Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, т. 12, № 2, 101–112

УДК 517.956.223

***Є. В. Гнип*[1], *Т. І. Кодлюк*[2]**

([1] *Ін-т математики НАН України, Київ*
[2] *Тернопільський національний педагогічний університет імені В. Гнатюка, Тернопіль*)

Неперервність за параметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових задач на просторах Соболєва

evgeniyagnyp27@gmail.com

For linear systems of ordinary differential equations of order $r \in \mathbb{N}$, we investigate multipoint linear boundary-value problems that depend on a parameter. We find conditions under which the solutions to these problems are continuous with respect to the parameter in the Sobolev spaces $W_p^{n+r}([a,b],\mathbb{C}^m)$, where m, $n+1 \in \mathbb{N}$, and $p \in [1,\infty)$.

Для лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \in \mathbb{N}$ досліджено некласичні багатоточкові лінійні крайові задачі, залежні від параметра. Знайдено умови неперервності за параметром розв'язків цих задач у соболєвських просторах $W_p^{n+r}([a,b],\mathbb{C}^m)$, де m, $n+1 \in \mathbb{N}$ і $p \in [1,\infty)$.

1. Вступ

Багатоточкові крайові задачі є класичним об'єктом вивчення теорії звичайних диференціальних рівнянь [1]-[6]. Неперервність за параметром їх розв'язків в рівномірній нормі $\|\cdot\|_\infty$ досліджувалась, наприклад в роботах [5, 4], а в [3] неперервність відносно норми $\|\cdot\|_{n,p}$ просторів Соболєва W_p^n, яка сильніша, ніж рівномірна норма простору $(C)^m$. Цікавими для вивчення є некласичні багатоточкові крайові задачі, наприклад, в роботі [6] встановлено неперервну залежність розв'язку $y(\cdot)$ від параметра лінійної неоднорідної багатоточкової крайової задачі для систем диференціальних рівнянь в просторі $C^{(n)}$ всіх n раз неперервно диференційованих функцій.

Мета даної роботи – уточнити результати роботи [1] умовами неперервності розв'язків некласичної багатоточкової крайової задачі для системи лінійних диференціальних рівнянь порядку r, які є тотальними на просторі Соболєва W_p^{n+r}.

2. Постановка задачі

Нехай задані числа $n, r, m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ і скінченний інтервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Введемо позначення $W_p^n := W_p^n((a,b),\mathbb{C})$, $\left(W_p^n\right)^m := W_p^n((a,b),\mathbb{C}^m)$, $\left(W_p^n\right)^{m\times m} := W_p^n((a,b),\mathbb{C}^{m\times m})$ простори Соболєва на інтервалі (a, b) відповідно функцій, вектор-функцій і матриць-функцій. Норма в банаховому просторі W_p^n задається рівністю

$$\|x\|_{n,p} := \left(\sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b |x^{(j)}(t)|^p dt\right)^{1/p}, \qquad W_p^0 := L_p.$$

Аналогічно простори $\left(W_p^n\right)^m$ и $\left(W_p^n\right)^{m\times m}$ будуть банаховими відносно норми $\|\cdot\|_{n,p}$, яка визначається як сума відповідних норм елементів вектор-функцій або матриці-функції.

Розглянемо на (a,b) неоднорідну багатоточкову крайову задачу для систем лінійних диференціальних рівнянь порядку r вигляду

$$y^{(r)}(t)+\sum_{k=1}^{r}A_{r-k}(t)y^{(r-k)}(t)=f(t), \qquad t\in(a,b), \tag{1}$$

$$By(\cdot)=\sum_{l=0}^{n+r}\sum_{i=1}^{p}\alpha_i^{(l)}y^{(l)}(t_i)=c, \tag{2}$$

де комплекснозначні $(m\times m)$ – матриці-функції $A_k\in\left(W_p^n\right)^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot)\in\left(W_p^n\right)^m$, вектор $c\in\mathbb{C}^m$, матриця $\alpha_{i,l}\in\mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_i\in[a,b]$, де $i\in\overline{1,p}$, $l\in\overline{0,n+r-1}$, $k\in\overline{0,r-1}$.

Під розв'язком системи (1), (2) розуміється вектор-функція $y(\cdot)\in\left(W_p^{n+r}\right)^m$, яка задовольняє рівняння (1) скрізь, при $r=1$ майже скрізь, на інтервалі (a,b) і крайовим умовам (2).

