Збірник праць Ін-ту математики НАН України   2015, т. 12, № 2, 39–64

УДК 517.956.223

А. В. Аноп, О. О. Мурач

(Інститут математики НАН України, Київ)

До теорії еліптичних крайових задач у просторах Хермандера

ahlv@ukr.net, murach@imath.kiev.ua

We prove a theorem on the Fredholm property of elliptic boundary-value problems in Hörmander inner-product spaces which can contain nonregular distributions.

Доведено теорему про нетеровість еліптичних крайових задач у гільбертових просторах Хермандера, які можуть містити нерегулярні розподіли.

1. Вступ

Недавно у роботах В. А. Михайлеця і О. О. Мурача [1–6] була побудована теорія розв'язності загальних еліптичних крайових задач у гільбертових просторах Л. Хермандера [7, п. 2.2], для яких показником регулярності служить довільна додатна радіальна функція, правильно змінна на нескінченності за Й. Караматою. Ці простори утворюють уточнену соболєвську шкалу і отримуються методом інтерполяцією з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Цей метод відіграє ключову роль у зазначеній теорії, оскільки при інтерполяції просторів успадковується не лише обмеженість, а й нетеровість лінійних операторів, що діють у цих просторах. Було доведено теореми про нетеровість еліптичних крайових задач на уточненій соболєвській шкалі, встановлено апріорні оцінки їх розв'язків, доведено теореми про глобальну і локальну регулярність розв'язків у просторах Хермандера. Можна сказати, що класична теорія загальних еліптичних крайових задач була перенесена (практично повністю) на уточнену соболєвську шкалу. Ці результати підсумовано у монографії [8] і оглядах [9, 10].

З огляду на це постало питання про дослідження характеру розв'язності еліптичних крайових задач у класі усіх гільбертових просторів, інтерполяційних щодо пар гільбертових просторів Соболєва. Цей клас — розширена соболєвська шкала — допускає конструктивний опис у термінах просторів Хермандера і є замкненим відносно вказаного методу інтерполяції [11]. Авторами цієї статті [12–16] було доведено теореми про нетеровість еліптичних крайових задач на розширеній соболєвській шкалі за умови, що відповідні простори Хермандера складаються з регулярних розподілів. Втім, з точки зору ряду застосувань, важливо мати теореми про розв'язність задач у просторах, які можуть містити і нерегулярні розподіли (див. [17–20]).

Мета цієї роботи — встановити одну теорему про нетеровість регулярних еліптичних крайових задач у просторах Хермандера, що утворюють повну розширену соболєвську шкалу і складаються із, взагалі кажучи, нерегулярних розподілів, які є розв'язком еліптичного диференціального рівняння з регулярною правою частиною. Теореми такого типу було уперше доведено Ж.-Л. Ліонсом і Е. Мадженесом [18, 21, 22, 23] для соболєвської шкали. Для уточненої шкали подібні теореми встановлено В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем у [8, 24]. Відмітимо, що у випадку розширеної соболєвської шкали виникають суттєві труднощі, пов'язані з тим, що простори Хермандера, приналежні цій шкалі, взагалі кажучи, не мають числового показника регулярності.

Робота складається з шести пунктів. Перший пункт — вступ.

У п. 2 розглянуто регулярну еліптичну крайову задачу та відповідні їй формулу Гріна і формально спряжену задачу. Пункт 3 присвячений просторам Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу. У п. 4 сформульовано основний результат роботи — теорему 1 про нетеровість оператора, який відповідає розглянутій задачі у підходящих парах просторів Хермандера, які можуть містити нерегулярні розподіли. Пункт 5 містить потрібні нам результати з теорії інтерполяції просторів. Там наведено означення методу інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторі і сформульовано важливі властивості цього методу. У п. 6 доведено основний результат статті.

2. Постановка задачі

Нехай Ω — довільна обмежена область у евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, де $n \geq 2$. Припустимо, що її межа $\Gamma := \partial\Omega$ є нескінченно гладким замкненим многовидом (тобто компактним і без краю) вимірності $n-1$. При цьому вважаємо, що C^∞-структура на Γ породжена простором $\mathbb{R}^n$.

В області Ω розглядаємо крайову задачу

$$Au(x) \equiv \sum_{|\mu| \leq 2q} a_\mu(x) D^\mu u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} B_j u(x) \equiv \sum_{|\mu| \leq m_j} b_{j,\mu}(x) D^\mu u(x) = g_j(x), \\ x \in \Gamma, \quad j = 1, \ldots, q. \end{gathered} \tag{2}$$

Тут A є лінійний диференціальний вираз довільного парного порядку $2q \geq 2$, заданий на $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$, а усі B_j є крайові лінійні диференціальні вирази довільних порядків $m_j \leq 2q - 1$, задані на Γ. Всі коефіцієнти диференціальних виразів A і B_j є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями: $a_\mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $b_{j,\mu} \in C^\infty(\Gamma)$. Взагалі, у роботі всі функції і розподіли вважаємо комплекснозначними. Покладемо $B := (B_1, \ldots, B_q)$.

У формулах (1), (2) використано стандартні позначення: $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — мультиіндекс з цілими невід'ємними компонентами, $|\mu| := \mu_1 + \ldots + \mu_n$, $D^\mu := D_1^{\mu_1} \ldots D_n^{\mu_n}$, $D_k := i\partial/\partial x_k$ при $k = 1, \ldots, n$, де i — уявна одиниця, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$ є довільна точка простору $\mathbb{R}^n$.

Ми припускаємо, що крайова задача (1), (2) є регулярною еліптичною в області Ω, тобто вираз A правильно еліптичний на $\overline{\Omega}$, а набір B крайових виразів нормальний і задовольняє умову накриття (або доповнювальності) щодо A на Γ (див., наприклад [18, розд. 2, п. 1.4] або [25, розд. 3, § 6, п. 2]). Нагадаємо, що згідно з умовою нормальності набору B, порядки m_j крайових диференціальних виразів B_j усі різні.

