Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 2, 74–100

УДК 517.946

І. І. Волянська, В. С. Ільків

(Національний університет „Львівська політехніка“, Львів)

Умови розв'язності триточкової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними у двовимірному циліндрі

i.volyanska@i.ua, ilkivv@i.ua

The paper deals with the investigation of a three-point problem for a partial differential equation in a two-dimensional domain. We establish sufficient conditions for the existence of a solution to this problem and sufficient and necessary conditions for the uniqueness of the solution in the corresponding weighted Sobolev spaces (Abel spaces). A similar problem for an equation in several spatial variables is ill-posed in the sense of Hadamard; its solvability is connected with the problem of small denominators, which arises in the construction of the solution. In the case of a single spatial variable we estimate the corresponding denominators by constants and show that the problem is well-posed in the sense of Hadamard in the Abel spaces.

У роботі досліджено триточкову задачу для диференціального рівняння з частинними похідними у двовимірній області. Встановлено достатні умови існування та необхідні і достатні умови єдиності її розв'язку у відповідних вагових просторах Соболєва (просторах Абеля). Подібна задача для рівняння з багатьма просторовими змінними є некоректною за Адамаром, її розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку. У випадку однієї просторової змінної відповідні знаменники вдалося оцінити сталими і показати, що задача коректна за Адамаром у просторах Абеля.

1. Вступ

Інтерес до вивчення задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною для диференціальних рівнянь зумовлений як потребою побудови загальної теорії крайових задач, так і тим, що багатоточкові задачі виникають при математичному моделюванні фізичних процесів.

Для звичайних диференціальних рівнянь задачі вивчаються у різних аспектах вже понад століття; отримано досить повні результати, які стосуються, зокрема, умов існування та єдиності розв'язків, побудови функції Гріна, її регуляризаційних властивостей та умов знакосталості, методів наближеного розв'язування, тощо [1, 2, 3].

Для рівнянь з частинними похідними вперше багатоточкова задача була поставлена в 1963 році В. Я. Скоробогатьком [4]. Виявилось, що задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною для диференціальних рівнянь з частинними похідними не є коректними, а їх розв'язність залежить від малих знаменників. Для забезпечення єдиності розв'язку таких задач на шуканий розв'язок накладають певні додаткові умови за часовою координатою, умови періодичності чи майже періодичності за просторовими змінними, певні умови зростання розв'язку на безмежності [5, 6, 7].

У статті досліжено задачу з триточковими умовами за часовою змінною t для безтипного диференціального рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами у двовимірному циліндрі. Встановлено критерії однозначної розв'язності цієї задачі у шкалі вагових просторів Соболєва (просторів Абеля) [8]. Показано коректність за Адамаром даної задачі, оскільки у випадку однієї просторової змінної відповідні вирази знизу обмежені сталими.

2. Постановка задачі

Позначимо $\mathcal{D} = [0;T]\times\Omega$, де $T > 0$, Ω — одновимірний тор $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Нехай W — лінійний простір скінченних сум (основних функцій), що є тригонометричними многочленами на Ω вигляду $P(x) = \sum_k P_k e^{ikx}$, де P_k — комплексні коефіцієнти.

Простір W' спряжений з простором W; це простір узагальнених функцій, які є формальними рядами $Q(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k e^{ikx}$, що діють на основну функцію $P \in W$ за таким правилом: $\langle Q, P\rangle = \sum_k Q_k \bar{P}_k$, де $\bar{P}_k$ — число, комплексно спряжене з числом P_k.

Для дійсного числа α і функції $\beta\colon [0;T] \to \mathbb{R}$ введемо шкали просторів $\{\mathbf{E}^q_\alpha(\Omega)\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{\mathbf{E}^{3,q}_\beta(\mathcal{D})\}_{q\in\mathbb{R}}$, де $\mathbf{E}^q_\alpha(\Omega)$ — гільбертів простір (простір Абеля) періодичних функцій

$$\psi = \psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k e^{ikx}$$

з нормою

$$\|\psi\|^2_{\mathbf{E}^q_\alpha(\Omega)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{k}^{2q} e^{2\tilde{k}\alpha} |\psi_k|^2, \qquad \tilde{k} = \sqrt{1+k^2},$$

а $\mathbf{E}^{3,q}_\beta(\mathcal{D})$ — банахів простір функцій $u = u(t,x)$ таких, що похідні $\partial^l u(t,\cdot)/\partial t^l$, які визначені для $l = 0,1,2,3$ формулою

$$\partial^l u(t,x)/\partial t^l = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u^{(l)}_k(t) e^{ikx},$$

для кожного $t \in [0,T]$ належать до просторів $\mathbf{E}^{q-l}_{\beta(t)}(\Omega)$ відповідно, і неперервні за змінною t у цих просторах. Квадрат норми функції u у просторі $\mathbf{E}^{3,q}_\beta(\mathcal{D})$ обчислюється за формулою

$$\|u\|^2_{\mathbf{E}^{3,q}_\beta(\mathcal{D})} = \sum_{l=0}^{3} \max_{[0,T]} \left\| \frac{\partial^l u(t,\cdot)}{\partial t^l} \right\|^2_{\mathbf{E}^{q-l}_{\beta(t)}(\Omega)}.$$

В області $\mathcal{D}$ розглянуто задачу з триточковими умовами

$$Lu = \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + a_{21}\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + a_{12}\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + a_{03}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \\ + a_{20}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + a_{02}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ + a_{10}\frac{\partial u}{\partial t} + a_{01}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{00}u = 0, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \quad u(T/2,x) = \varphi_2(x), \quad u(T,x) = \varphi_3(x), \tag{2}$$

де $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i,j = 0,1,2,3$, $a_{30} = 1$, $\varphi_1 = \varphi_1(x)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x)$, $\varphi_3 = \varphi_3(x)$ — задані функції, $u = u(t,x)$ — шукана функція.

Вигляд області $\mathcal{D}$ та Ω накладає умови 2π–періодичності за змінною x на функцію u та функції $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, тому природно використовувати простори $\mathbf{E}^q_\alpha(\Omega)$ і $\mathbf{E}^{3,q}_\beta(\mathcal{D})$, оскільки включення $Lu \in \mathbf{E}^{0,q-3}_\beta(\mathcal{D})$ та

$$u(0,\cdot) \in \mathbf{E}^q_{\beta(0)}(\Omega), \quad u(T,\cdot) \in \mathbf{E}^q_{\beta(T)}(\Omega), \\ u(T/2,\cdot) \in \mathbf{E}^q_{\beta(T/2)}(\Omega)$$

справджуються для довільного елемента $u \in \mathbf{E}^{3,q}_\beta(\mathcal{D})$.

Означення 1. *Під розв'язком задачі* (1), (2) *будемо розуміти функцію* $u \in \mathbf{C}^3([0,T]; W')$, *яка на відрізку* $[0,T]$ *задовольняє рівняння* (1) *і умови* (2) *у просторі* W' *та належить до простору* $\mathbf{E}^{3,q}_\beta(\mathcal{D})$.

Розв'язок залежить від компонент вектора $\vec{a}$, які будемо вважати параметрами задачі, що змінюються в обмеженій фіксованій області.

Для існування розв'язку задачі в просторі $\mathbf{E}^{3,q}_\beta(\mathcal{D})$ необхідно, щоб праві частини $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ умов (2) мали таку гладкість у шкалі просторів на множині Ω:

$$\varphi_1 \in \mathbf{E}^q_{\beta(0)}(\Omega), \quad \varphi_2 \in \mathbf{E}^q_{\beta(T/2)}(\Omega), \quad \varphi_3 \in \mathbf{E}^q_{\beta(T)}(\Omega).$$

3. Побудова формального розв'язку. Теорема єдиності

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді такого ряду з простору $\mathbf{C}^3([0,T];W')$:

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}u_k(t)e^{ikx}, \tag{3}$$

де коефіцієнти $u_k(t)$ — невідомі функції, які визначаємо відокремлюючи змінні.

З означення розв'язку задачі (1), (2) отримаємо, що функція $u_k=u_k(t)$ є розв'язком відповідної триточкової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d^3u_k}{dt^3}+b_1(k)\frac{d^2u_k}{dt^2}+b_2(k)\frac{du_k}{dt}+b_3(k)u_k=0,\quad k\in\mathbb{Z}, \tag{4}$$

$$u_k(0)=\varphi_{1k},\quad u_k(T/2)=\varphi_{2k},\quad u_k(T)=\varphi_{3k}, \tag{5}$$

де комплексні числа φ_{1k}, φ_{2k}, φ_{3k} є коефіцієнтами Фур'є функцій φ_1, φ_2, φ_3, многочлени

$$b_1(k)=ika_{21}+a_{20},\quad b_2(k)=-k^2a_{12}+ika_{11}+a_{10},$$
$$b_3(k)=-ik^3a_{03}-k^2a_{02}+ika_{01}+a_{00}$$

мають комплексні коефіцієнти.

