Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, т. 12, № 2, 65–73

УДК 517.956

О. О. Балюнов

(Чернігівський національний технологічний університет, Чернігів)

Про коливність розв'язків лінійних динамічних рівнянь на часових шкалах

abalyunov@gmail.com

The question of the oscillation of solutions of linear differential equations of the second order on the time scales is investigated. The theorems of the oscillation and comparison are prooved, which makes it possible to use the classic theorems of the differential equastions oscillation theory and apply them on the time scales.

Досліджується питання коливності розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку на часових шкалах. Доведені теореми про неколивність і порівняння, що дає можливість користуватись класичними теоремами з теорії коливності розв'язків диференціальних рівнянь і застосовувати їх для часових шкал.

1. Вступ

Побудова математичних моделей, що описують поведінку об'єктів як неперервних явищ, так і в дискретні моменти часу, базується на диференціальних (динамічних) рівняннях на часових шкалах.

Основи теорії рівнянь на часових шкалах викладені в роботі Стефана Хільгера [1], який ввів поняття похідної на часових шкалах.

Розвитку теорії коливності на часових шкалах присвячено багато робіт. Так, в роботі [2] вивчається коливність розв'язків лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами на часових шкалах. Питання осциляції розв'язків лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, а також деяких класів нелінійних рівнянь розглянуті у монографії [3]. Робота [4] присвячена широкому колу питань, пов'язаних із осциляцією розв'язків дискретних систем. В роботі [5] вивчалась коливність розв'язків нелінійних динамічних рівнянь першого порядку.

Однак, відзначимо, що в цитованих працях розглянуто питання коливності розв'язків на нескінченних інтервалах (аналог півосі). Виявилось, що там добре працюють методи, використані при отриманні аналогічних результатів для звичайних диференціальних рівнянь.

Зовсім інша ситуація має місце при вивченні коливності на скінченних проміжках. Тут класичні методи для звичайних диференціальних рівнянь не працюють. Причина полягає у відмінності поняття нуля розв'язку. Отриманню аналогів класичної теорії коливності Штурма і присвячена дана робота.

В даній роботі вивчається питання коливності розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку на часових шкалах. Доведені теореми про неколивність і порівняння для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку на часових шкалах, що дає можливість користуватися класичними теоремами з теорії коливності розв'язків диференціальних рівнянь і застосовувати їх для часових шкал.

2. Часові шкали

Приведемо деякі поняття та означення, пов'язані з часовими шкалами. Нехай $\mathbb{T}$ -часова шкала, тобто довільна непорожня замкнена підмножина в $\mathbb{R}^1$. Для кожної підмножини A із $\mathbb{R}^1$ ми позначатимемо $A_{\mathbb{T}} = A \bigcap \mathbb{T}$.

Для характеристики часових шкал вводяться два оператори оберненого і прямого стрибків - $\rho, \sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ відпоідно. Прямий оператор стрибка визначається як $\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$, а обернений $\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ для всіх $t \in \mathbb{T}$, де $\rho(\min \mathbb{T}) = \min \mathbb{T}$, коли $\mathbb{T}$ обмежена знизу і $\sigma(\max \mathbb{T}) = \max \mathbb{T}$, коли $\mathbb{T}$ обмежена зверху. Якщо $\sigma(t) > t$, то кажемо, що точка $t \in \mathbb{T}$ ізольована справа, якщо ж $\rho(t) < t$, то ізольована зліва. Точки, які є одночасно ізольованими справа і зліва, називаються ізольованими. Також, якщо $t < \max \mathbb{T}$ і $\sigma(t) = t$, то точка $t \in \mathbb{T}$ називається граничною справа, якщо ж $t > \min \mathbb{T}$ і $\rho(t) = t$, то називається граничною зліва. Функція дрібнення $\mu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^1_t$ визначнється як $\mu(t) = \sigma(t) - t$ для $t \in \mathbb{T}$.

Введемо тепер найважливіше поняття Δ -похідної на часовій шкалі. Позначимо через $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} \setminus \{\max \mathbb{T}\}$, якщо $\mathbb{T}$ має ізольовану точку зліва і $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ - в протилежному випадку.

