) на $(-\infty, \infty)$ розумітимемо неперервно диференційовну вектор-функцію $y(t) : (-\infty, \infty) \mapsto \mathcal{D}(A)$, що задовольняє це рівняння. Має місце наступне твердження (див. [1]).

Твердження 2. *$\mathfrak{B}$-значна вектор-функція $y(t)$ є розв'язком рівняння з (2) тоді і тільки тоді, коли вона може бути відповідно зображена у вигляді*

$$y(t) = \exp(\mp tA)y_0, \quad y_0 \in \mathfrak{G}_{(1)}(A).$$

Якщо вектор-функція $f(z)$ є цілою у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$, то загальні розв'язки рівнянь

$$\frac{dy(t)}{dt} \pm Ay(t) = f(t), \quad t \in (-\infty, \infty),$$

мають, відповідно, вигляд

$$y(t) = \exp(\mp tA)y_0 + \int\limits_0^t \exp(\mp(t-s)A)f(s)\, ds, \tag{3}$$

де y_0 – довільний елемент з $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

2. Вектор-функція $y(t) : (-\infty, \infty) \mapsto \mathcal{D}(A^{n+m})$ називається розв'язком рівняння (1) на $(-\infty, \infty)$, якщо вона $n+m$ разів неперервно диференційовна на $(-\infty, \infty)$ і задовольняє там це рівняння. Позначимо через $\rho(\cdot)$ резольвентну множину оператора.

Теорема 1. *Нехай A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ і $0 \in \rho(A)$. Вектор-функція $y(t)$ є розв'язком рівняння* (1) *на $(-\infty, \infty)$ тоді і тільки тоді, коли вона може бути зображена у вигляді*

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k \exp(tA) f_k + \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA) g_k, \tag{4}$$

де $f_k, g_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Вектори f_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, і g_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, визначаються однозначно за $y(t)$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $n = 0$, тобто коли рівняння (1) має форму

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)^m y(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty). \tag{5}$$

При $m = 1$ теорема випливає з твердження 2.

Припустимо тепер, що розв'язок $y(t)$ рівняння (5) з $m = i-1$ зображується у вигляді

$$y(t) = \sum_{k=0}^{i-2} t^k \exp(-tA) \widetilde{g}_k, \quad \widetilde{g}_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),\ k = k = 0, 1, \ldots, i-2,$$

і доведемо, що таке зображення є вірним і при $m = i$. Отже, нехай $y(t)$ – розв'язок рівняння (5) з $m = i$. Оскільки

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)^i y(t) = \left(\frac{d}{dt} + A\right)^{i-1} \left(\frac{d}{dt} + A\right) y(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty),$$

то $\left(\frac{d}{dt} + A\right) y(t)$ є розв'язком рівняння (5) з $m = i-1$, а тому

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right) y(t) = \sum_{k=0}^{i-2} t^k \exp(-tA) \widetilde{g}_k, \quad \widetilde{g}_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A).$$

За формулою (3),

$$y(t) = \exp(-tA)g_0 + \int\limits_0^t \exp(-(t-s)A)\sum_{k=0}^{i-2} s^k \exp(-sA)\widetilde{g}_k\, ds =$$

$$= \exp(-tA)g_0 + \sum_{k=1}^{i-1} \exp(-tA)g_k, \quad g_k = \frac{\widetilde{g}_k}{k},\ k = 1, \ldots, i-1.$$

Таким чином, зображення (4) для розв'язків рівняння (5) доведене. Так само доводиться зображення (4) у вигляді другої суми для розв'язків рівняння

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^n y(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty),$$

тобто при $m = 0$.