Ми досліджуємо властивості оператора $u \mapsto (Au, Bu)$ у підходящих парах функціональних просторів. Для опису області значень цього оператора нам знадобиться така формула Гріна:

$$(Au, v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (B_j u, C_j^+ v)_\Gamma = (u, A^+ v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (C_j u, B_j^+ v)_\Gamma$$

для будь-яких функцій $u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Тут

$$A^+ v(x) := \sum_{|\mu| \leq 2q} D^\mu (\overline{a_\mu(x)}\, v(x))$$

є лінійний диференціальний вираз, формально спряжений до A, а $\{B_j^+\}$, $\{C_j\}$, $\{C_j^+\}$ — деякі нормальні набори крайових лінійних диференціальних виразів з коефіцієнтами класу $C^\infty(\Gamma)$. Порядки цих виразів задовольняють умову

$$\operatorname{ord} B_j + \operatorname{ord} C_j^+ = \operatorname{ord} C_j + \operatorname{ord} B_j^+ = 2q - 1.$$

У формулі Гріна і далі через $(\cdot, \cdot)_\Omega$ і $(\cdot, \cdot)_\Gamma$ позначені скалярні добутки у просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ функцій, квадратично інтегровних на Ω і Γ відповідно, а також продовження за неперервністю цих скалярних добутків.

Крайова задача

$$A^{+}v(x) = \omega(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$B_j^{+}v(x) = h_j(x), \quad x \in \Gamma, \quad j = 1, \dots, q, \tag{4}$$

є формально спряженою до задачі (1), (2) відносно формули Гріна. Відмітимо, що крайова задача є регулярною еліптичною тоді і тільки тоді, коли формально спряжена до неї задача є регулярною еліптичною [18, розд. 2, п. 2.5].

Пов'яжемо із крайовими задачами (1), (2) і (3), (4) лінійні простори

$$N := \bigl\{u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) : \ Au = 0 \ \text{в} \ \Omega, \ \ Bu = 0 \ \text{на} \ \Gamma\bigr\},$$
$$N^{+} := \bigl\{v \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) : \ A^{+}v = 0 \ \text{в} \ \Omega, \ \ B^{+}v = 0 \ \text{на} \ \Gamma\bigr\};$$

тут $B^{+} := (B_1^{+}, \dots, B_q^{+})$. Оскільки ці задачі є регулярними еліптичними, простори N і N^{+} скінченновимірні [18, розд. 2, п. 5.2]. Відмітимо, що N^{+} не залежить від вибору спряженого набору B^{+} крайових виразів, які задовольняють формулу Гріна [18, розд. 2, п. 2.5].

3. Простори Хермандера і розширена соболєвська шкала

Ця шкала складається з гільбертових ізотропних просторів Хермандера H^{α}, для яких показником регулярності розподілів служить довільний функціональний параметр $\alpha \in \mathrm{RO}$. Наведемо означення класу RO і просторів H^{α}.

За означенням, клас RO складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\alpha : [1, \infty) \to (0, \infty)$, для кожної з яких існують числа $b > 1$ і $c \geq 1$ такі, що

$$c^{-1} \leq \frac{\alpha(\lambda t)}{\alpha(t)} \leq c \quad \text{для довільних} \quad t \geq 1, \ \ \lambda \in [1, b]$$

(сталі b і c можуть залежати від α). Такі функції називають RO (або OR)-змінними на нескінченності. Клас RO введений В. Г. Авакумовичем [26] у 1936 р. і достатньо вивчений (див. монографії [27, додаток 1] і [28, пп. 2.0 – 2.2]).

Цей клас припускає такий опис [27, с. 87]:

$$\alpha \in \mathrm{RO} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(t) = \exp\left(\beta(t) + \int\limits_1^t \frac{\gamma(\tau)}{\tau}\, d\tau\right) \text{ для } t \geq 1,$$

де функції $\beta, \gamma : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ вимірні за Борелем і обмежені.

Нам знадобиться така властивість класу RO [27, с. 88]. Для кожної функції $\alpha \in \mathrm{RO}$ існують числа $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leq s_1$, і $c_0, c_1 > 0$ такі, що

$$c_0 \lambda^{s_0} \leq \frac{\alpha(\lambda t)}{\alpha(t)} \leq c_1 \lambda^{s_1} \quad \text{для усіх} \quad t \geq 1, \ \ \lambda \geq 1. \tag{5}$$

Покладемо

$$\sigma_0(\alpha) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R} : \text{виконується ліва нерівність в (5)}\},$$
$$\sigma_1(\alpha) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R} : \text{виконується права нерівність в (5)}\};$$

тут $-\infty < \sigma_0(\alpha) \leq \sigma_1(\alpha) < \infty$. Числа $\sigma_0(\alpha)$ і $\sigma_1(\alpha)$ є відповідно нижнім і верхнім індексами Матушевської функції $\alpha \in \mathrm{RO}$ [29] (див. також [28, п. 2.1.2]).

Наведемо деякі приклади RO-змінних функцій.

Приклад 1. Нехай неперервна функція $\alpha : [1, \infty) \to (0, \infty)$ така, що

$$\alpha(t) := t^s (\ln t)^{r_1} (\ln \ln t)^{r_2} \ldots (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{k \text{ разів}} t)^{r_k} \quad \text{при} \quad t \gg 1.$$

Тут довільно вибрані параметри $k \in \mathbb{N}$ і $s, r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$. Тоді $\alpha \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\alpha) = \sigma_1(\alpha) = s$.