Єдиність розв'язку u_k задачі (4), (5) у просторі $\mathbf{C}^3[0,T]$ для всіх $k\in\mathbb{Z}$ є необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{E}^{3,q}_{\beta}(\mathcal{D})$ для довільних дійсних величин q, β. Саме тому, якщо хоча б для одного k існує нетривіальний розв'язок $\hat{u}_k=\hat{u}_k(t)$ однорідної задачі (4), (5), то однорідна задача (1), (2) також має нетривіальний розв'язок $u=\hat{u}(t,x)$, який визначається формулою $\hat{u}(t,x)=\hat{u}_k(t)e^{ikx}$. Отже, розв'язок задачі (1), (2) — не єдиний.

Для побудови і оцінювання розв'язку задачі (4), (5) у рівнянні (4) пронормуємо коефіцієнти $b_m(k)$, $m=1,2,3$, зокрема подамо у вигляді добутку $b_m(k) = \tilde{k}^m \tilde{b}_m(k)$. Звідси випливає, що $\tilde{b}_m(k)$ для $k \neq 0$ є функціями такого вигляду:

$$\tilde{b}_1(k)=\frac{ik}{\tilde{k}}\Big(a_{21}-\frac{ia_{20}}{k}\Big),\ \ \tilde{b}_2(k)=-\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^2\Big(a_{12}-\frac{ia_{11}}{k}-\frac{a_{10}}{k^2}\Big),$$
$$\tilde{b}_3(k)=-i\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^3\Big(a_{03}-\frac{ia_{02}}{k}-\frac{a_{01}}{k^2}+\frac{ia_{00}}{k^3}\Big).$$

Функції $\tilde{b}_m(k)$, як і коефіцієнти $b_m(k)$, лінійно залежать від коефіцієнтів вектора $\vec{a}$. Очевидно, для $m = 1, 2, 3$ справджується нерівність

$$\big|\tilde{b}_m(k)\big| \leq \sum_{r=0}^{m} \big|a_{3-m,r}\big| \frac{|k|^r}{\tilde{k}^m} \leq \max_{r=0,1,\ldots,m} \big|a_{3-m,r}\big| \sum_{r=0}^{m} \frac{|k|^r}{\tilde{k}^m}.$$

Якщо коефіцієнти $a_{3-m,r} \in \mathbb{C}$ рівняння (1) розглядати у крузі деякого радіуса A з центром у початку координат комплексної площини, то отримаємо оцінки

$$\big|\tilde{b}_m(0)\big|=\big|a_{3-m,0}\big|\leq A,\ \ \big|\tilde{b}_m(\pm 1)\big|\leq(m+1)2^{-m/2}A\leq\frac{3}{2}A,$$

$$\big|\tilde{b}_m(k)\big| \leq \frac{A}{\tilde{k}^m}\frac{|k|^{m+1}}{|k|-1} < \frac{A|k|}{|k|-1}, \quad k \notin \{-1, 0, 1\},$$

тобто $\big|\tilde{b}_m(k)\big| < 2A$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Звіси випливає, що для всіх коренів $\lambda_1(k), \lambda_2(k), \lambda_3(k)$ многочлена

$$P_k(\lambda)=\prod_{m=1}^{3}\big(\lambda-\lambda_m(k)\big)=\lambda^3+\tilde{b}_1(k)\lambda^2+\tilde{b}_2(k)\lambda+\tilde{b}_3(k)$$

виконуються нерівності [9, с. 10]:

$$|\lambda_m(k)|\leq 1+\max\{|\tilde{b}_1(k)|, |\tilde{b}_2(k)|, |\tilde{b}_3(k)|\}\leq 1+2A=A_1. \qquad (6)$$

Вважаємо надалі, що корені $\lambda_1(k), \lambda_2(k), \lambda_3(k)$ многочлена $P_k(\lambda)$ впорядковано так, що

$$\operatorname{Re}\lambda_1(k) \geq \operatorname{Re}\lambda_2(k) \geq \operatorname{Re}\lambda_3(k).$$

Очевидно, що числа $\gamma_m = \tilde{k}\lambda_m(k)$ є коренями відповідного характеристичного рівняння

$$\gamma^3 + b_1(k)\gamma^2 + b_2(k)\gamma + b_3(k) = 0$$

для диференціального рівняння (4).

Позначимо через $\mathbf{K}$ скінченну (це буде показано далі) множину тих цілих чисел k, для яких многочлен $P_k(\lambda)$ має кратний корінь. Для $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}$ загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$u_k(t) = C_{k1}e^{\tilde{k}\lambda_1(k)t} + C_{k2}e^{\tilde{k}\lambda_2(k)t} + C_{k3}e^{\tilde{k}\lambda_3(k)t}, \tag{7}$$

де C_{k1}, C_{k2}, C_{k3} — довільні комплексні сталі, і належить до простору $\mathbf{C}^3[0,T]$.

Якщо функція u_k з формули (7) — розв'язок задачі (4), (5), то числа C_{k1}, C_{k2}, C_{k3} утворюють розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} C_{k1} + C_{k2} + C_{k3} = \tilde{\varphi}_{1k} \\ C_{k1} + C_{k2}e_{1k} + C_{k3}e_{2k} = \tilde{\varphi}_{2k} \\ C_{k1} + C_{k2}e_{1k}^2 + C_{k3}e_{2k}^2 = \tilde{\varphi}_{3k}, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} \Lambda_{ij}(k) = \lambda_i(k) - \lambda_j(k), \quad e_{1k} = e^{\tilde{k}T\Lambda_{21}(k)/2}, \\ e_{2k} = e^{\tilde{k}T\Lambda_{31}(k)/2}, \ e_{3k} = e_{2k}/e_{1k} = e^{\tilde{k}T\Lambda_{32}(k)/2}, \ i, j = 1, 2, 3, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\tilde{\varphi}_{1k} = \varphi_{1k}, \quad \tilde{\varphi}_{2k} = \varphi_{2k}e^{-\tilde{k}\lambda_1(k)T/2}, \quad \tilde{\varphi}_{3k} = \varphi_{3k}e^{-\tilde{k}\lambda_1(k)T}. \tag{10}$$

Зокрема, з від'ємності дійсних частин чисел $\Lambda_{21}(k)$, $\Lambda_{31}(k)$, $\Lambda_{32}(k)$ на множині $\mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}$ (виключаючи, можливо, скінченну підмножину) випливає нерівність

$$|e_{jk}| < 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

Навпаки, якщо числа C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}, утворюють розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь (8), то функція $u_k(t)$, що визначена формулою (7) є розв'язком задачі (4), (5).

Визначником системи (8) є число

$$\Delta(k) = e_{1k}(e_{1k}-1)(e_{2k}-1)(e_{3k}-1).$$

Множина $\mathbf{K}$ складається з елементів двох диз'юнктних множин $\mathbf{K}_2$ і $\mathbf{K}_3$, для яких многочлен $P_k(\lambda)$ має двократний корінь $\lambda_2(k)$ $\big(\lambda_1(k) \neq \lambda_2(k)\big)$ або $\lambda_1(k)$ $\big(\lambda_1(k) \neq \lambda_3(k)\big)$ і трикратний корінь $\lambda_1(k)$ відповідно. Якщо $k \in \mathbf{K}_2$, то загальний розв'язок рівняння (4) має відповідно вигляд

$$u_k(t) = C_{k1}e^{\tilde{k}\lambda_1(k)t} + e^{\tilde{k}\lambda_2(k)t}(C_{k2} + C_{k3}t),$$

$$u_k(t) = (C_{k1} + C_{k2}t)e^{\tilde{k}\lambda_1(k)t} + C_{k3}e^{\tilde{k}\lambda_3(k)t},$$

де C_{k1}, C_{k2}, C_{k3} — комплексні сталі, які утворюють розв'язок відповідних систем лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} C_{k1} + C_{k2} = \tilde{\varphi}_{1k} \\ C_{k1} + C_{k2}e_{1k} + C_{k3}e_{1k}T/2 = \tilde{\varphi}_{2k} \\ C_{k1} + C_{k2}e_{1k}^2 + TC_{k3}e_{1k}^2 = \tilde{\varphi}_{3k}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{k1} + C_{k3} = \tilde{\varphi}_{1k} \\ C_{k1} + C_{k2}T/2 + C_{k3}e_{2k} = \tilde{\varphi}_{2k} \\ C_{k1} + TC_{k2} + C_{k3}e_{2k}^2 = \tilde{\varphi}_{3k}, \end{cases}$$

з визначниками

$$\Delta(k) = e_{1k}(e_{1k}-1)^2T/2, \quad \Delta(k) = -(e_{2k}-1)T/2.$$

Якщо ж $k \in \mathbf{K}_3$, то розв'язок задачі (4) шукається за формулою

$$u_k(t) = e^{\tilde{k}\lambda_1(k)t}(C_{k1} + C_{k2}t + C_{k3}t^2),$$

де C_{k1}, C_{k2}, C_{k3} — комплексні сталі, що є розв'язком системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} C_{k1} = \tilde{\varphi}_{1k} \\ C_{k1} + C_{k2}T/2 + C_{k3}T^2/4 = \tilde{\varphi}_{2k} \\ C_{k1} + TC_{k2} + T^2C_{k3} = \tilde{\varphi}_{3k}, \end{cases}$$

з визначником $\Delta(k) = T^3/4$.