Означення 1 ([2]) Функція $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^1$ Δ - диференційована у точці $t \in \mathbb{T}^k$, якщо існує скінченна границя

$$g^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t, s \in \mathbb{T}} \frac{g^{\sigma}(t) - g(s)}{\sigma(t) - s},$$

де $g^{\sigma} = g(\sigma(t)) = g \circ \sigma$.

Зазначимо, що якщо $t \in \mathbb{T}^k$ є правою граничною точкою, то g є Δ-диференційованою в t тоді і тільки тоді, коли границя $\frac{g(t)-g(s)}{t-s}$, $s \to t$, $s \in \mathbb{T}$ існує; в цьому випадку $g^{\Delta}(t)$ рівна даній границі. Якщо ж $t \in \mathbb{T}^k$ є правою ізольованою точкою, то g є Δ-диференційованою і $g^{\Delta}(t) = \frac{g(t)-g(s)}{\mu(t)}$ [3].

Якщо функції ϕ, $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^1$ є Δ - диференційованими в $t \in \mathbb{T}^k$, то їх добуток також є Δ - диференційованим і справедлива формула:

$$(\phi\dot{\psi})^{\Delta}(t) = \phi(t)\psi^{\Delta}(t) + \phi^{\Delta}(t)\psi(\sigma(t)) = \phi^{\Delta}(t)\psi(t) + \phi(\sigma(t))\psi^{\Delta}(t),$$

[2, теорема 1.20].

На часових шкалах, аналогічно випадку $\mathbb{T} \to \mathbb{R}^1$, будується інтеграл Рімана [3], який називається Δ - інтегралом Рімана. Він має всі ті властивості, що і звичайний інтеграл.

3. Постановка задачі

Будемо досліджувати коливність розв'язків динамічного рівняння другого порядку при $t \in [a,\, b]_{\mathbb{T}}$:

$$x^{\Delta\Delta}(t) + q(t)x^{\sigma}(t) = 0, \tag{1}$$

де $q \in C_{rd}([a,\, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$, тобто функція $q : [a,\, b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$- неперервна справа в граничних точках часової шкали $\mathbb{T}$, $x^{\Delta}(t)$ - дельта-похідна функції x в точці $t \in \mathbb{T}^k$.

Означення 2. Розв'язок $x(t)$ рівняння (1) має узагальнений нуль в $t \in [a,\, b]_{\mathbb{T}}$, якщо $x(t) = 0$, або якщо t є ізольованою зліва і $x(t)x(\rho(t)) < 0$.

Означення 3. Розв'язок $x(t)$ рівняння (1) називається коливним на інтервалі $[a,\, b]_{\mathbb{T}}$, якщо він має не менше двох узагальнених нулів на $[a,\, b]_{\mathbb{T}}$. Розв'язок, який має не більш як один узагальнений нуль на $[a,\, b]_{\mathbb{T}}$, називається неколивним.

В подальшому буде використано лему.

Лема (класична тотожність Пікона) [6]. Розглянемо два лінійні диференціальні рівняння

$$(p_1(t)x'(t))' + q_1(t)x(t) = 0; \quad (p_2(t)y'(t))' + q_2(t)y(t) = 0$$

Нехай $u(t)$ - розв'язок першого рівняння, а $v(t)$ - розв'язок другого рівняння. Тоді для всіх $v(t) \neq 0$ має місце наступна рівність:

$$\left(\frac{u}{v}(p_1u'v - p_2uv')\right)' = (q_2 - q_1)u^2 + (p_1 - p_2)u'^2 + p_2\left(u' - v'\frac{u}{v}\right)^2.$$

4. Основні результати

Теорема 1. *(про неколивність). Якщо $q(t) \le 0$ на $[a,\, b]_{\mathbb{T}}$, то всі нетривіальні розв'язки рівняння (1) неколивні на $[a,\, b]_{\mathbb{T}}$.*

Доведення. Скористаємося методом доведення від супротивного. Припустимо, що деякий розв'язок $x(t)$ рівряння (1) має принаймі два узагальнені нулі на $[a,\, b]_{\mathbb{T}}$. Нехай є два узагальнені нулі $\sigma(c)$, $\sigma(d)$ такі, що $a \le c \le \sigma(c) < d \le \sigma(d) \le b$ і на проміжку $(\sigma(c),\, \sigma(d))$ немає інших узагальнених нулів. Розглянемо можливі типи нулів в точках $\sigma(c)$ і $\sigma(d)$.