Приклад 2. Нехай $\theta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ і $r \in (0,1)$. Розглянемо функцію

$$\alpha(t) := \begin{cases} t^{\theta+\delta\sin(\ln\ln t)^r} & \text{при } t > e, \\ t^{\theta} & \text{при } 1 \leq t \leq e. \end{cases}$$

Вона належить до класу RO, причому $\sigma_0(\alpha) = \theta - \delta$ і $\sigma_1(\alpha) = \theta + \delta$.

Нехай $\alpha \in$ RO. Розглянемо спочатку простір H^{α} на $\mathbb{R}^n$, де $n \in \mathbb{N}$. За означенням, комплексний лінійний простір $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{w}$ локально інтегровне за Лебегом на $\mathbb{R}^n$ і задовольняє умову

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha^2(\langle\xi\rangle)\,|\widehat{w}(\xi)|^2\,d\xi < \infty.$$

Тут $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — лінійний топологічний простір Л. Шварца повільно зростаючих розподілів, заданих в $\mathbb{R}^n$, а $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ є згладжений модуль вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$. Нам зручно трактувати розподіли як *анти*лінійні функціонали на відповідному просторі основних функцій.

У просторі $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ означено скалярний добуток за формулою

$$(w_1, w_2)_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^2(\langle\xi\rangle)\,\widehat{w_1}(\xi)\,\overline{\widehat{w_2}(\xi)}\,d\xi,$$

де $w_1, w_2 \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Він задає на $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ структуру гільбертового простору і норму

$$\|w\|_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} := (w, w)^{1/2}_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)}.$$

Цей простір сепарабельний і неперервно вкладається у $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. У просторі $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ щільна множина $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^n$ функцій з компактним носієм.

Простір $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ є гільбертів ізотропний випадок просторів $\mathcal{B}_{p,k}$, введених і досліджених Л. Хермандером в [7, п. 2.2] (див також його монографію [30, п. 10.1]). А саме, $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_{p,k}$, якщо

$p = 2$ і $k(\xi) = \alpha(\langle\xi\rangle)$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$. Зауважимо, що у гільбертовому випадку $p = 2$ простори Хермандера збігаються з просторами, введеними і дослідженими Л. Р. Волевичем і Б. П. Панеяхом [31, § 2].

Якщо функція α степенева: $\alpha(t) \equiv t^s$, то $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) =: H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ є (гільбертів) простір Соболєва порядку $s \in \mathbb{R}$. Узагалі, якщо дійсні числа s_0 і s_1 задовольняють умови $s_0 < \sigma_0(\alpha)$ і $\sigma_1(\alpha) < s_1$, то

$$H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n),$$

причому обидва вкладення неперервні та щільні.

Згідно із [11], клас функціональних просторів

$$\bigl\{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) : \alpha \in \mathrm{RO}\bigr\} \tag{6}$$

називаємо розширеною соболєвською шкалою на $\mathbb{R}^n$. Він виділений і досліджений В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем в [32] (див. також їх монографію [8, п. 2.4.2] і статтю [33]).

Нам потрібні її аналоги для евклідової області Ω і замкненого компактного многовиду Γ. Ці аналоги будуються стандартним чином на основі класу (6) (див. [33, с. 139] і [8, с. 139]). Наведемо відповідні означення; тепер $n \geq 2$.

За означенням, комплексний лінійний простір $H^{\alpha}(\Omega)$ складається зі звужень на область Ω всіх розподілів $w \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Норма у ньому означена за формулою

$$\|v\|_{H^{\alpha}(\Omega)} := \inf\bigl\{\, \|w\|_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} :\, w \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n),\; w = v \ \text{в}\ \Omega \,\bigr\},$$

де $v \in H^{\alpha}(\Omega)$. Простір $H^{\alpha}(\Omega)$ гільбертів і сепарабельний відносно цієї норми, оскільки він є факторпростір простору $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ за підпростором

$$\bigl\{w \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) :\, \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega\bigr\}.$$

Простір $H^{\alpha}(\Omega)$ неперервно вкладається у лінійний топологічний простір $\mathcal{S}'(\Omega)$ звужень на область Ω усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна в $H^{\alpha}(\Omega)$.

Простір $H^{\alpha}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів на Γ, які в локальних координатах належать до $H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$. Дамо детальне означення. Нехай довільним чином вибрано скінченний атлас із C^{∞}-структури на многовиді Γ, утворений локальними картами $\pi_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \ldots, \varkappa$. Тут відкриті множини $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{\varkappa}$ складають покриття многовиду Γ. Нехай також функції $\chi_j \in C^{\infty}(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, \varkappa$, утворюють розбиття одиниці на Γ, яке задовольняє умову $\operatorname{supp} \chi_j \subset \Gamma_j$. Тоді, за означенням, комплексний лінійний простір $H^{\alpha}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів $h \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що $(\chi_j h) \circ \pi_j \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ для кожного $j \in \{1, \ldots, \varkappa\}$. Тут і далі $\mathcal{D}'(\Gamma)$ — лінійний топологічний простір усіх розподілів на Γ, а $(\chi_j h) \circ \pi_j$ є представлення розподілу h в локальній карті π_j. У просторі $H^{\alpha}(\Gamma)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(h_1, h_2)_{H^{\alpha}(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{\varkappa} ((\chi_j h_1) \circ \pi_j, (\chi_j\, h_2) \circ \pi_j)_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

де $h_1, h_2 \in H^{\alpha}(\Gamma)$. Цей простір гільбертів і сепарабельний та з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці [8, с. 139]. Простір $H^{\alpha}(\Gamma)$ неперервно вкладається у $\mathcal{D}'(\Gamma)$. Множина $C^{\infty}(\Gamma)$ щільна в $H^{\alpha}(\Gamma)$.