Для того, щоб для кожного $k \in \mathbb{Z}$ задача (4), (5) мала єдиний класичний розв'язок необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $e_{jk} - 1 \neq 0$, $j = 1, 2, 3$. Звідси випливає, що

$$e^{\tilde{k}\bigl(\lambda_r(k) - \lambda_p(k)\bigr)T/2} \neq 1, \quad 1 \leq r < p \leq 3.$$

Таким чином отримаємо, що

$$\tilde{k}\bigl(\lambda_r(k) - \lambda_p(k)\bigr)T - i4\pi m \neq 0$$

для довільних цілих m і k.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $\mathbf{E}^{3,q}_{\beta}(\mathcal{D})$ *необхідно і достатньо, щоб для кожної пари* $\bigl(\lambda_r(k), \lambda_p(k)\bigr)$, *де* $r < p$, *коренів многочлена* $P_k(\lambda)$ *рівняння*

$$\tilde{k}\bigl(\lambda_r(k) - \lambda_p(k)\bigr)T - i4\pi m = 0, \tag{11}$$

не мало розв'язків у цілих числах m *і* k.

Доведення. Необхідність. Нехай однорідна задача (1), (2) у просторі $\mathbf{E}^{3,q}_{\beta}(\mathcal{D})$ має не більше одного розв'язку. Якщо існує розв'язок (3) задачі (1), (2), тоді всі функції $u_k(t)$ знаходяться однозначно, тобто однорідна задача (4), (5) у просторі $\mathbf{C}^3[0, T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ має єдиний розв'язок.

Отже, у системі (8) $\Delta(k) \neq 0$ для $k \in \mathbb{Z}$, тобто

$$e^{\tilde{k}\lambda_r(k)T/2} - e^{\tilde{k}\lambda_p(k)T/2} \neq 0, \ \text{де } r < p;$$

рівняння (11) не має розв'язків у цілих числах m і k.

Достатність. Доведемо від супротивного. Припустимо, що існують два різні розв'язки $u_1(t,x)$ і $u_2(t,x)$ задачі (1), (2) з простору $\mathbf{E}_\beta^{3,q}(\mathcal{D})$. Тоді функція $\bar{u}(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$ є розв'язком однорідної задачі (1), (2) з простору $\mathbf{E}_\beta^{3,q}(\mathcal{D})$ і зображається рядом (3) з коефіцієнтами $\bar{u}_k(t)$, які є розв'язками однорідної задачі для відповідних звичайних диференціальних рівнянь (4). Якщо рівняння (11) не мають розв'язків у цілих числах m і k, то $\Delta(k) \neq 0$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$ і система рівнянь (8) має лише тривіальний розв'язок $C_{k1} = C_{k2} = C_{k3} = 0$. Тоді із (7) одержимо, що $\bar{u}_k(t) \equiv 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}$. Подібно встановлюємо, що $\bar{u}_k(t) \equiv 0$ у разі $k \in \mathbf{K}$. Таким чином одержимо, що

$$\|\bar{u}(t,x)\|_{\mathbf{E}_\beta^{3,q}(\mathcal{D})} = \|u_1(t,x) - u_2(t,x)\|_{\mathbf{E}_\beta^{3,q}(\mathcal{D})} = 0,$$

тобто $u_1(t,x) = u_2(t,x)$, що суперечить нашому припущенню. Теорему доведено.

За умов теореми 1 для довільного $k \in \mathbb{Z}$ розв'язок $u_k(t)$ задачі (4), (5) існує і для його знаходження потрібно визначити числа C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}. У разі $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}$ розв'язуємо систему (8) за правилом Крамера і одержуємо рівності

$$C_{kr} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\Delta_{jr}(k)}{\Delta(k)} \tilde{\varphi}_{jk}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K},$$

де $\Delta(k)$ — вище наведений визначник Вандермонда системи (8), а $\Delta_{jr}(k)$ — його відповідні алгебричні доповнення, $j = 1,2,3$, $r = 1,2,3$.

Отже, при $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}$ розв'язок задачі (4), (5) подається такою формулою:

$$\begin{aligned} u_k(t) = \sum_{r=1}^{3} e^{\tilde{k}\lambda_r(k)t} \prod_{p=1, p\neq r}^{3} \left(e^{\tilde{k}\lambda_p(k)T/2} - e^{\tilde{k}\lambda_r(k)T/2}\right)^{-1} \times \\ \times \Big(\varphi_{1k} \prod_{p=1, p\neq r}^{3} e^{\tilde{k}\lambda_p(k)T/2} - \varphi_{2k} \sum_{p=1, p\neq r}^{3} e^{\tilde{k}\lambda_p(k)T/2} + \varphi_{3k}\Big). \end{aligned} \tag{12}$$

Згідно з формулами (3), (12) формальний розв'язок задачі (1), (2), тобто розв'язок з простору $\mathbf{C}^3([0,T];W')$, має вигляд

$$
\begin{gathered}
u(t,x)=\sum_{k\in\mathbf{K}} u_k(t)e^{ikx}+ \\
+\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbf{K}}\sum_{r=1}^{3}\frac{e^{\tilde{k}\lambda_r(k)t}e^{ikx}}{\prod\limits_{p=1,p\neq r}^{3}\left(e^{\tilde{k}\lambda_p(k)T/2}-e^{\tilde{k}\lambda_r(k)T/2}\right)}\times \qquad (13)\\
\times\Bigl(\varphi_{1k}\prod_{p=1,p\neq r}^{3}e^{\tilde{k}\lambda_p(k)T/2}-\varphi_{2k}\sum_{p=1,p\neq r}^{3}e^{\tilde{k}\lambda_p(k)T/2}+\varphi_{3k}\Bigr).
\end{gathered}
$$

4. Оцінка розв'язку задачі для звичайного диференціального рівняння

Доведемо належність розв'язку задачі (1), (2) до простору $\mathbf{E}^{3,q}_{\beta}(\mathcal{D})$. Використовуючи дискримінант

$$
D(k)=\bigl(\lambda_2(k)-\lambda_1(k)\bigr)^2\bigl(\lambda_3(k)-\lambda_1(k)\bigr)^2\bigl(\lambda_3(k)-\lambda_2(k)\bigr)^2
$$

многочлена $P_k(\lambda)$, покажемо скінченність множини $\mathbf{K}$. Цей дискримінант дорівнює визначнику, а саме

$$
D(k)=\begin{vmatrix}
1 & \tilde{b}_1(k) & \tilde{b}_2(k) & \tilde{b}_3(k) & 0\\
0 & 1 & \tilde{b}_1(k) & \tilde{b}_2(k) & \tilde{b}_3(k)\\
3 & 2\tilde{b}_1(k) & \tilde{b}_2(k) & 0 & 0\\
0 & 3 & 2\tilde{b}_1(k) & \tilde{b}_2(k) & 0\\
0 & 0 & 3 & 2\tilde{b}_1(k) & \tilde{b}_2(k)
\end{vmatrix}.
$$

Для $k\neq 0$ подамо вираз $\bigl(\tilde{k}/k\bigr)^6D(k)$ у вигляді многочлена за змінною $1/k$ з коефіцієнтами $D_0,D_1,\ldots,D_6$, зокрема

$$
\Bigl(\frac{\tilde{k}}{k}\Bigr)^6D(k)=D_0+\frac{D_1}{k}+\frac{D_2}{k^2}+\ldots+\frac{D_6}{k^6},
$$

де комплексні величини $D_0, D_1, \ldots, D_6$ є многочленами з цілочисловими коефіцієнтами від коефіцієнтів a_{ij}, $i, j = 0, 1, 2, 3$, рівняння (1), зокрема D_0 — дискримінат многочлена, в якому присутні лише коефіцієнти a_{21}, a_{12}, a_{03} головної частини рівняння (1):

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & a_{21} & a_{12} & a_{03} & 0 \\ 0 & 1 & a_{21} & a_{12} & a_{03} \\ 3 & 2a_{21} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2a_{21} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2a_{21} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Якщо $D_0 \neq 0$, то при $|k| \geq \tilde{D}_0/|D_0|$, де $\tilde{D}_0 = 2\big(|D_1| + |D_2| + \ldots + |D_6|\big)$, справедлива оцінка знизу дискримінанта [10]:

$$|D(k)| \geq \frac{|D_0|}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 = \frac{|D_0|}{16} > 0.$$

З останніх формул випливає оцінка знизу модулів різниць коренів многочлена $P_k(\lambda)$, а також скінченність множини $\mathbf{K}$, яка є підмножиною інтервалу $\big(-\tilde{D}_0/|D_0|, \tilde{D}_0/|D_0|\big)$, тобто має не більше $1 + 2\tilde{D}_0/|D_0|$ елементів.