Запишемо задачу (1), (2) у вигляді лінійного операторного рівняння

$$L_By=(f,c),$$

де оператор

$$L_B:=\left(Ly,\ \sum_{l=0}^{n+r-1}\sum_{i=1}^{p}\alpha_i^{(l)}y^{(l)}(t_i)\right),$$

$$Ly:=y^{(r)}(t)+\sum_{k=1}^{r}A_{r-k}(t)y^{(r-k)}(t).$$

Нехай тепер коефіцієнти диференціального рівняння, оператор B і праві частини рівностей (1), (2) залежать від параметра $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$, де $\varepsilon_0>0$. Розглянемо сім'ю лінійних неоднорідних багатоточкових краєвих задач для системи диференціальних рівнянь порядку r

$$y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{r} A_{r-k}(t,\varepsilon) y^{(r-k)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \qquad t \in (a,b), \quad (3)$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = \sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{i=1}^{p+q} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon),\varepsilon) = c(\varepsilon), \quad (4)$$

де матриці-функції $A_k(\cdot;\varepsilon) \in \left(W_p^n\right)^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in \left(W_p^n\right)^m$, вектори $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, матриці $\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а точки $t_i \in [a,b]$ мають відповідну серію точок $t_{i,j}$, де $\quad i \in \overline{1,p+q}, \quad j \in \overline{1,k_i}, \quad k_i \in \mathbb{N}, \quad l \in \overline{0,n+r-1}$

Умова (4) є некласичною, бо містить в собі похідні вектор-функції $y(\cdot)$ до порядку $n+r-1$ включно, отже, вищого порядку, ніж порядок диференціального рівняння.

Якщо крайова задача (3), (4) залежить від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, то закономірно виникає питання про неперервність розв'язків $y(\cdot,\varepsilon)$ такої задачі за параметром ε в банаховому просторі $\left(W_p^{n+r}\right)^m$. Мата роботи полягає в тому, щоб знайти достатні умови для виконання граничного співвідношення

$$\|y(\cdot,\varepsilon) - y(\cdot,0)\|_{n+r,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \quad (5)$$

3. Основні результати

Перейдемо до формулювання основного результату.

Оскільки оператор L_B фредгольмів, що досить просто перевіряється, то доцільно сформулювати умову розв'язності даного неперервного оператора при достатньо малих значеннях параметра ε.

Позначимо $Y_m(\cdot) \in \left(W_p^{n+r}\right)^{m\times m}$ як розв'язок матричної задачі

Коші

$$Y_s^{(r)}(t) + \sum_{k=1}^{r} A_{r-k}(t) Y_s^{(r-k)}(t) = 0, \quad t \in (a,b) \tag{6}$$

$$Y_s^{(k)}(a) = \delta_{sk} I_m, \qquad s,k = 0,\dots,r-1, \tag{7}$$

де δ_{sk} — символ Кронекера, I_m — одинична матриця размірності $m \times m$.

Теорема 1. *Однорідна гранична крайова задача*

$$y^{(r)}(t;0) + \sum_{k=1}^{r} A_{r-k}(t;0) y^{(r-k)}(t;0) = 0, \tag{8}$$

$$By(\cdot) = \sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i(0);0) = 0, \tag{9}$$

має лише тривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\det\left([\sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{(l)} Y_0^{(l)}(t_i)] \dots [\sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{(l)} Y_{r-1}^{(l)}(t_i)] \right) \neq 0. \tag{10}$$

Тут квадратна матриця (10) розмірності $rm \times rm$ утворена з r прямокутних блоків $\left[\sum\limits_{l=0}^{n+r-1} \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i^{(l)} Y_s^{(l)}(t_i)\right]$ розмірності $rm \times m$, а j-ий стовпчик матриці $\left[\sum\limits_{l=0}^{n+r-1} \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i^{(l)} Y_s^{(l)}(t_i)\right]$ співпадає з дією оператора B на j-ий стовпчик матриці-функції $Y_s(\cdot)$.

Доведення теореми 1.

Як відомо, розв'язок $y(\cdot)$ задачі (8) можна представити у вигляді:

$$y(t) = \sum_{s=0}^{r-1} Y_s(t) \cdot q_s, \tag{11}$$

де q_s – довільний вектор з $\mathbb{C}^m$.

Тоді крайова умова (9) перепишеться таким чином:

$$\sum_{l=0}^{n+r-1}\sum_{i=1}^{p}\sum_{s=0}^{r-1}\alpha_i^{(l)}Y_s^{(l)}(t_i)\cdot q_s =$$

$$=\sum_{s=0}^{r-1}\left[\sum_{l=0}^{n+r-1}\sum_{i=1}^{p}\alpha_i^{(l)}Y_s^{(l)}(t_i)\right]\cdot q_s = 0.$$

З представлення (11) та з того, що

$$y(t)\equiv 0,$$

отримуємо, що має виконуватися умова (10).