Означені функціональні простори утворюють розширені соболєвські шкали

$$\{H^{\alpha}(\Omega) : \alpha \in \mathrm{RO}\} \quad \text{і} \quad \{H^{\alpha}(\Gamma) : \alpha \in \mathrm{RO}\} \tag{7}$$

на Ω і Γ відповідно. Вони містять шкали гільбертових просторів Соболєва: якщо $\alpha(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, то $H^{\alpha}(\Omega) =: H^{(s)}(\Omega)$ і $H^{\alpha}(\Gamma) =: H^{(s)}(\Gamma)$ є простори Соболєва порядку s.

Відмітимо потрібні у подальшому властивості шкал (7), пов'язані з вкладеннями просторів.

Нехай $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{RO}$. Відношення функцій α_1/α_2 обмежене в околі нескінченності тоді і тільки тоді, коли $H^{\alpha_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{\alpha_1}(\Omega)$. Це вкладення неперервне і щільне. Воно компактне тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1(t)/\alpha_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Ця властивість зберігає силу, якщо в ній замінити Ω на Γ. Вона є прямим наслідком теорем 2.2.2 і 2.2.3 з монографії Л. Хермандера [7].

Окремим і важливим її випадком є така властивість

$$
\begin{gathered}
(s_0 < \sigma_0(\alpha),\ \sigma_1(\alpha) < s_1) \ \Rightarrow \\
\Rightarrow\ H^{(s_1)}(G) \hookrightarrow H^{\alpha}(G) \hookrightarrow H^{(s_0)}(G),
\end{gathered} \tag{8}
$$

де $\alpha \in \mathrm{RO}$ і $G \in \{\Omega, \Gamma\}$. Ці вкладення компактні та щільні.

4. Основний результат

Попередньо домовимося про таке. Ми будемо використовувати простори Хермандера $H^{\alpha}(G)$ із $G \in \{\Omega, \Gamma\}$, для яких показником регулярності служить функціональний параметр вигляду $\alpha(t) \equiv \varphi(t)t^{s}$, де $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $s \in \mathbb{R}$. Для того, щоб не писати аргумент t у верхньому індексі, який служить показником регулярності, будемо використовувати функціональний параметр $\varrho(t) := t$ аргументу $t \geq 1$. Отже, $H^{\alpha}(G) = H^{\varphi\varrho^{s}}(G)$. Звісно, якщо $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $s \in \mathbb{R}$, то $\varphi\varrho^{s} \in \mathrm{RO}$ та $\sigma_0(\varphi\varrho^{s}) = \sigma_0(\varphi) + s$ і $\sigma_1(\varphi\varrho^{s}) = \sigma_1(\varphi) + s$.

У статті [12, Теорема 1] нами доведено такий результат про характер розв'язності регулярної еліптичної крайової задачі (1), (2) у підходящих парах просторів Хермандера.

Твердження 1. *Нехай функціональний параметр $\varphi \in \mathrm{RO}$ такий, що $\sigma_0(\varphi) > -1/2$. Тоді відображення $u \mapsto (Au, Bu)$, де $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора*

$$
\begin{gathered}
(A, B) : H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega) \to H^{\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{\varphi\varrho^{2q-m_j-1/2}}(\Gamma) =: \\
=: \mathcal{H}^{\varphi}(\Omega, \Gamma).
\end{gathered} \tag{9}
$$

Цей оператор нетерів. Його ядро збігається з N*, а область значень складається з усіх векторів* $(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}^{\varphi}(\Omega, \Gamma)$ *таких, що*

$$(f, v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (g_j, C_j^+ v)_\Gamma = 0 \quad \textit{для кожного} \quad v \in N^+. \tag{10}$$

Індекс оператора (9) *дорівнює* $\dim N - \dim N^+$ *і не залежить від* φ.

Нагадаємо, що лінійний обмежений оператор $T : E_1 \to E_2$, де E_1 і E_2 — банахові простори, називають нетеровим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $E_2/T(E_1)$ скінченновимірні. Область значень $T(E_1)$ нетерового оператора T замкнена в E_2 (див., наприклад, [34, Лемма 19.1.1]). Його індекс означається за формулою

$$\operatorname{ind} T := \dim \ker T - \dim(E_2/T(E_1)).$$

Взагалі, твердження 1 не є істинним у випадку $\sigma_0(\varphi) \leq -1/2$. Зокрема, відображення $u \mapsto B_j u$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, не можна продовжити до неперервного оператора $B_j : H^{(s+2q)}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Gamma)$, якщо $s + 2q \leq m_j + 1/2$ (див. [18, Теорема 9.5]). Тому для того, щоб отримати версію твердження 1 у цьому випадку, треба брати вужчий за $H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega)$ простір як область визначення оператора (A, B). Ми використаємо простір усіх розподілів $u \in H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega)$ таких, що образ Au належить до деякого простору $H^\eta(\Omega)$ із $\eta \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\eta) \geq 0$. Дамо відповідні означення.

Нехай функціональні параметри $\varphi, \eta \in \mathrm{RO}$ такі, що функція φ/η обмежена в околі нескінченності. Покладемо

$$D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega) := \bigl\{u \in H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega) : \, Au \in H^\eta(\Omega)\bigr\}. \tag{11}$$

Тут і далі образ Au розуміємо у сенсі теорії розподілів на Ω. Означимо у лінійному просторі (11) скалярний добуток графіка за формулою

$$(u_1, u_2)_{D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)} := (u_1, u_2)_{H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega)} + (Au_1, Au_2)_{H^\eta(\Omega)}, \tag{12}$$

де $u_1, u_2 \in D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)$. Він породжує норму

$$\|u\|_{D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)} := \bigl(\|u\|^2_{H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega)} + \|Au\|^2_{H^{\eta}(\Omega)}\bigr)^{1/2}.$$

Відмітимо деякі властивості простору (11). Звісно, виконується неперервне вкладення

$$D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega) \hookrightarrow H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega).$$

Простір $D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)$ повний (тобто гільбертів) відносно введеного у ньому скалярного добутку (12). Справді, якщо (u_k) є фундаментальна послідовність у цьому просторі, то з огляду на повноту просторів $H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega)$ і $H^{\eta}(\Omega)$ існують такі границі: $u := \lim u_k$ в $H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\Omega)$ і $f := \lim Au_k$ в $H^{\eta}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\Omega)$ (вкладення неперервні). Оскільки диференціальний оператор A неперервний на просторі $\mathcal{S}'(\Omega)$, з першої границі випливає, що $Au = \lim Au_k$ в $\mathcal{S}'(\Omega)$. Звідси з огляду на другу границю дістаємо рівність $Au = f \in H^{\eta}(\Omega)$. Отже, $u \in D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)$ і $\lim u_k = u$ у просторі $D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)$, тобто цей простір повний.