Встановимо оцінки знизу для модулів дійсних частин $\operatorname{Re}\lambda_j(k)$ коренів многочлена $P_k(\lambda)$. Якщо $\bar{\lambda}$ — комплексно спряжене число до λ, то з рівності

$$2\operatorname{Re}\lambda_j(k) = \lambda_j(k) + \bar{\lambda}_j(k) = \lambda_j(k) - \big(-\bar{\lambda}_j(k)\big)$$

і того, що $-\bar{\lambda}_1(k)$, $-\bar{\lambda}_2(k)$, $-\bar{\lambda}_3(k)$ є коренями многочлена

$$P_{k1}(\lambda) = \prod_{l=1}^{3}\big(\lambda + \bar{\lambda}_l(k)\big) = \lambda^3 + \sum_{l=1}^{3}(-1)^{-l}\bar{\bar{b}}_l(k)\lambda^{3-l},$$

отримаємо, що числа $2\operatorname{Re}\lambda_j(k)$ є множниками результанта

$$R(k) = \prod_{j=1}^{3}\prod_{l=1}^{3}\Big(\lambda_j(k) - \big(-\bar{\lambda}_l(k)\big)\Big) = \prod_{j=1}^{3}\prod_{l=1}^{3}\Big(\lambda_j(k) + \bar{\lambda}_l(k)\Big)$$

многочленів P_k та P_{k1}. Цей результант визначає також рівність

$$R(k)=\begin{vmatrix}1 & \tilde b_1(k) & \tilde b_2(k) & \tilde b_3(k) & 0 & 0\\ 0 & 1 & \tilde b_1(k) & \tilde b_2(k) & \tilde b_3(k) & 0\\ 0 & 0 & 1 & \tilde b_1(k) & \tilde b_2(k) & \tilde b_3(k)\\ 1 & -\bar{\tilde b}_1(k) & \bar{\tilde b}_2(k) & -\bar{\tilde b}_3(k) & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\bar{\tilde b}_1(k) & \bar{\tilde b}_2(k) & -\bar{\tilde b}_3(k) & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\bar{\tilde b}_1(k) & \bar{\tilde b}_2(k) & -\bar{\tilde b}_3(k)\end{vmatrix}.$$

Для довільного $j=1,2,3$ маємо таку оцінку зверху даного результанта:

$$|R(k)|\le 2^9(1+2A)^8|\operatorname{Re}\lambda_j(k)|,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Для оцінки знизу подамо результант у вигляді

$$R(k)=\Big(\frac{k}{\bar{\tilde k}}\Big)^9\Big(R_0+\frac{R_1}{k}+\frac{R_2}{k^2}+\ldots+\frac{R_9}{k^9}\Big),\quad k\ne 0, \tag{14}$$

де R_0 дорівнює такому визначнику:

$$R_0=\begin{vmatrix}1 & a_{21} & a_{12} & a_{03} & 0 & 0\\ 0 & 1 & a_{21} & a_{12} & a_{03} & 0\\ 0 & 0 & 1 & a_{21} & a_{12} & a_{03}\\ 1 & -\bar a_{21} & \bar a_{12} & -\bar a_{03} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\bar a_{21} & \bar a_{12} & -\bar a_{03} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\bar a_{21} & \bar a_{12} & -\bar a_{03}\end{vmatrix}.$$

Якщо $R_0\neq 0$, то при $|k|\ge\hat R_0/|R_0|$, де $\hat R_0=2(|R_1|+|R_2|+\ldots+|R_9|)$, справджується [10] нерівність

$$|R(k)|\ge\big(|k|/\tilde k\big)^9|R_0|/2\ge(\sqrt2)^{-11}|R_0|,$$

з якої випливає оцінка

$$|\operatorname{Re}\lambda_j(k)|\ge C,\qquad C=(\sqrt2)^{-29}A_1^{-8}|R_0|. \tag{15}$$

Перепишемо формулу (12) у такому вигляді

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^{3} \Big(e^{\tilde{k}\lambda_1(k)t} \tilde{\Psi}_{3j-2}(k) +$$
$$+ e^{\tilde{k}\lambda_2(k)t} \tilde{\Psi}_{3j-1}(k) + e^{\tilde{k}\lambda_3(k)t} \tilde{\Psi}_{3j}(k) \Big) \tilde{\varphi}_{jk},$$

$$\tilde{\Psi}_1(k) = e_{1k} e_{2k} \tilde{\Psi}_7(k), \quad \tilde{\Psi}_2(k) = e_{1k} e_{3k} \tilde{\Psi}_8(k),$$
$$\tilde{\Psi}_3(k) = e_{1k} \tilde{\Psi}_9(k), \quad \tilde{\Psi}_4(k) = -e_{1k}(e_{3k}+1)\tilde{\Psi}_7(k),$$
$$\tilde{\Psi}_5(k) = -(e_{2k}+1)\tilde{\Psi}_8(k), \quad \tilde{\Psi}_6(k) = -(e_{1k}+1)\tilde{\Psi}_9(k),$$
$$\tilde{\Psi}_7(k) = (e_{1k}-1)^{-1}(e_{2k}-1)^{-1},$$
$$\tilde{\Psi}_8(k) = e_{1k}^{-1}(1-e_{1k})^{-1}(e_{3k}-1)^{-1},$$
$$\tilde{\Psi}_9(k) = e_{1k}^{-1}(1-e_{2k})^{-1}(1-e_{3k})^{-1}.$$

Маємо наступні рівності для похідних $u_k^{(r)}$ функцій u_k у разі $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}$:

$$\tilde{k}^{-r} u_k^{(r)}(t) = \sum_{j=1}^{3} \Big(\lambda_1^r(k) e^{\tilde{k}\lambda_1(k)t} \tilde{\Psi}_{3j-2}(k) +$$
$$+ \lambda_2^r(k) e^{\tilde{k}\lambda_2(k)t} \tilde{\Psi}_{3j-1}(k) + \lambda_3^r(k) e^{\tilde{k}\lambda_3(k)t} \tilde{\Psi}_{3j}(k) \Big) \tilde{\varphi}_{jk}. \tag{16}$$

Для оцінки абсолютної величини функцій u_k та їх похідних до третього порядку оцінимо зверху функції e_{1k}, e_{2k}, e_{3k} та $\tilde{\Psi}_1(k)$, $\tilde{\Psi}_2(k)$, ..., $\tilde{\Psi}_9(k)$.

Лема 1. *Для всіх великих за модулем чисел $k \in \mathbb{Z}$ справджуються нерівності*

$$|e_{lk}| \le 1/2, \qquad l = 1, 2, 3. \tag{17}$$

Доведення. Для оцінки зверху лівої частини нерівності (17) знайдемо спочатку вигляд коефіцієнтів многочлена $P_{k2} = P_{k2}(\Lambda)$, коренями якого будуть ненульові різниці $\Lambda_{ij}(k)$ з формул (12), де $i,j=1,2,3$, зокрема

$$P_{k2}(\Lambda)=\prod_{i,j=1,i\neq j}^{3}\big(\Lambda-\Lambda_{ij}(k)\big)=$$
$$=\big(\Lambda^2-\Lambda_{12}^2(k)\big)\big(\Lambda^2-\Lambda_{13}^2(k)\big)\big(\Lambda^2-\Lambda_{23}^2(k)\big)=F_k(\Lambda^2).$$

Для побудови многочлена P_{k2} використаємо наступну теорему [11, с. 237] про зв'язок між власними значеннями довільних матриць A, B та матриці $\varphi(A,B)=\sum_{i,j=0}^{p} c_{ij}A^i\otimes B^j$, яка побудована на базі многочлена $\varphi(\lambda,\mu)=\sum_{i,j=0}^{p} c_{ij}\lambda^i\mu^j$, де c_{ij} — комплексні числа, p — ціле число, за допомогою прямого добутку $\otimes$ степенів A^i та B^j матриць A і B.