Теорема 1 доведена.

Вважатимемо, що виконана умова

Припущення 1. *Однорідна гранична крайова задача*

$$y^{(r)}(t;0)+\sum_{k=1}^{r}A_{r-k}(t;0)y^{(r-k)}(t;0)=0, \tag{12}$$

$$B(0)y(\cdot)=\sum_{l=0}^{n+r-1}\sum_{i=1}^{p}\alpha_i^{(l)}y^{(l)}(t_i(0);0)=0, \tag{13}$$

має лише тривіальний розв'язок.

Зазначимо, що гранична ($\varepsilon = 0$) крайова умова (13) ставиться лише для p точок $t_1,\dots,t_p$.

Теорема 2. *Нехай при $\varepsilon\to 0+$ виконуються умови:*

1) для будь-якого $k\in\{0,\dots,r-1\}$ $\|A_k(\cdot;\varepsilon)-A_k(\cdot;0)\|_{n,p}\to 0$;

2) для будь-якого $i\in\overline{1,p+q}$ $\quad t_{i,j}(\varepsilon)\to t_i$;

3) для будь-якого $l\in\{0,\dots,n+r-1\}$ $\sum_{j=1}^{k_i}\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\to\alpha_i^{(l)}$, $\quad i\in\overline{1,p}$, $\quad k_i\in\mathbb{N}$;

4) для будь-якого $l \in \{0, \dots, n+r-2\}$ $\quad |\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)||t_{i,j}(\varepsilon)-t_i| \to 0$, $|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)||t_{i,j}(\varepsilon) - t_i|^{1/q} = o(1), \quad i \in \overline{1,p}$;

5) для будь-якого $l \in \{0, \dots, n+r-1\}$ $\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) \to 0, \quad i \in \overline{p+1, p+q}$;

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *оборотний.*

Якщо, крім того,

6) $\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0; \quad c(\varepsilon) \to c(0)$.

Тоді однозначно визначений розв'язок $y(\cdot;\varepsilon)$ *задачі* (3), (4) *задовольняє граничне співвідношення* (5).

Для доведення теореми нам знадобляться

Лема 1. *Якщо для задачі* (3) – (4) *при* $\varepsilon \to +0$ *виконуються умови:*

1) для будь-якого $i \in \overline{1, p+q}$ $\quad t_{i,j}(\varepsilon) \to t_i$;

2) для будь-якого $l \in \{0, \dots, n+r-1\}$ $\sum\limits_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) \to \alpha_i^{(l)}, \quad i \in \overline{1,p}, \quad k_i \in \mathbb{N}$;

3) для будь-якого $l \in \{0, \dots, n+r-2\}$ $\quad |\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)||t_{i,j}(\varepsilon)-t_i| \to 0$, $|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)||t_{i,j}(\varepsilon) - t_i|^{1/q} = o(1), \quad i \in \overline{1,p}$;

тоді

$$\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) \to \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i).$$

Доведення. Розглянемо для будь-якого $l \in \{0, \dots, n+r-1\}$

$$\|\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i)\| \leq$$

$$\leq \|\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_i)\| +$$

$$+ \|\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_i) - \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i)\| \leq$$

$$\leq \|\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) \left(y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_i) \right) \| +$$

$$+ \| \left(\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_i \right) y^{(l)}(t_i) \| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k_i} \|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \|y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_i)\| +$$

$$+ \|\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_i^{(l)}\| \|y^{(l)}(t_i)\|.$$

Далі оцінимо перший доданок: $\forall l \in \{0, \dots, n+r-2\}, \exists C > 0$

$$|y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_i)| \leq C |t_{i,j}(\varepsilon) - t_i|.$$

І в силу того, що $y^{(n+r-2)}(\cdot) \in W_p^1$, тоді можемо записати

$$|y^{(l-1)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(l-1)}(t_i)| = |\int_{t_i}^{t_{i,j}(\varepsilon)} y^{(l)}(s) ds| \leq \int_{t_i}^{t_{i,j}(\varepsilon)} |y^{(l)}(s)| ds \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{t_i}^{t_{i,j}(\varepsilon)} |y^{(l)}(s)|^p ds \right)^{1/p} \cdot |t_{i,j}(\varepsilon) - t_i|^{1/q} =$$

$$= o(1) \cdot |t_{i,j}(\varepsilon) - t_i|^{1/q}, \quad \varepsilon \to +0,$$

де $1/p + 1/q = 1$.