Відмітимо, що навіть, коли усі коефіцієнти диференціального виразу A є сталими, простір $D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)$ суттєво залежить від кожного з них. Це випливає з результату Л. Хермандера [35, Теорема 3.1], якщо розглянути випадок $\varphi \equiv \eta \equiv 1$.

Сформулюємо тепер основний результат статті. Нехай довільно вибрано функціональний параметр $\varphi \in \mathrm{RO}$ такий, що $\sigma_0(\varphi) \leq -1/2$, і числа $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, які задовольняють умови $s_0 < \sigma_0(\varphi)$, $s_1 > \sigma_1(\varphi)$ і $s_1 \geq 0$. Покладемо

$$\eta(t) := t^{-s_0 s_1/(s_1 - s_0)} \varphi(t^{s_1/(s_1 - s_0)}) \quad \text{при} \quad t \geq 1. \tag{13}$$

Безпосередньо перевіряється, що $\eta \in \mathrm{RO}$ і

$$\sigma_j(\eta) = -\frac{s_0\, s_1}{s_1 - s_0} + \frac{s_1}{s_1 - s_0}\, \sigma_j(\varphi) \tag{14}$$

для кожного $j \in \{0, 1\}$. Зокрема, $\sigma_0(\eta) \geq 0$. Введемо гільбертів простір

$$\mathcal{H}^{\eta,\varphi}(\Omega, \Gamma) := H^{\eta}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{\varphi\varrho^{2q-m_j-1/2}}(\Gamma).$$

Теорема 1. *У зроблених припущеннях множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна у просторі $D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)$, а відображення $u \to (Au, Bu)$, де $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора*

$$(A, B) : D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega) \to \mathcal{H}^{\eta,\varphi}(\Omega, \Gamma). \tag{15}$$

Цей оператор нетерів. Його ядро збігається з N, а область значень складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}^{\eta,\varphi}(\Omega, \Gamma)$, які задовольняють умову (10). *Індекс оператора* (15) *дорівнює* $\dim N - \dim N^{+}$ *і не залежить від φ і η.*

Якщо $\sigma_1(\varphi) < 0$, то можна узяти $s_1 = 0$. Тоді $\eta(t) \equiv 1$ за формулою (13) і, отже, $H^{\eta}(\Omega) = L_2(\Omega)$. Тому у соболєвському випадку, коли $\varphi(t) \equiv t^s$, де $s < 0$ і

$$s + 2q \notin \{-1/2, -3/2, -5/2, \ldots\}, \tag{16}$$

теорема 1 збігається з теоремами Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [21, 22] (див. їх виклад у монографії [8, п. 4.4.1]). У більш загальному випадку, коли функція φ є правильно змінною за Й. Караматою на нескінченності порядку $s < -1/2$ за умови (16) теорема 1 міститься у результаті В. А. Михайлеця і О. О. Мурача [8, теорема 4.32]. Зауважимо, що індекси Матушевської цієї функції дорівнюють s.

5. Інтерполяція з функціональним параметром

Розширену соболєвську шкалу можна отримати методом інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Ця фундаментальна властивість зіграє ключову роль у доведенні теореми 1. У цьому зв'язку нагадаємо означення інтерполяції з функціональним параметром у випадку загальних гільбертових просторів та деякі її властивості. Цей метод інтерполяції був запропонований К. Фояшем і Ж.-Л. Ліонсом [36, с. 278]. Для наших цілей достатньо обмежитися сепарабельними просторами. Будемо слідувати викладу інтерполяції, наведеному в монографії [8, п. 1.1].

Нехай задано упорядковану пару $X := [X_0, X_1]$ сепарабельних комплексних гільбертових просторів X_0 і X_1 таку, що виконується неперервне і щільне вкладення $X_1 \hookrightarrow X_0$. Пару X називаємо припустимою. Існує самоспряжений додатно визначений оператор J у гільбертовому просторі X_0 з областю визначення X_1 такий, що J є ізометричним ізоморфізмом $J : X_1 \leftrightarrow X_0$. Оператор J визначається єдиним чином за парою X і називається породжуючим оператором для X.

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, які обмежені на кожному відрізку $[a, b]$ і відокремлені від нуля на кожному промені $[r, \infty)$, де $0 < a < b < \infty$ і $r > 0$.

Нехай $\psi \in \mathcal{B}$. Згідно зі спектральною теоремою, у гільбертовому просторі X_0 означений (взагалі кажучи, необмежений) оператор $\psi(J)$ як борелівська функція від самоспряженого оператора J. Позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$ або, коротше, через X_ψ область визначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком

$$(w_1, w_2)_{X_\psi} := (\psi(J)w_1, \psi(J)w_2)_{X_0}$$

і відповідною нормою $\|w\|_{X_\psi} = (w, w)^{1/2}_{X_\psi}$. Простір X_ψ гільбертів і сепарабельний. Виконується неперервне і щільне вкладення $X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Функцію $\psi \in \mathcal{B}$ називаємо інтерполяційним параметром, якщо для довільних припустимих пар $X = [X_0, X_1]$ і $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів та для будь-якого лінійного відображення T, заданого на X_0, виконується таке. Якщо при кожному $j \in \{0, 1\}$

звуження відображення T на простір X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$, то і звуження відображення T на простір X_ψ є обмеженим оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$. Тоді будемо казати, що простір X_ψ отриманий інтерполяцією з функціональним параметром ψ пари X.

Функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли вона псевдоугнута в околі нескінченності, тобто $\psi(t) \asymp \psi_1(t)$ при $t \gg 1$ для деякої додатної угнутої функції $\psi_1(t)$. (Тут $\psi \asymp \psi_1$ значить обмеженість обох відношень ψ/ψ_1 і ψ_1/ψ на вказаній множині). Це випливає з теореми Ж. Пітре [37, 38] про опис усіх інтерполяційних функцій додатного порядку (ця теорема викладена у монографії [39, с. 153]).

Сформулюємо згадану вище інтерполяційну властивість розширеної соболєвської шкали.

Твердження 2. *Нехай задано функцію $\alpha \in \mathrm{RO}$ і дійсні числа l_0, l_1 такі, що $l_0 < \sigma_0(\alpha)$ і $l_1 > \sigma_1(\alpha)$. Покладемо*

$$\psi(t) = \begin{cases} t^{-l_0/(l_1-l_0)}\, \alpha\big(t^{1/(l_1-l_0)}\big) & \textit{при} \quad t \ge 1, \\ \alpha(1) & \textit{при} \quad 0 < t < 1. \end{cases} \tag{17}$$

Тоді функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром і виконується така рівність просторів разом з еквівалентністю норм у них:

$$\big[H^{(l_0)}(G), H^{(l_1)}(G)\big]_\psi = H^\alpha(G),$$

де $G \in \{\mathbb{R}^n, \Omega, \Gamma\}$. Якщо $G = \mathbb{R}^n$, то буде навіть рівність норм у цих просторах.

Цей результат доведено в монографії [8, теореми 2.19 і 2.22] для $G \in \{\mathbb{R}^n, \Gamma\}$ і в статті [33, теорема 5.1] для $G = \Omega$.

Відмітимо також ще дві важливі інтерполяційні властивості розширеної соболєвської шкали $\{H^\alpha(G) : \alpha \in \mathrm{RO}\}$, де $G \in \{\mathbb{R}^n, \Omega, \Gamma\}$. Вона замкнена відносно розглянутого методу інтерполяції з функціональним параметром і збігається (з точністю до еквівалентності норм) з класом усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар соболєвських просторів $[H^{(s_0)}(G), H^{(s_1)}(G)]$, де $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ і $s_0 < s_1$ (див. [8, п. 2.4.2] та [33].) Останній факт випливає з фундаментальної теореми В. І. Овчинникова [40, с. 511] про опис усіх інтерполяційних гільбертових просторів для заданої пари гільбертових просторів. Нагадаємо, що властивість (гільбертового) простору H бути інтерполяційним для припустимої пари $X = [X_0, X_1]$ означає наступне: а) виконуються неперервні вкладення $X_1 \hookrightarrow H \hookrightarrow X_0$, б) будь-який лінійний оператор $T : X_0 \to X_0$, обмежений на кожному з просторів X_0 и X_1, є також обмеженим і на просторі H.

Наприкінці цього пункту наведемо три загальні властивості інтерполяції просторів, які будуть використані в доведенні основного результату статті. Сформулюємо їх стосовно розглянутого методу інтерполяції.

Перша з них говорить про те, що при інтерполяції успадковується нетеровість обмежених операторів (за певних умов).

Твердження 3. *Нехай $X = [X_0, X_1]$ і $Y = [Y_0, Y_1]$ є припустимі пари гільбертових просторів. Нехай, окрім того, на X_0 задане лінійне відображення T таке, що його звуження на простори X_j, де $j = 0, 1$, є обмеженими і нетеровими операторами $T : X_j \to Y_j$, які мають спільне ядро і однаковий індекс. Тоді для довільного інтерполяційного параметра $\psi \in \mathcal{B}$ обмежений оператор $T : X_\psi \to Y_\psi$ нетерів з тим же ядром і індексом, а його область значень дорівнює $Y_\psi \cap T(X_0)$.*

Друга властивість зводить інтерполяцію ортогональних сум гільбертових просторів до інтерполяції їх доданків.

Твердження 4. *Нехай задане скінченне число припустимих пар $[X_0^{(k)}, X_1^{(k)}]$ гільбертових просторів, де $k = 1, \ldots, p$. Тоді для довільного $\psi \in \mathcal{B}$ правильна рівність просторів*

$$\Bigl[\bigoplus_{k=1}^{p} X_0^{(k)}, \bigoplus_{k=1}^{p} X_1^{(k)}\Bigr]_\psi = \bigoplus_{k=1}^{p} \bigl[X_0^{(k)}, X_1^{(k)}\bigr]_\psi$$

разом із рівністю норм у них.

Доведення цих двох властивостей наведено, наприклад, в [8, п. 1.1.7, 1.1.5].

Третя властивість (досить громіздка за формулюванням) дає опис простору, який є результатом інтерполяції деяких підпросторів, пов'язаних з лінійним обмеженим оператором. Попередньо приймемо таке позначення.

Нехай H, Φ і Ψ є гільбертові простори, причому виконується неперервне вкладення $\Phi \hookrightarrow \Psi$. Нехай також задано лінійний обмежений оператор $T: H \to \Psi$. Покладемо

$$(H)_{T,\Phi} := \{u \in H : Tu \in \Phi\}.$$

У лінійному просторі $(H)_{T,\Phi}$ введений скалярний добуток графіка

$$(u_1, u_2)_{(H)_{T,\Phi}} := (u_1, u_2)_H + (Tu_1, Tu_2)_\Phi.$$

Цей простір гільбертів і не залежить від Ψ.