Нехай тепер $n = 1, m \in \mathbb{N}$. Покладемо

$$z(t) = \left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t).$$

Тоді $z(t)$ є розв'язком рівняння

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)^m z(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty),$$

і, як було вже показано вище,

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA)\widetilde{g}_k, \quad \widetilde{g}_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A).$$

Оскільки

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA)\widetilde{g}_k,$$

то, згідно з (3),

$$\exists \widetilde{\widetilde{f}}_0 \in \mathfrak{G}_{(1)}(A) : y(t) = \exp(tA)\widetilde{\widetilde{f}}_0 + \int\limits_0^t \exp((t-s)A) \sum_{k=0}^{m-1} s^k \exp(-sA)\widetilde{g}_k \, ds. \tag{6}$$

Враховуючи рівність

$$\int\limits_0^t s^k \exp(-2sA)\widetilde{g}_k \, ds = \widetilde{\widetilde{f}}_0 + \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-2tA)\widetilde{\widetilde{g}}_k, \quad \widetilde{\widetilde{f}}_0, \, \widetilde{\widetilde{g}}_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),$$

і перегруповуючи члени в (6), дійдемо висновку, що

$$\exists f_0, g_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A) : y(t) = \exp(tA)f_0 + \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA)g_k.$$

Припустимо зараз, що зображення (4) вірне для $n = s - 1, \ m$, і доведемо, що воно має місце і у випадку $n, \ m$. Покладаючи

$$z(t) = \left(\frac{d}{dt} - A\right)^{i-1} \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m y(t),$$

одержимо

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right) z(t) = 0.$$

Міркуючи так само, як і в попередніх випадках, на основі формули (3) прийдемо до зображення (4).

Доведемо єдиність представлення (4), тобто, що тотожність $y(t) \equiv 0$ зумовлює рівності $f_k = g_k = 0, \ k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Покладемо

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k \exp(tA)f_k, y_2(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA)g_k. \tag{7}$$

Беручи до уваги, що для $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)^m \left(\frac{d}{dt} - A\right)^k y(t) = \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m \left(\frac{d}{dt} - A\right)^k y_1(t),$$

а для $k = 0, 1, \dots, m-1$

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^n \left(\frac{d}{dt} + A\right)^k y(t) = \left(\frac{d}{dt} - A\right)^n \left(\frac{d}{dt} + A\right)^k y_2(t),$$

а також співвідношення

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^k (t^i \exp(tA))f = \\ = \begin{cases} i(i-1)\dots(i-k+1)t^{i-k}\exp(tA)f & \text{при} \quad k \le i \\ 0 & \text{при} \quad k > i \end{cases}$$

та

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)^k (t^i \exp(-tA))g = \\ = \begin{cases} i(i-1)\dots(i-k+1)t^{i-k}\exp(-tA)g & \text{при} \quad k \le i \\ 0 & \text{при} \quad k > i, \end{cases}$$

одержимо

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m \left(\frac{d}{dt} - A\right)^{n-1} y(t) &= \\ = \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m (n-1)! \exp(tA) f_{n-1} &= \\ = 2^m (n-1)! A^m \exp(tA) f_{n-1} & \end{aligned} \tag{8}$$

і

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} - A\right)^n \left(\frac{d}{dt} + A\right)^{m-1} y(t) &= \\ = \left(\frac{d}{dt} - A\right)^n (m-1)! \exp(-tA) g_{m-1} &= \\ = (-1)^n 2^n (m-1)! A^n \exp(-tA) g_{m-1}. & \end{aligned} \tag{9}$$

Припустимо тепер, що $y(t) \equiv 0$. Тоді з теореми 1 і рівностей (8), (9) при $t = 0$ випливає, що

$$f_{n-1} = g_{m-1} = 0,$$

тобто $y(t)$ має вигляд

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-2} t^k \exp(tA) f_k + \sum_{k=0}^{m-2} t^k \exp(-tA) g_k.$$

Повторюючи цю процедуру $\max\{n, m\}$ разів, дійдемо висновку, що усі $f_k,\ k = 0, 1, \ldots, n-1$, та $g_k,\ k = 0, 1, \ldots, m-1)$ у зображенні (4) дорівнюють нулеві, що й завершує доведення теореми.