Теорема 2. *Якщо $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ — власні значення матриці A порядку m та $\mu_1,\dots,\mu_n$ — власні значення матриці B порядку n, то власними значеннями матриці $\varphi(A,B)$ будуть mn чисел*

$$\varphi(\lambda_r,\mu_s)=\sum_{i,j=0}^{p} c_{ij}\lambda_r^i\mu_s^j,\quad r=1,\dots,m,\quad s=1,\dots,n.$$

Застосуємо цю теорему для випадку, коли n=3, p=1, A=B, де

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\tilde b_3(k) & -\tilde b_2(k) & -\tilde b_1(k)\end{pmatrix},$$

$$\varphi(\lambda,\mu)=\sum_{i+j=1}(-1)^j\lambda^i\mu^j=\lambda-\mu.$$

Отже, оскільки $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$, $\lambda_3(k)$ є власними значеннями матриці A, то власні значення $\Lambda_{ij}(k)$, $i,j=1,2,3$, матриці

$$\varphi(A,A)=A\otimes I_3-I_3\otimes A,$$

де I_3 — одинична матриця третього порядку, визначає формула $\Lambda_{ij}(k)=\varphi\big(\lambda_i(k),\lambda_j(k)\big)=\lambda_i(k)-\lambda_j(k)$.

Розписуючи блочну матрицю

$$\varphi(A,A)=\begin{pmatrix} 0 & I_3 & 0\\ 0 & 0 & I_3\\ -\tilde{b}_3(k)I_3 & -\tilde{b}_2(k)I_3 & -\tilde{b}_1(k)I_3\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & A\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} A & -I_3 & 0\\ 0 & A & -I_3\\ \tilde{b}_3(k)I_3 & \tilde{b}_2(k)I_3 & \tilde{b}_1(k)I_3+A\end{pmatrix},$$

поелементно, складемо характеристичне рівняння

$$\tilde{\Delta}(\Lambda)=\prod_{i,j=1}^{3}\big(\Lambda-\Lambda_{ij}(k)\big)=\Lambda^3F_k(\Lambda^2)=|\Lambda I_9-\varphi(A,A)|=0.$$

Звідси випливає, що

$$\tilde{\Delta}(\Lambda)=\Lambda^3P_{k1}(\Lambda^2)=\Lambda^9+\tilde{d}_1(k)\Lambda^7+\tilde{d}_2(k)\Lambda^5+\tilde{d}_3(k)\Lambda^3=0,$$

$$\tilde{d}_1(k)=6\tilde{b}_2(k)-2\tilde{b}_1(k)^2,$$
$$\tilde{d}_2(k)=9\tilde{b}_2(k)^2-6\tilde{b}_2(k)\tilde{b}_1(k)^2+\tilde{b}_1(k)^4,$$
$$\tilde{d}_3(k)=27\tilde{b}_3(k)^2+4\tilde{b}_2(k)^3-18\tilde{b}_1(k)\tilde{b}_2(k)\tilde{b}_3(k)-$$
$$-\tilde{b}_2(k)^2\tilde{b}_1(k)^2+4\tilde{b}_3(k)\tilde{b}_1(k)^3,$$

тобто

$$F_k(\Lambda^2)=\Lambda^6+\tilde{d}_1(k)\Lambda^4+\tilde{d}_2(k)\Lambda^2+\tilde{d}_3(k)=0.$$

Нехай $\Lambda^2=\mu$, тоді матимемо такий многочлен:

$$F_k(\mu)=\mu^3+\sum_{j=1}^{3}\tilde{d}_j(k)\mu^{3-j}=$$
$$=\big(\mu-\mu_1(k)\big)\big(\mu-\mu_2(k)\big)\big(\mu-\mu_3(k)\big),$$

$$\mu_j(k)=\big(\lambda_1(k)-\lambda_{j+1}(k)\big)^2,\ j=1,2,$$
$$\mu_3(k)=\big(\lambda_2(k)-\lambda_3(k)\big)^2.$$

Якщо $\bar{\mu}$ — комплексно-спряжене число до μ, то з рівності

$$2\operatorname{Re}\mu_l(k) = \mu_l(k) + \bar{\mu}_l(k) = \mu_l(k) - \big(-\bar{\mu}_l(k)\big)$$

і того, що $-\bar{\mu}_1(k)$, $-\bar{\mu}_2(k)$, $-\bar{\mu}_3(k)$ є коренями многочлена

$$F_{k1}(\mu) = \prod_{l=1}^{3}\big(\mu + \bar{\mu}_l(k)\big) = \mu^3 + \sum_{l=1}^{3}\bar{\tilde{d}}_l\mu^{3-l},$$

отримаємо, з одного боку, що $2\operatorname{Re}\mu_l(k)$ є множниками результанта

$$\tilde{R}(k) = \prod_{l,m=1}^{3}\big(\mu_l(k) + \bar{\mu}_m(k)\big) =$$

$$= 8\prod_{l=1}^{3}\operatorname{Re}\mu_l(k)\prod_{l,m=1,l\neq m}^{3}\big(\mu_l(k) + \bar{\mu}_m(k)\big)$$

многочленів F_k і F_{k1}. Тому для довільного $l = 1,2,3$ модуль даного результанта оцінюємо зверху за формулою (6):

$$|\tilde{R}(k)| \leq 2^{52}A_1^{34}|\operatorname{Re}\mu_l(k)|. \tag{18}$$

З другого боку, результант $\tilde{R}(k)$ є визначником матриці Сільвестра, складеної з коефіцієнтів $\tilde{d}_1(k), \tilde{d}_2(k), \tilde{d}_3(k)$ многочлена $F_k(\mu)$ і з коефіцієнтів $\bar{\tilde{d}}_1(k), \bar{\tilde{d}}_2(k), \bar{\tilde{d}}_3(k)$ многочлена $F_{k1}(\mu)$, зокрема

$$\tilde{R}(k) = \begin{vmatrix} 1 & \tilde{d}_1(k) & \tilde{d}_2(k) & \tilde{d}_3(k) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tilde{d}_1(k) & \tilde{d}_2(k) & \tilde{d}_3(k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \tilde{d}_1(k) & \tilde{d}_2(k) & \tilde{d}_3(k) \\ 1 & -\bar{\tilde{d}}_1(k) & \bar{\tilde{d}}_2(k) & -\bar{\tilde{d}}_3(k) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\bar{\tilde{d}}_1(k) & \bar{\tilde{d}}_2(k) & -\bar{\tilde{d}}_3(k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\bar{\tilde{d}}_1(k) & \bar{\tilde{d}}_2(k) & -\bar{\tilde{d}}_3(k) \end{vmatrix}.$$

Враховуючи формули для знаходження $\tilde{d}_1(k)$, $\tilde{d}_2(k)$, $\tilde{d}_3(k)$ і групуючи за степенями k, подамо для $k \neq 0$ результант у такому вигляді:

$$\tilde{R}(k) = -\Big(\frac{k}{\bar{\tilde{k}}}\Big)^{18}\Big(\tilde{R}_0 - \frac{i\tilde{R}_1}{k} - \frac{\tilde{R}_2}{k^2} + \\ + \frac{i\tilde{R}_3}{k^3} + \frac{\tilde{R}_4}{k^4} - \frac{i\tilde{R}_5}{k^5} - \ldots - \frac{\tilde{R}_{18}}{k^{18}}\Big),$$

де $\tilde{R}_0$ визначає формула

$$\tilde{R}_0 = \begin{vmatrix} 1 & \hat{d}_1 & \hat{d}_2 & \hat{d}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \hat{d}_1 & \hat{d}_2 & \hat{d}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \hat{d}_1 & \hat{d}_2 & \hat{d}_3 \\ 1 & -\bar{\hat{d}}_1 & \bar{\hat{d}}_2 & -\bar{\hat{d}}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\bar{\hat{d}}_1 & \bar{\hat{d}}_2 & -\bar{\hat{d}}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\bar{\hat{d}}_1 & \bar{\hat{d}}_2 & -\bar{\hat{d}}_3 \end{vmatrix},$$

в якій позначено вирази

$$\hat{d}_1 = 6a_{12} - 2a_{21}^2, \;\; \hat{d}_2 = 9a_{12}^2 - 6a_{12}a_{21}^2 + a_{21}^4, \\ \hat{d}_3 = 27a_{03}^2 + 4a_{12}^3 - 18a_{21}a_{12}a_{03} - a_{12}^2a_{21}^2 + 4a_{03}a_{21}^3.$$

У випадку $\tilde{R}_0 \neq 0$ з нерівності $\tilde{k}^2 \leq 2k^2$ і формули

$$\tilde{R}(k) = -\frac{\tilde{R}_0}{2}\Big(\frac{k}{\bar{\tilde{k}}}\Big)^{18}\Big(2 + \frac{2}{k\tilde{R}_0}\times \\ \times\Big(-i\tilde{R}_1 - \frac{\tilde{R}_2}{k} + \frac{i\tilde{R}_3}{k^2} + \ldots - \frac{\tilde{R}_{18}}{k^{17}}\Big)\Big)$$

для $k \neq 0$ маємо оцінку знизу

$$|\tilde{R}(k)| \geq \frac{|\tilde{R}_0|}{2}\Big|\frac{k}{\bar{\tilde{k}}}\Big|^{18} \geq 2^{-10}|\tilde{R}_0| \qquad (19)$$

при $k \in \mathbb{Z}$ і $|k| \geq \tilde{\tilde{R}}_0/|\tilde{R}_0|$, де $\tilde{\tilde{R}}_0 = 2\big(|\tilde{R}_1| + |\tilde{R}_2| + \ldots + |\tilde{R}_{18}|\big)$.