Тоді з умови 3) для будь-якого $l \in \{0, \ldots, n + r - 1\}$

$$\sum_{j=1}^{k_i} \|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \|y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_i)\| \to +0.$$

Оскільки в другому доданку $\forall l \in \{0, \ldots, n+r-1\}$ $\|y^{(l)}(t_i)\| \leq c$, тоді за умовою 2)

$$\| \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_i^{(l)} \| \|y^{(l)}(t_i)\| \to +0.$$

Лема 1 доведена.

Лема 2. *Якщо для задачі* (3) – (4) *при* $\varepsilon \to +0$ *для будь-якого* $l \in \{0, \ldots, n+r-1\}$, $i \in \overline{p+1, p+q}$ $\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) \to 0$, *тоді*

$$\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) \to 0.$$

Доведення.

Розглянемо для будь-якого $l \in \{0, \ldots, n + r - 1\}$ при $i \in \overline{p+1, p+q}$:

$$\| \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) \| \leq \sum_{j=1}^{k_i} \|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \|y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon))\| \to 0+$$

з умови 1 даної леми.

Далі вважатимемо, що

Припущення 2. *Гранична однорідна крайова задача*

$$L(0)y(\cdot,0)=0, \qquad B(0)y(\cdot,0)=0,$$

має лише тривіальний розв'язок, де

$$Ly := y^{(r)}(t) + \sum_{k=1}^{r} A_{r-k}(t)y^{(r-k)}(t),$$

а

$$B : \left(W_p^{n+r}\right)^m \to \mathbb{C}^{rm}$$

лінійний неперервний оператор.

Теорема 3. *Нехай виконано припущення 2 і при* $\varepsilon \to 0+$

1) *норма* $\|A_k(\cdot,\varepsilon) - A_k(\cdot,0)\|_{(n)} \to 0$ *для будь-якого* $k \in \{0,\dots,r-1\}$*;*
2) *для кожної вектор-функції* $y \in \left(W_p^{n+r}\right)^m$ $B(\varepsilon)y \to B(0)y$*;*

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *оборотний.*

Якщо крім того

3) $\|f(\cdot,\varepsilon) - f(\cdot,0)\|_{(n)} \to 0$, $c(\varepsilon) \to c(0)$,

єдиний при малих ε *розв'язок* $y(\cdot,\varepsilon)$ *крайової задачі*

$$L(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = f(\cdot,\varepsilon), \qquad B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon),$$

задовольняє граничне співвідношення (5).

Доведення теореми 2. Оскільки задача (3) – (4) випадок тотальної крайової задачі, тоді для доведення теореми 2, врахувавши її умови, теорема 3 вимагає сильної збіжності операторів $B(\varepsilon)$. Запишемо

$$\|B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon) - B(0)y(\cdot;0)\| \leq$$

$$\| \sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{i=1}^{p+q} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - \sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) \| \leq$$

$$\| \sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - \sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) \| +$$

$$+ \| \sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{i=p+1}^{p+q} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) \| \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{i=1}^{p} \| \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) \| +$$

$$+ \sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{i=p+1}^{p+q} \| \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) \|$$

З попередніх міркувань, враховуючи леми 1 та 2, випливає сильна збіжність операторів:

$$B(\varepsilon) \to B(0).$$

Отже, маємо, що виконуються всі умови теореми 3, а це й доводить теорему 2. □

Література

[1] *Гнып Е. В., Кодлюк Т. И., Михайлец В. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах Соболева. // Укр. мат. журн. – 2015. –**67**, № 5. –С. 584-591.

[2] *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. // Соврем. проблемы математики. Новейшие достижения. – Москва: ВИНИТИ, 1987. – Т. 30. – С. 3—103.

[3] *Кодлюк Т. І.* Одновимірні крайові задачі з параметром в просторах Соболєва / Ін-т математики НАН України. – Київ, 2013. –155 с.

[4] *Левин А. Ю.* О дифференциальных свойствах функции Грина многоточечной краевой задачи // Докл. АН СССР. –1961. – **136**, № 5. – С. 1022—1025.

[5] *Рева Н. В.* Неперервність за параметром розв'язків лінійних крайових задач: Дис. канд. фіз.-мат. наук / Ін-т математики НАН України. – Київ, 2009. – 148 с.

[6] *Чеханова Г. А.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач та їх похідних: Дис. канд. фіз.-мат. наук / Ін-т математики НАН України. – Київ, 2015. – 122 с.