Твердження 5. *Нехай задано шість гільбертових просторів $X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1$ і три лінійних відображення T, R, S, які задовольняють такі умови:*

(i) *пари $X = [X_0, X_1]$ і $Y = [Y_0, Y_1]$ припустимі;*

(ii) *Z_0 і Z_1 є підпросторами деякого лінійного простору E;*

(iii) *виконуються неперервні вкладення $Y_j \hookrightarrow Z_j$ для кожного $j \in \{0, 1\}$;*

(iv) *відображення T означене на X_0 і задає обмежені оператори $T: X_j \to Z_j$ для кожного $j \in \{0, 1\}$;*

(v) *відображення R означене на E і задає обмежені оператори $R: Z_j \to X_j$ для кожного $j \in \{0, 1\}$;*

(vi) *відображення S означене на E і задає обмежені оператори $S: Z_j \to Y_j$ для кожного $j \in \{0, 1\}$;*

(vii) *виконується рівність $TR\omega = \omega + S\omega$ для довільного $\omega \in E$.*

Тоді пара просторів $[(X_0)_{T,Y_0},(X_1)_{T,Y_1}]$ *припустима і для довільного інтерполяційного параметра* $\psi\in\mathcal{B}$ *правильна така рівність просторів разом з еквівалентністю норм у них:*

$$[(X_0)_{T,Y_0},(X_1)_{T,Y_1}]_\psi=(X_\psi)_{T,Y_\psi}.$$

Аналог твердження 5 уперше з'явився у монографії Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [18, теорема 14.3], де він був доведений для голоморфної (комплексної) інтерполяції. Наведене твердження 5 встановлено в монографії [8, п. 3.3.2], причому запропоноване там доведення не використовує конструкцію методу інтерполяції, на відміну від [18].

6. Доведення основного результату

Доведемо основний результат статті — теорему 1. Нехай виконуються припущення, зроблені перед її формулюванням. Ми виведемо цю теорему методом інтерполяції з функціональним параметром, застосованим до гільбертових просторів Соболєва, у яких є обмеженим і нетеровим оператор (A,B). При цьому ми скористаємося класичною теоремою про нетеровість цього оператора у підходящих парах гільбертових просторів Соболєва додатного порядку (див., наприклад, [25, розд. 3, § 6, п. 4]) та однією теоремою Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [21, 22], яка охоплює випадок просторів Соболєва від'ємного порядку.

Згідно з класичною теоремою (вона міститься у твердженні 1) відображення $u\mapsto(Au,Bu)$, де $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$, продовжується за неперервністю до обмеженого і нетерового оператора

$$\begin{aligned}(A,B):H^{(s_1+2q)}(\Omega)\to\\ \to H^{(s_1)}(\Omega)\oplus\bigoplus_{j=1}^{q}H^{(s_1+2q-m_j-1/2)}(\Gamma)=:\mathcal{H}^{(s_1)}(\Omega,\Gamma).\end{aligned}\tag{18}$$

Його ядро збігається з N, а область значень складається з усіх векторів $(f,g_1,\dots,g_q)\in\mathcal{H}^{(s_1)}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють умову (10).

Індекс оператора (18) дорівнює $\dim N - \dim N^{+}$. Тут, нагадаємо, $s_1 \geq 0$.

Згідно з теоремою Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [21, 22] (див. також [8, теорема 4.27]), відображення $u \mapsto (Au, Bu)$, де $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується за неперервністю до обмеженого і нетерового оператора

$$\begin{gathered}(A,B): D_{A}^{(s_0+2q)}(\Omega) \to \\ \to L_2(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(s_0+2q-m_j-1/2)}(\Gamma) =: \mathcal{H}^{(0,s_0)}(\Omega,\Gamma).\end{gathered} \tag{19}$$

Тут, нагадаємо, $s_0 \leq -1/2$, а $D_{A}^{(s_0+2q)}(\Omega)$ позначає простір $D_{A,\beta}^{\alpha\varrho^{2q}}(\Omega)$ у випадку, коли $\alpha(t) \equiv t^{s_0}$ і $\beta(t) \equiv 1$. Множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна в просторі $D_{A}^{(s_0+2q)}(\Omega)$. У теоремі Ліонса–Мадженеса вимагається також, щоб параметр s_0 задовольняв умову (16). Тому ми припускаємо, що виконується (16) (потім позбудемося цього припущення). За цією теоремою, ядро оператора (19) збігається з N, а область значень складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}^{(0,s_0)}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють умову (10). Індекс оператора (19) дорівнює $\dim N - \dim N^{+}$.

Означимо інтерполяційний параметр ψ за формулою (17), де покладаємо $\alpha := \eta$, $l_0 := s_0$ та $l_1 := s_1$, і застосуємо інтерполяцію з параметром ψ до просторів, у яких діють обмежені і нетерові оператори (18) і (19). На підставі тверджень 3 і 4 отримаємо обмежений і нетерів оператор

$$\begin{gathered}(A,B):\ \bigl[D_{A}^{(s_0+2q)}(\Omega), H^{(s_1+2q)}(\Omega)\bigr]_{\psi} \to \\ \to \bigl[L_2(\Omega), H^{(s_1)}(\Omega)\bigr]_{\psi} \oplus \\ \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} \bigl[H^{(s_0+2q-m_j-1/2)}(\Gamma), H^{(s_1+2q-m_j-1/2)}(\Gamma)\bigr]_{\psi}.\end{gathered} \tag{20}$$

Він є звуженням оператора (19). Покажемо, що (20) є оператор (15) із формулювання теореми 1.