Наслідок 1. *Будь-який розв'язок рівняння* (1) *на* $(-\infty, \infty)$ *допускає продовження до цілої вектор-функції зі значеннями в* $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Позначимо через $\sigma(A)$ спектр оператора A і покладемо

$$s = s(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \mathrm{Re}\lambda.$$

Як відомо, $s(A)$ є не що інше, як тип півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t \geq 0}$. Оскільки, за припущенням, ця півгрупа є обмеженою аналітичною і $0 \in \rho(A)$, то $s < 0$.

З твердження 1 і теореми 1 випливає нескінченновимірність простору усіх розв'язків рівняння (1). Більш того, для них має місце наступний аналог принципу Фрагмена-Ліндельофа [10, 11].

Теорема 2. *Нехай* $y(t)$ *– розв'язок рівняння* (1) *на* $(-\infty, \infty)$. *Якщо*

$$\exists \gamma \in (0, -s),\ \exists c_\gamma > 0 : \|y(t)\| \leq c_\gamma e^{\gamma |t|},\ t \in (-\infty, \infty), \tag{10}$$

то $y(t) \equiv 0$.

Доведення. Запишемо представлення (4) у вигляді $y(t) = y_1(t)+y_2(t)$, де $y_1(t),\ y_2(t)$ визначаються формулами (7). Оскільки півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною, то, за твердженням 1, $\exp(tA)f_k = e^{tA}f_r,\ k = 0,1,\dots,n-1$ при $t > 0$. Як випливає з означення типу півгрупи,

$$\forall\delta \in \left(0,-\frac{s}{2}\right),\ \forall t\geq 0,\ \exists c_\delta > 0 : \left\|e^{tA}\right\| \leq c_\delta e^{(s+\delta)t},$$

звідки

$$\forall t \geq 0 : \|y_1(t)\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} t^k \|\exp(tA)f_k\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} c_{k\delta}e^{(s+2\delta)t} \leq \widetilde{c_\delta}e^{(s+2\delta)t}, \tag{11}$$

де $2\delta \in (0,-s)$ і стала $\widetilde{c_\delta} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_{k\delta}$ залежить тільки від f_k.

Нехай тепер $g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Тоді

$$\forall\delta \in \left(0,-\frac{s}{2}\right),\ \forall t \geq 0 : \|g\| = \left\|e^{tA}\exp(-tA)g\right\| \leq$$
$$\leq \left\|e^{tA}\right\| \|\exp(-tA)g\| \leq c_\delta e^{(s+\delta)t}\|\exp(-tA)g\|.$$

Це зумовлює нерівність

$$\|\exp(-tA)g\| \geq c'_\delta e^{-(s+\delta)t}\|g\| \text{ при } t\geq 0,$$

а тому

$$\forall t \geq 0 : \|y_2(t)\| = \|\exp(-tA)h(t)\| \geq c'_\delta e^{-(s+\delta)t}\|h(t)\|,$$

де $h(t) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} t^k g_k$ і $c'_\delta = c_\delta^{-1}$ не залежить від t.

Припустимо, що $y_2(t) \not\equiv 0$. Тоді у зображенні (7) для $y_2(t)$ існує k, при якому $g_k \neq 0$. Без обмеження загальності можна припустити, що $g_{m-1} \neq 0$. Тоді

$$\forall t > 0 : \|y_2(t)\| \geq c'_\delta e^{-(s+\delta)t}\left(t^{m-1}\|g_{m-1}\| - \left\|\sum_{k=0}^{m-2} t^i g_k\right\|\right) =$$

$$= c'_\delta e^{-(s+\delta)t} t^{m-1} \left(\|g_{m-1}\| - \left\| \sum_{k=0}^{m-2} t^{k-m+1} g_k \right\| \right).$$

Оскільки

$$\left\| \sum_{k=0}^{m-2} t^{k-m+1} g_k \right\| \to 0 \text{ при } t \to \infty$$

і $t^{m-1} > e^{-\delta t}$ для досить великих $t > 0$, то

$$\forall t > 0, \ \forall \delta \in \left(0, -\frac{s}{2}\right) : \|y_2(t)\| \geq c''_\delta e^{-(s+2\delta)t}, \tag{12}$$