Випадок перший. Нехай $x(\sigma(c)) = 0$. Оскільки $x(t)$ є неперервною на $\mathbb{T}$, то вона зберігає знак на $(\sigma(c),\, \sigma(d))$. Можна вважати, що $x(t) > 0$ на $(\sigma(c),\, \sigma(d))$ (в противному випадку подальші міркування стосувалися б розв'язку $-x(t)$). Із цього припущення випливає, що $x^{\Delta}(\sigma(c)) > 0$. Справді, $x^{\Delta}(\sigma(c)) \neq 0$, бо $x^{\Delta}(t)$ — нетривіальний розв'язок, а випадок $x^{\Delta}(\sigma(c)) < 0$ неможливий з урахуванням додатності $x(t)$ на $(\sigma(c),\, \sigma(d))$. Оскільки за умовою теореми $q(t) \le 0$, то з рівняння (1) випливає, що $x^{\Delta\Delta}(t) \ge 0$, $\forall t \in [c,\, \rho(d)]$. Отже, $x^{\Delta}(t)$ зростаюча справа на $[c,\, \rho(d)]$, і тоді $x^{\Delta}(t) \ge x^{\Delta}(\sigma(c)) > 0$. Отримали суперечність.

Нехай точки d і $\sigma(d)$ ізольовані зліва, тобто $\rho(d) \neq d \neq \sigma(d)$, $x(d)x^{\sigma}(d) \le 0$, $x(d) > 0$, $x^{\sigma}(d) < 0$. Тоді $x^{\Delta}(d) = \frac{x^{\sigma}(d) - x(d)}{\mu(d)} < 0$, і $x^{\Delta\Delta}(\rho(d)) = \frac{x^{\Delta}(d) - x^{\Delta}(\rho(d))}{\mu(\rho(d))} < 0$. Але $x^{\Delta\Delta}(\rho(d)) < 0$. Дійшли до суперечності.

Нехай $\sigma(d)$ гранична зліва, а d ізольована зліва, тобто $d = \sigma(d)$, $d \neq \rho(d)$, $x(d) = 0$. Тоді $x^{\Delta}(\rho(d)) = \frac{x(d) - x(\rho(d))}{\mu(\rho(d))} < 0$, але $x^{\Delta}(t) > 0$ на $[c,\, \rho(d)]$. Дійшли до суперечності.

Нехай точки d і $\sigma(d)$ граничні зліва, тобто $\rho(d) = d = \sigma(d)$, $x(d) = 0$. Тоді з неперервності функції $x(t)$ і з того, що $x(t)$ є зростаючою справа, випливає, що $x(d) > 0$, що суперечить припущенню про те, що d є нулем розв'язку $x(t)$.

Випадок другий. Нехай $x(\sigma(c)) \neq 0$, тоді $x(c)x(\sigma(c)) < 0$. Припустимо, що $x(\sigma(c)) > x(c)$. Оскільки $x(t)$ є неперервною на $\mathbb{T}$, то вона зберігає знак на $(\sigma(c),\, \sigma(d))$. Можна вважати, що $x(t) > 0$ на $[\sigma(c),\, \sigma(d)]$ (в противному разі подальші міркування стосувалися б розв'язку $-x(t)$). Із цього припущення випливає, що $x^{\Delta}(c) > 0$. Справді, $x^{\Delta}(c) = \frac{x^{\sigma}(c) - x(c)}{\mu(c)} > 0$. Оскільки за умовою теореми $q(t) \leq 0$, то з рівняння (1) випливає, що $x^{\Delta\Delta}(t) \geq 0$, $\forall t \in [c, \rho(d)]$. Отже, $x^{\Delta}(t)$ зростаюча справа на $[c, \rho(d)]$, і тоді $x^{\Delta}(t) \geq x^{\Delta}(c) > 0$.

Подальші міркування аналогічні попередньому випадку і приводять до суперечності з припущенням про те, що $\sigma(d)$ є узагальненим нулем розв'язку $x(t)$ рівняння (1). Отже, при умові $q(t) \leq 0$ всі розв'язки рівняння (1) неколивні на $[a, b]$. Теорему доведено.