З формул (18) і (19) випливає, що

$$|\mathrm{Re}\,\mu_l(k)| \geq 2^{-52}A_1^{-34}|\tilde{R}(k)| \geq 2^{-62}A_1^{-34}|\tilde{R}_0|.$$

Отже, для $i \neq j$, де $i, j = 1, 2, 3$, і $\tilde{k} \to \infty$, маємо

$$\tilde{k}|\mathrm{Re}\,\Lambda_{ij}(k)| \geq \tilde{k}\sigma \to \infty, \quad \sigma = 2^{-31}A_1^{-17}\sqrt{|\tilde{R}_0|} > 0. \tag{20}$$

Очевидно, що $|e_{lk}| = e^{\tilde{k}\mathrm{Re}\,\Lambda_{i_l j_l}T/2} \leq e^{-\tilde{k}\sigma T/2} \leq 1/2$ у разі

$$\tilde{k} \geq 2^{32}\ln 2 A_1^{17}T^{-1}/\sqrt{|\tilde{R}_0|}, \quad l = 1, 2, 3,$$

де $\{i_l, j_l\} \subset \{1, 2, 3\}$. Лему доведено.

На основі леми маємо допоміжні оцінки

$$\begin{array}{lll} |\tilde{\Psi}_1(k)| \leq 4|e_{1k}||e_{2k}|, & |\tilde{\Psi}_4(k)| \leq 6|e_{1k}|, & |\tilde{\Psi}_7(k)| \leq 4, \\ |\tilde{\Psi}_2(k)| \leq 4|e_{3k}|, & |\tilde{\Psi}_5(k)| \leq 6/|e_{1k}|, & |\tilde{\Psi}_8(k)| \leq 4/|e_{1k}|, \\ |\tilde{\Psi}_3(k)| \leq 4, & |\tilde{\Psi}_6(k)| \leq 6/|e_{1k}|, & |\tilde{\Psi}_9(k)| \leq 4/|e_{1k}|. \end{array} \tag{21}$$

Для оцінювання правої частини у формулі (16) за великих $\tilde{k}$ розглянемо два випадки прямування до нескінченності: $k \to +\infty$ та $k \to -\infty$. У першому випадку ($k \to +\infty$) граничні значення $\tilde{b}_m^+$ послідовності коефіцієнтів $\tilde{b}_m(k)$, $m = 1, 2, 3$, будуть мати вигляд:

$$\tilde{b}_1^+ = ia_{21}, \quad \tilde{b}_2^+ = -a_{12}, \quad \tilde{b}_3^+ = -ia_{03},$$

а послідовність многочленів $P_k(\lambda)$ прямує до граничного многочлена

$$P^+(\lambda) = \lambda^3 + ia_{21}\lambda^2 - a_{12}\lambda - ia_{03} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3).$$

В другому випадку ($k \to -\infty$) граничні значення $\tilde{b}_m^-$ послідовності коефіцієнтів $\tilde{b}_m(k)$, $m = 1, 2, 3$, володіють властивостями

$$\tilde{b}_1^- = -\tilde{b}_1^+ = -ia_{21},\ \tilde{b}_2^- = \tilde{b}_2^+ = -a_{12},\ \tilde{b}_3^- = -\tilde{b}_3^+ = ia_{03},$$

тому послідовність многочленів $P_k(\lambda)$ прямує до іншого граничного многочлена

$$P^-(\lambda) = -P^+(-\lambda) = \lambda^3 - ia_{21}\lambda^2 - a_{12}\lambda + ia_{03}.$$

Введемо такі позначення: $\nu_j = \operatorname{Re}\lambda_j,\ j = 1, 2, 3,$

$$\hat{y}_1(t) = \big(t - T/2\big)\begin{cases}\nu_3,\ t \in [0, T/2]\\ \nu_2,\ t \in [T/2, T],\end{cases}$$
$$\hat{y}_3(t) = \big(t - T/2\big)\begin{cases}\nu_2,\ t \in [0, T/2]\\ \nu_1,\ t \in [T/2, T],\end{cases}$$
$$y(t) = \begin{cases}\hat{y}_1(t), t \in [0, T/2]\\ \hat{y}_3(t),\ t \in [T/2, T],\end{cases}$$
$$\hat{y}_2(t) = \nu_2\big(t - T/2\big),\quad y_1(t) = \nu_3 T/2 + \hat{y}_1(t),$$
$$y_2(t) = \hat{y}_2(t),\ y_3(t) = -\nu_1 T/2 + \hat{y}_3(t).$$

Тоді з формул (16), (21) для $\tilde{k} \geq 2^{32}\ln 2A_1^{17}T^{-1}/\sqrt{|\tilde{R}_0|}$ і $r = 0, 1, 2, 3$ маємо оцінки

$$\begin{gathered}\big|u_k^{(r)}A_1^{-l}e^{-\tilde{k}y(t)}\tilde{k}^{-l}\big|^2/12 \leq e^{2\tilde{k}(y_1(t)-y(t))}\big|2\varphi_{1k}\big|^2+\\ +e^{2\tilde{k}(y_2(t)-y(t))}\big|3\varphi_{2k}\big|^2 + e^{2\tilde{k}(y_3(t)-y(t))}\big|2\varphi_{3k}\big|^2 =\\ = e^{2\tilde{k}(\hat{y}_1(t)-y(t))}\big|2\varphi_{1k}e^{\tilde{k}\nu_3(k)T/2}\big|^2 + e^{2\tilde{k}(\hat{y}_2(t)-y(t))}\big|3\varphi_{2k}\big|^2+\\ +e^{2\tilde{k}(\hat{y}_3(t)-y(t))}\big|2\varphi_{3k}e^{-\tilde{k}\nu_1(k)T/2}\big|^2 \leq\\ \leq e^{2\tilde{k}(t-T/2)(\nu_3-\nu_3)}\big|2\varphi_{1k}e^{\tilde{k}\nu_3(k)T/2}\big|^2+\\ +e^{2\tilde{k}(t-T/2)(\nu_2-\nu_3)}\big|3\varphi_{2k}\big|^2+\\ +e^{2\tilde{k}(t-T/2)(\nu_2-\nu_3)}\big|2\varphi_{3k}e^{-\tilde{k}\nu_1(k)T/2}\big|^2,\end{gathered} \tag{22}$$

при $t \in [0, T/2]$, а при $t \in [T/2, T]$ — оцінки:

$$\begin{aligned}
\left|u_k^{(r)} A_1^{-l} e^{-\tilde{k}y(t)} \tilde{k}^{-l}\right|^2/12 \le e^{2\tilde{k}(y_1(t)-y(t))}\left|2\varphi_{1k}\right|^2+ \\
+e^{2\tilde{k}(y_2(t)-y(t))}\left|3\varphi_{2k}\right|^2 + e^{2\tilde{k}(y_3(t)-y(t))}\left|2\varphi_{3k}\right|^2 = \\
= e^{2\tilde{k}(\hat{y}_1(t)-y(t))}\left|2\varphi_{1k} e^{\tilde{k}\nu_3(k)T/2}\right|^2 + e^{2\tilde{k}(\hat{y}_2(t)-y(t))}\left|3\varphi_{2k}\right|^2+ \\
+e^{2\tilde{k}(\hat{y}_3(t)-y(t))}\left|2\varphi_{3k} e^{-\tilde{k}\nu_1(k)T/2}\right|^2 \le \\
\le e^{2\tilde{k}(t-T/2)(\nu_2-\nu_1)}\left|2\varphi_{1k} e^{\tilde{k}\nu_3(k)T/2}\right|^2+ \\
+e^{2\tilde{k}(t-T/2)(\nu_2-\nu_1)}\left|3\varphi_{2k}\right|^2+ \\
+e^{2\tilde{k}(t-T/2)(\nu_1-\nu_1)}\left|2\varphi_{3k} e^{-\tilde{k}\nu_1(k)T/2}\right|^2.
\end{aligned} \tag{23}$$