де c''_δ не залежить від t. Беручи до уваги (11) і (12), одержуємо

$$\begin{aligned} \forall t > 0 : &\|y_2(t)\| = \|y(t) - y_1(t)\| \leq \|y(t)\| + \|y_1(t)\| \leq \\ &\leq c_\gamma e^{\gamma t} + \widetilde{c}_\delta e^{(s+2\delta)t} \leq c e^{\gamma t}, \end{aligned} \tag{13}$$

де $c = c_\gamma + \widetilde{c}_\delta$. З нерівностей (12), (13) випливає, що

$$\forall t > 0 : c_\delta e^{-(s+2\delta)t} \leq \|y_2(t)\| \leq c_\gamma e^{\gamma t}.$$

Покладемо

$$\varphi(t) = \frac{\|y_2(t)\|}{c_\delta e^{-(s+2\delta)t}}.$$

Тоді для досить великих $t > 0$

$$1 \leq \varphi(t) \leq \widetilde{c} e^{(\gamma+s+2\delta)t}, \quad \widetilde{c} = \frac{c_\gamma}{c_\delta}.$$

Покладаючи $\delta = -\frac{\gamma+s}{4}$, для великих $t > 0$ дістанемо

$$1 \leq \varphi(t) \leq \widetilde{c} e^{\frac{\gamma+s}{2} t}.$$

Переходячи до границі при $t \to \infty$ і враховуючи, що $\frac{\gamma+s}{2} < 0$, робимо висновок, що $1 \leq \varphi(t) \leq 0$ за умови, що $y_2(t) \neq 0$, коли $t \geq 0$, а це неможливо. Отже, $y_2(t) \equiv 0$ на півосі $[0, \infty)$. Тому $g_i = 0, \ i = 0, 1, \ldots m-1$.

Якщо припустити, що $y_1(t) \not\equiv 0$, прийдемо до висновку, що $y_1(t) \neq 0$ при $t \leq 0$. Підставляючи в (4) $-t$ замість t, дістанемо $y_1(t) \equiv 0$ на півосі $(-\infty, 0]$, звідки, за Теоремою 1, $f_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ і, як наслідок, $y(t) \equiv 0$.

Теорему доведено.

Наслідок 2. (Аналог теореми Ліувілля.) *Нехай* $y(t)$ *– розв'язок рівняння* (1) *на* $(-\infty, \infty)$. *Тоді*

$$\sup_{t \in (-\infty, \infty)} |y(t)| < \infty \Longrightarrow y(t) \equiv 0, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Література

[1] *Gorbachuk V. M.* On solutions of parabolic and elliptic type differential equations on $(-\infty, \infty)$ in a Banach space. – Methods Funct. Anal. Topology. – 2008. – **14**, No. 2, 177–183.

[2] *Gorbachuk V. M.* On the structure of solutions of operator-differential equations on the whole real axis. – Methods Funct. Anal. Topology. – 2015. – **21**, no. 2.

[3] *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – Москва: Наука, 1967.

[4] *Engel K.-J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. – Berlin: Springer, 2000.

[5] *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Boundary Value Problems for Operator Differential Equations. – Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[6] *Gorbachuk M., Gorbachuk V.* On extensions and restrictions of semigroups of linear operators in a Banach space and their applications. – Math. Nachr. – 2012/ – **285**, No 14-15. – P. 1860–1879.

[7] *Hille E., Phillips R. S.* Functional Analysis and Semi-Groups. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1957.

[8] *Yosida K.* Functional Analysis. – Berlin etc.: Springer, 1965.

[9] *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Т. 2. Пространства основных и обобщенных функций. — Москва: Физматгиз, 1958.

[10] *Титчмарш Е.* Терия функций. – Москва: Наука, 1980.

[11] *Lax P. D.* A Phragmen-Lindelöf theorem in harmonic analysis and its application to some questions in the theory of elliptic equations. – Comm. Pure Appl. Math. – 1957. – **10**. – P. 361–389.