Розглянемо тепер два рівняння

$$x^{\Delta\Delta}(t) + q(t)x^{\sigma}(t) = 0, \tag{2}$$

$$y^{\Delta\Delta}(t) + Q(t)y^{\sigma}(t) = 0, \tag{3}$$

де $q(t),\ Q(t) \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Визначимо функцію $G : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ як

$$G(t) = \left(\frac{x(t)(x^{\Delta}(t)y(t) - x(t)y^{\Delta}(t))}{y(t)} \right)^{\Delta}.$$

Тоді

$$G(t) = \left(\frac{x(t)}{y(t)} \right)^{\Delta} (x^{\Delta}(t)y(t) - x(t)y^{\Delta}(t)) +$$
$$\frac{x^{\sigma}(t)}{y^{\sigma}(t)} (x^{\Delta}(t)y(t) - x(t)y^{\Delta}(t))^{\Delta} =$$
$$= \frac{(x^{\Delta}(t)y(t) - x(t)y^{\Delta}(t))^2}{y(t)y^{\sigma}(t)} + (x^{\sigma}(t))^2(Q(t) - q(t)).$$

Теорема 2. *(порівняння). Якщо на $[a, b]_{\mathbb{T}}$ виконується умова*

$$Q(t) \geq q(t), \tag{4}$$

то кожен відрізок, кінцями якого є нулі нетривіального розв'язку рівняння (2) містить принаймі один нуль будь-якого розв'язку рівняння (3).

Доведення. Нехай розв'язок рівняння (2) $x(t)$ має два узагальнені нулі на інтервалі $[a,\, b]_{\mathbb{T}}$ і нехай $y(t)$ - розв'язок рівняння (3). Припустимо, що $y(t)$ не має узагальнених нулів на $[a,\, b]_{\mathbb{T}}$. Нехай $x(t)$ має узагальнені нулі в точках $\sigma(c)$ і $\sigma(d)$, тобто $a \le \sigma(c) < d \le \sigma(d) \le b$ і $x(t) > 0$ для $t \in (c,\, d]$.

Для зручності введемо функцію $u : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ таку, що

$$u(t) = \begin{cases} 0, & a \le t \le c, \\ x(t), & c < t \le d, \\ 0, & d < t \le b. \end{cases}$$

Інтегруванням функції $G(t)$ з заміною функції $x(t)$ на $u(t)$ отримаємо

$$I = \int_a^b \left(\frac{u}{y}(u^{\Delta} y - u y^{\Delta}) \right)^{\Delta} (t)\, \Delta t.$$

Помітимо, що

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^{\sigma(c)} + \int_{\sigma(c)}^d + \int_d^{\sigma(d)} + \int_{\sigma(d)}^b .$$

Тоді

$$I = \mu(c)G(c) + \int_{\sigma(c)}^d G(t)\Delta t + \mu(d)G(d).$$

Розглянемо можливі типи точок c і d.

1) Точки c і d є граничними справа; тоді

$$I = \frac{u(d)}{y(d)}(u^{\Delta}(d)y(d) - u(d)y^{\Delta}(d)) -$$
$$- \frac{u(c)}{y(c)}(u^{\Delta}(c)y(c) - u(c)y^{\Delta}(c)) = 0$$

Отримали суперечність з тим, що за умовою (4) інтеграл має бути додатнім.

2) Точка c є граничною справа і точка d є ізольованою справа, тоді $x(d) > 0$, $x^\sigma(d) < 0$ і

$$I = \frac{u(d)}{y(d)}(u^\Delta(d)y(d) - u(d)y^\Delta(d)) +$$

$$+\mu(d)\left\{\left(\frac{u}{y}\right)^\Delta(d)[u^\Delta y - uy^\Delta](d) + \frac{u(\sigma(d))}{y(\sigma(d))}[u^\Delta y - uy^\Delta]^\Delta(d)\right\} =$$

$$= u(d)\Big\{\frac{u^\Delta(d)y(d) - u(d)y^\Delta(d)}{y(d)} -$$

$$-\frac{x(d)}{y(d)}(u^\Delta(d)y(d) - u(d)y^\Delta(d))\Big\} = 0$$

Знову прийшли до суперечності.