5. Достатні умови існування розв'язку задачі

Для коренів λ_j^+ і λ_j^- многочленів $P^{\pm}(\lambda)$ справджуються рівності

$$\lambda_1 = \lambda_1^+ = -\lambda_3^-, \quad \lambda_2 = \lambda_2^+ = -\lambda_2^-, \quad \lambda_3 = \lambda_3^+ = -\lambda_1^-,$$

причому їх дійсні частини ν_1, ν_2, ν_3 розташовані (стосовно уявної осі) одним з чотирьох можливих способів

$$1)\ \nu_1 < 0; \quad 2)\ \nu_2 < 0,\ \nu_1 > 0; \quad 3)\ \nu_2 > 0,\ \nu_3 < 0; \quad 4)\ \nu_3 > 0.$$

Зауваження 1. *Такого типу розміщення коренів щодо уявної осі використано, наприклад, у роботах* [12, 13] *для постановки коректних крайових задач для рівнянь з частинними похідними у півпросторі.*

Враховуючи нерівності (15), (20) отримаємо такі оцінки для всіх чотирьох випадків:

$$
\begin{array}{ll}
\quad 1)\ \nu_1<0 & \quad 2)\ \nu_2<0,\ \nu_1>0 \\
-A_1+2\sigma<\nu_1^+=-\nu_3^-<-C; & C<\nu_1^+=-\nu_3^-<A_1; \\
-A_1+\sigma<\nu_2^+=-\nu_2^-<-\sigma-C; & -A_1+\sigma<\nu_2^+=-\nu_2^-<-C; \\
-A_1<\nu_3^+=-\nu_1^-<-2\sigma-C; & -A_1<\nu_3^+=-\nu_1^-<-\sigma-C; \\
\quad 3)\ \nu_2>0,\ \nu_3<0 & \quad 4)\ \nu_3>0 \\
\sigma+C<\nu_1^+=-\nu_3^-<A_1; & 2\sigma+C<\nu_1^+=-\nu_3^-<A_1; \\
C<\nu_2^+=-\nu_2^-<A_1-\sigma; & \sigma+C<\nu_2^+=-\nu_2^-<A_1-\sigma; \\
-A_1<\nu_3^+=-\nu_1^-<-C; & C<\nu_3^+=-\nu_1^-<A_1-2\sigma,
\end{array}
\tag{24}
$$

де A_1, C, σ — величини з формул (6), (15), (20).

У відповідності з двома граничними многочленами $P^{\pm}(\lambda)$ подамо праві частини φ_j, $j=1,2,3$, умов (2) і розв'язок задачі (1), (2) у вигляді таких сум:

$$
\begin{aligned}
\varphi_j &= \varphi_j^0+\varphi_j^++\varphi_j^- = \Big(\sum_{k\in\mathbf{K}}+\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\mathbf{K}}+\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus(\mathbf{K}\cup\mathbb{N})}\Big)\varphi_k e^{ikx}, \\
u &= u^0+u^++u^- = \Big(\sum_{k\in\mathbf{K}}+\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\mathbf{K}}+\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus(\mathbf{K}\cup\mathbb{N})}\Big)u_k(t)e^{ikx}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Умови існування розв'язку задачі (1), (2) залежать від розташування щодо нуля дійсних частин коренів многочленів $P^{\pm}(\lambda)$, а з наступних двох умов випливає єдиність розв'язку:

$$D_0R_0\tilde{R}_0\neq 0, \tag{26}$$

$$\text{рівняння (11) не має розв'язків } (m,k)\in\mathbb{Z}\times\Big(-\frac{\tilde{\tilde{R}}_0}{|\tilde{R}_0|},\frac{\tilde{\tilde{R}}_0}{|\tilde{R}_0|}\Big). \tag{27}$$

Теорема 3. *Нехай* $\nu_1<0$, *виконуються умови* (26) *та* (27) *і* $\varphi_j^0\in\mathbf{W}$, $j=1,2,3$,

$$
\begin{array}{lll}
\varphi_1^+\in\mathbf{E}^q_{(-2\sigma-C)T/2}(\Omega), & \varphi_2^+\in\mathbf{E}^q_0(\Omega), & \varphi_3^+\in\mathbf{E}^q_{CT/2}(\Omega), \\
\varphi_1^-\in\mathbf{E}^q_{(A_1-2\sigma)T/2}(\Omega), & \varphi_2^-\in\mathbf{E}^q_0(\Omega), & \varphi_3^-\in\mathbf{E}^q_{-A_1T/2}(\Omega),
\end{array}
$$

тоді у просторі $\mathbf{E}^{3,q}_{\beta}(\mathcal{D})$*, де* $\beta=\beta(t)=\min(\beta^{+}(t),\beta^{-}(t))$*, функції* $\beta^{+}(t)$ *і* $\beta^{-}(t)$ *на відрізку* $[0,T/2]$ *визначають формули*

$$\beta^{+}(t)=A_1\bigl(T/2-t\bigr),\ \ \beta^{-}(t)=C\bigl(t-T/2\bigr),$$

а на відрізку $[T/2,T]$ *— формули*

$$\beta^{+}(t)=\bigl(A_1-2\sigma\bigr)\bigl(T/2-t\bigr),\ \ \beta^{-}(t)=\bigl(C+2\sigma\bigr)\bigl(t-T/2\bigr),$$

існує єдиний розв'язок задачі (1), (2)*. Цей розв'язок неперервно залежить від правих частин умов* (2) *і подається у вигляді суми* (25)*, причому*

$$u^0\in\mathbf{C}^3([0,T];W),\ \ u^{+}\in\mathbf{E}^{3,q}_{\beta^{+}}(\mathcal{D}),\ \ u^{-}\in\mathbf{E}^{3,q}_{\beta^{-}}(\mathcal{D}). \qquad (28)$$

Доведення. Якщо $k\in\mathbf{K}$, то за умовою (27) розв'язок u_k існує та належить до простору $\mathbf{C}^3[0,T]$.

Якщо ж $k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbf{K}$, то з умови (27) випливають оцінки (4.) і (4.) розв'язку u_k задачі (4), (5) при $t\in[0,T/2]$, $t\in[T/2,T]$ відповідно.

Отже, з формул (3.) і (24) випливають оцінки зверху доданків u^{+} та u^{-} розв'язку u задачі (1), (2) у відповідних просторах і неперервність від правих частин; існують додатні сталі $\bar C_1$, $\bar C_2$, і $\bar C_3$, що

$$\begin{gathered}\|u^{+}\|^2_{\mathbf{E}^{3,q}_{\beta^{+}}(\mathcal{D})}\le\sum_{l=0}^{3}\max\Bigl[\max_{[0,T/2]}\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\mathbf{K}}\bigl|u_k^{(l)}(t)\bigr|^2\tilde k^{2q-2l}\times\\ \times e^{2\tilde kA_1(t-T/2)},\max_{[T/2,T]}\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\mathbf{K}}\bigl|u_k^{(l)}(t)\bigr|^2\tilde k^{2q-2l}\times\\ \times e^{2\tilde k(A_1-2\sigma)(t-T/2)}\Bigr]\le\bar C_1\|\varphi_1^{+}\|^2_{\mathbf{E}^q_{(-2\sigma-C)T/2}(\Omega)}+\\ +\bar C_2\|\varphi_2^{+}\|^2_{\mathbf{E}^q_0(\Omega)}+\bar C_3\|\varphi_3^{+}\|^2_{\mathbf{E}^q_{CT/2}(\Omega)},\end{gathered}$$

$$\|u^-\|^2_{\mathbf{E}^{3,q}_{\beta^-}(\mathcal{D})} \leq \sum_{l=0}^{3} \max\Big[\max_{[0,T/2]} \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus(\mathbf{K}\cup\mathbb{N})} \big|u_k^{(l)}(t)\big|^2 \tilde{k}^{2q-2l}\times$$
$$\times e^{-2\tilde{k}C(t-T/2)}, \max_{[T/2,T]} \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus(\mathbf{K}\cup\mathbb{N})} \big|u_k^{(l)}(t)\big|^2 \tilde{k}^{2q-2l}\times$$
$$\times e^{-2\tilde{k}(2\sigma+C)(t-T/2)}\Big] \leq \tilde{C}_1\|\varphi_1^-\|^2_{\mathbf{E}^q_{(A_1-2\sigma)T/2}(\Omega)}+$$
$$+\tilde{C}_2\|\varphi_2^-\|^2_{\mathbf{E}^q_0(\Omega)} + \tilde{C}_3\|\varphi_3^-\|^2_{\mathbf{E}^q_{-A_1T/2}(\Omega)}.$$

Єдиність розв'язку задачі дають умови (26) і (27). Теорему доведено.

Зауваження 2. *Твердження теореми виконується, зокрема, коли* $\varphi_1 \in \mathbf{E}^q_{(A_1-2\sigma)T/2}(\Omega)$, $\varphi_2 \in \mathbf{E}^q_0(\Omega)$, $\varphi_3 \in \mathbf{E}^q_{CT/2}(\Omega)$.

Наступна теорема стосується другого випадку розміщення коренів.

Теорема 4. *Нехай* $\nu_2 < 0$, $\nu_1 > 0$, *виконуються умови* (26) *та* (27) *і* $\varphi_j^0 \in \mathbf{W}$, $j = 1,2,3$,

$$\begin{array}{lll} \varphi_1^+ \in \mathbf{E}^q_{(-\sigma-C)T/2}(\Omega), & \varphi_2^+ \in \mathbf{E}^q_0(\Omega), & \varphi_3^+ \in \mathbf{E}^q_{-A_1T/2}(\Omega), \\ \varphi_1^- \in \mathbf{E}^q_{-CT/2}(\Omega), & \varphi_2^- \in \mathbf{E}^q_0(\Omega), & \varphi_3^- \in \mathbf{E}^q_{-A_1T/2}(\Omega), \end{array}$$

тоді у просторі $\mathbf{E}^{3,q}_\beta(\mathcal{D})$, *де* $\beta = \beta(t) = \min(\beta^+(t), \beta^-(t))$, *функції* $\beta^+(t)$ *і* $\beta^-(t)$ *на відрізку* $[0,T/2]$ *визначає формула*

$$\beta^\pm(t) = A_1\big(T/2 - t\big),$$

а на відрізку $[T/2,T]$ *— формули*

$$\beta^+(t) = C\big(t - T/2\big), \;\; \beta^-(t) = \big(\sigma + C\big)\big(t - T/2\big),$$

існує єдиний розв'язок u задачі (1), (2). *Цей розв'язок неперервно залежить від правих частин умов* (2), *подається у вигляді суми* (25) *і має властивість* (28).

Теореми 3, 4 показують, що задача (1) і (2) за умови $\tilde{R}_0 \neq 0$ не має малих знаменників, тобто є коректною у вказаних наборах просторів, характеристичний визначник має оцінку:

$$|\Delta(k)| \geq e^{-\tilde{k}T\sigma/2}/8.$$

Зауваження 3. *Наступні теореми* 5 *і* 6 *про існування єдиного розв'язку задачі* (1), (2) *в інших випадках розташування дійсних частин коренів многочленів* $P^{\pm}(\lambda)$ *є симетричними щодо індексів* $^-$ *і* $^+$ *функцій* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *до теорем* 3 *і* 4, *а їх доведення, як і доведення теореми* 4 *аналогічне до доведення теореми* 3.

Теорема 5. *Нехай* $\nu_3 > 0$, *виконуються умови* (26) *та* (27) *і* $\varphi_j^0 \in \mathbf{W}$, $j = 1, 2, 3$,

$$\begin{array}{lll} \varphi_1^+ \in \mathbf{E}^q_{(A_1-2\sigma)T/2}(\Omega), & \varphi_2^+ \in \mathbf{E}^q_0(\Omega), & \varphi_3^+ \in \mathbf{E}^q_{-A_1T/2}(\Omega), \\ \varphi_1^- \in \mathbf{E}^q_{(-2\sigma-C)T/2}(\Omega), & \varphi_2^- \in \mathbf{E}^q_0(\Omega), & \varphi_3^- \in \mathbf{E}^q_{CT/2}(\Omega), \end{array}$$

тоді у просторі $\mathbf{E}^{3,q}_{\beta}(\mathcal{D})$, *де* $\beta = \beta(t) = \min(\beta^+(t), \beta^-(t))$, *функції* $\beta^+(t)$ *і* $\beta^-(t)$ *на відрізку* $[0, T/2]$ *визначають формули*

$$\beta^+(t) = C\big(t - T/2\big), \ \ \beta^-(t) = A_1\big(T/2 - t\big),$$

а на відрізку $[T/2, T]$ — *формули*

$$\beta^+(t) = \big(C + 2\sigma\big)\big(t - T/2\big), \ \ \beta^-(t) = \big(A_1 - 2\sigma\big)\big(T/2 - t\big),$$

існує єдиний розв'язок u задачі (1), (2). *Цей розв'язок неперервно залежить від правих частин умов* (2), *подається у вигляді суми* (25) *і має властивість* (28).

Теорема 6. *Нехай* $\nu_2 > 0$, $\nu_3 < 0$, *виконуються умови* (26) *та* (27) *і* $\varphi_j^0 \in \mathbf{W}$, $j = 1, 2, 3$,

$$\begin{array}{lll} \varphi_1^+ \in \mathbf{E}^q_{-CT/2}(\Omega), & \varphi_2^+ \in \mathbf{E}^q_0(\Omega), & \varphi_3^+ \in \mathbf{E}^q_{-A_1T/2}(\Omega), \\ \varphi_1^- \in \mathbf{E}^q_{(-\sigma-C)T/2}(\Omega), & \varphi_2^- \in \mathbf{E}^q_0(\Omega), & \varphi_3^- \in \mathbf{E}^q_{-A_1T/2}(\Omega), \end{array}$$

тоді у просторі $\mathbf{E}^{3,q}_{\beta}(\mathcal{D})$, *де* $\beta = \beta(t) = \min(\beta^+(t), \beta^-(t))$, *функції* $\beta^+(t)$ *і* $\beta^-(t)$ *на відрізку* $[0, T/2]$ *визначає формула*

$$\beta^{\pm}(t) = A_1\big(T/2 - t\big),$$

а на відрізку $[T/2, T]$ — *формули*

$$\beta^+(t) = \big(\sigma + C\big)\big(t - T/2\big), \ \ \beta^-(t) = C\big(t - T/2\big),$$

існує єдиний розв'язок и задачі (1), (2). *Цей розв'язок неперервно залежить від правих частин умов* (2), *подається у вигляді суми* (25) *і має властивість* (28).

6. Висновки

У роботі розглянуто триточкову задачу для однорідного диференціального рівняння з частинними похідними у плоскій області. Встановлено достатні умови існування та необхідні і достатні умови єдиності розв'язку задачі у просторі $\mathbf{E}^{3,q}_{\beta}(\mathcal{D})$. Подібна задача у випадку багатьох просторових змінних $x_1, x_2, \ldots, x_p$ є некоректною за Адамаром, а її розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку. Особливістю цієї роботи є те, що у ній доведено відсутність проблеми малих знаменників у разі двовимірної області, відповідні вирази оцінюються сталими; також встановлено залежність гладкості розв'язку задачі (1), (2) від часової змінної t.

Література

[1] *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. – 352 с.

[2] *Лучка А. Ю., Гарбель О. М.* Наближене розв'язання задачі Валле-Пуссена для звичайних диференціальних рівнянь проекційно-ітеративним методом // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 8. – С. 18–22.

[3] *Покорный Ю. В.* О вторых решениях нелинейной задачи Валле-Пуссена // Диф. уравн. – 1970. – **6**, № 9. – С. 1599–1605.

[4] *Скоробогатько В.Я.* Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. – К: Наук. думка, 1980. – 243 с.

[5] *Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Триточкова задача для хвильового рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1996. – **40**. – С. 78–86.

[6] *Нитребич З. М.* Крайова задача для неоднорідного гіперболічного рівняння із частинними похідними // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". – 1998. – **346**. – С. 35–39.

[7] *Пташник Б. И., Штабалюк П. И.* Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Диф. уравн. – 1986. – **23**, № 4. – С. 669–678.

[8] *Poschel J.* Spectral gaps of potentials in weighted Sobolev spaces // Hamiltonian Dynamical Systems and Applications. – 2008. – P. 421–430.

[9] *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

[10] *Ільків В. С., Страп Н. І., Волянська І. І.* Нелокальна крайова задача для рівняння з оператором диференціювання $z\partial/\partial z$ в комплексній області // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2012. – **10**. – С. 15–26.

[11] *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1973. – 280 с.

[12] *Дикополов Г. В., Шилов Г. Е.* О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1960. – **24**, № 3. – С. 369–380.

[13] *Паламадов В. П.* О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 3. – С. 381–386.