3)Точка c є ізольованою справа і точка d є граничною справа, тоді $x(c) < 0$, $x^\sigma(c) > 0$ і

$$I = -\frac{u(\sigma(c))}{y(\sigma(c))}[u^\Delta(\sigma(c))y(\sigma(c)) - u(\sigma(c))y^\Delta(\sigma(c))] +$$

$$+\mu(c)\left\{\left(\frac{u}{y}\right)^\Delta(c)[u^\Delta y - uy^\Delta]^\sigma(c) + \frac{u(c)}{y(c)}[u^\Delta y - uy^\Delta]^\Delta(c)\right\} =$$

$$= -\frac{u(\sigma(c))}{y(\sigma(c))}[u^\Delta(\sigma(c))y(\sigma(c)) - u(\sigma(c))y^\Delta(\sigma(c))] +$$

$$+\mu(c)\frac{x(\sigma(c))}{\mu(c)y(\sigma(c))}[u^\Delta y - uy^\Delta]^\sigma(c) =$$

$$= -\frac{x^\sigma(c)}{y^\sigma(c)}(u^\Delta y - uy^\Delta)^\sigma(c) + \frac{x^\sigma(c)}{y^\sigma(c)}(u^\Delta y - uy^\Delta)^\sigma(c) = 0,$$

що суперечить додатності інтеграла.

4)Точки c і d обидві ізольовані справа. Тоді $x^\sigma(c) > 0$, $x^\sigma(d) < 0$ і

$$I = \left(\frac{u}{y}(u^\Delta y - uy^\Delta)\right)(d) - \left(\frac{u}{y}(u^\Delta y - uy^\Delta)\right)(\sigma(c)) +$$

$$+\mu(c)\left[\left(\frac{u}{y}\right)^{\Delta}(c)[u^{\Delta}y-uy^{\Delta}]^{\sigma}(c)+\frac{u}{y}(c)[u^{\Delta}y-uy^{\Delta}]^{\Delta}(c)\right]+$$

$$+\mu(d)\left[\left(\frac{u}{y}\right)^{\Delta}(d)[u^{\Delta}y-uy^{\Delta}](d)+\left(\frac{u}{y}\right)^{\sigma}(d)[u^{\Delta}y-uy^{\Delta}]^{\Delta}(d)\right]=$$

$$=\left(\frac{u}{y}\right)(d)(u^{\Delta}y-uy^{\Delta})(d)-\left(\frac{u}{y}\right)^{\sigma}(c)(u^{\Delta}y-uy^{\Delta})(c)+$$

$$+\mu(c)\frac{x^{\sigma}(c)}{\mu(c)y^{\sigma}(c)}(u^{\Delta}y-uy^{\Delta})^{\sigma}(c)+\mu(d)\frac{-x(d)}{\mu(d)y(d)}(u^{\Delta}y-uy^{\Delta})(d)=$$

$$=\frac{x(d)}{y(d)}(u^{\Delta}y-uy^{\Delta})(d)-\frac{x^{\sigma}(c)}{y^{\sigma}(c)}(u^{\Delta}y-uy^{\Delta})^{\sigma}(c)+$$

$$+\frac{x^{\sigma}(c)}{y^{\sigma}(c)}(u^{\Delta}y-uy^{\Delta})^{\sigma}(c)-\frac{x(d)}{y(d)}(u^{\Delta}y-uy^{\Delta})(d)=0.$$

Отримали суперечність. Теорему доведено.

Література

[1] *Hihler S.* Ein Mabkettenkalkul mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten: PhD thesis, Universitat Wurzburg, 1988.

[2] *Agarwal R. P., Bohner M., O'Regan D., Peterson A.* Dynamic Equation on Time Scales: A survey // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2002. – **141**. – P. 1–26.

[3] *Agarwal R.P., Bohner M., Li W.-T.* Nonoscillation and Oscillation Theory for Functional Differential Equations. – New York: Marcel Dekker, 2004. – 376 p.

[4] *Agarwal R.P., Bohner M., Grace S.R., O'Regan D.* Discrete Oscillation Theory. – Hin-dawi Publishing Corporation, 2005. – 1000 p.

[5] *Agarwal R.P., Bohner M., Grace S.R.* Oscillition criteria for first-order forced nonlinear dynamic equations // Canada Applied Mathematics Quaterly. – 2007. – **15**. – P. 223–233.

[6] *Picone M.* Sui valori eccezional di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine. – Ann.Scuola Norm. Pisa. – 1909. – **11**. – P. 1–141.