Для цього опишемо інтерполяційні простори, у яких діє оператор (20). На підставі твердження 2 запишемо:

$$\bigl[L_2(\Omega), H^{(s_1)}(\Omega)\bigr]_\psi = \bigl[H^{(0)}(\Omega), H^{(s_1)}(\Omega)\bigr]_\psi = H^\eta(\Omega). \tag{21}$$

Зробимо пояснення щодо застосування цього твердження. Якщо $s_1 > 0$, то $0 < \sigma_0(\eta)$ і $\sigma_1(\eta) < s_1$ з огляду на (14). Окрім того, функція ψ задовольняє рівність (17), якщо у ній $\alpha = \eta$, $l_0 = 0$ і $l_1 = s_1$. Тому друга рівність у формулі (21) є наслідком твердження 2. Якщо ж $s_1 = 0$, то ця рівність тривіальна, оскільки тоді $\eta(t) \equiv 1$.

Також на підставі твердження 2 маємо:

$$\begin{aligned}\bigl[H^{(s_0+2q-m_j-1/2)}(\Gamma), H^{(s_1+2q-m_j-1/2)}(\Gamma)\bigr]_\psi &= \\ = H^{\varphi\varrho^{2q-m_j-1/2}}(\Gamma).\end{aligned} \tag{22}$$

Тепер ми взяли в цьому твердженні

$$\alpha := \varphi\varrho^{2q-m_j-1/2}, \quad l_0 := s_0+2q-m_j-1/2, \quad l_1 := s_1+2q-m_j-1/2.$$

Для таких α, l_0 і l_1 функція ψ задовольняє рівність (17).

Залишається довести рівність

$$\bigl[D_A^{(s_0+2q)}(\Omega), H^{(s_1+2q)}(\Omega)\bigr]_\psi = D_{A,\eta}^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega). \tag{23}$$

Для цього скористаємося твердженням 5, у якому покладемо

$$\begin{gathered} X_0 := H^{(s_0+2q)}(\Omega), \quad X_1 := H^{(s_1+2q)}(\Omega), \\ Y_0 := L_2(\Omega) = H^{(0)}(\Omega), \quad Y_1 := H^{(s_1)}(\Omega), \\ E := Z_0 := H^{(s_0)}(\Omega), \quad Z_1 := H^{(s_1)}(\Omega), \quad T := A. \end{gathered}$$

Очевидно, що умови (i)–(iv) твердження (5) виконуються.

Нам також треба ввести деякі лінійні оператори R і S, які задовольняють умови (v)–(vii). Для цього ми скористаємося тим фактом, що відображення $u \mapsto A^p A^{p+} u + u$, де $p \in \mathbb{N}$, задає ізоморфізм

$$A^p A^{p+} + I : H_D^{(\sigma)}(\Omega) \leftrightarrow H^{(\sigma - 4qp)}(\Omega) \quad \text{для усіх} \quad \sigma \geq 2qp \qquad (24)$$

(див., наприклад, [8, Лемма 3.1]). Тут, звісно, A^p є p-ий степінь оператора A, тоді A^{p+} є формально спряжений оператор до диференціального оператора A^p, та I є тотожний оператор. Окрім того,

$$H_D^{(\sigma)}(\Omega) := \big\{ u \in H^{(\sigma)}(\Omega) :$$
$$\partial_\nu^{j-1} u = 0 \text{ на } \Gamma \text{ для кожного } j \in \{1, \ldots, 2qp\} \big\}$$

є підпростором у $H^\sigma(\Omega)$. Тут ∂_ν — оператор диференціювання уздовж внутрішньої нормалі до межі Γ.

Відображення, обернене до (24), задає обмежений лінійний оператор

$$(A^p A^{p+} + I)^{-1} : H^\sigma(\Omega) \to H^{\sigma + 4qp}(\Omega) \quad \text{для усіх} \quad \sigma \geq -2qp. \qquad (25)$$

Виберемо $p \in \mathbb{N}$ таке, що $s_0 \geq -2qp$, і покладемо

$$R := A^{p-1} A^{p+} (A^p A^{p+} + I)^{-1}, \quad S = -(A^p A^{p+} + I)^{-1}.$$

На підставі (25), отримаємо обмежені оператори

$$R : Z_0 = H^{(s_0)}(\Omega) \to H^{(s_0 + 2q)}(\Omega) = X_0,$$
$$R : Z_1 = H^{(s_1)}(\Omega) \to H^{(s_1 + 2q)}(\Omega) = X_1,$$
$$S : Z_0 = H^{(s_0)}(\Omega) \to H^{(s_0 + 4qp)}(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) = Y_0,$$
$$S : Z_1 = H^{(s_1)}(\Omega) \to H^{(s_1 + 4qp)}(\Omega) \hookrightarrow H^{(s_1)}(\Omega) = Y_1;$$

тут усі вкладення неперервні. Окрім того,

$$AR = AA^{p-1} A^{p+} (A^p A^{p+} + I)^{-1} =$$
$$= (A^p A^{p+} + I - I)(A^p A^{p+} + I)^{-1} = I + S$$

на $E = H^{(s_0)}(\Omega)$. Таким чином, решта умов (v)–(vii) твердження 5 задовольняються.

Відмітимо, що на підставі твердження 2

$$X_\psi = \big[H^{(s_0+2q)}(\Omega), H^{(s_1+2q)}(\Omega)\big]_\psi = H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega).$$

Окрім того, згідно з формулою (21)

$$Y_\psi = \big[L_2(\Omega), H^{(s_1)}(\Omega)\big]_\psi = H^{\eta}(\Omega).$$

Зауважимо також, що

$$(X_1)_{T,Y_1} = H^{(s_1+2q)}(\Omega),$$

оскільки є обмеженим оператор $A : H^{(s_1+2q)}(\Omega) \to H^{(s_1)}(\Omega)$. Усі ці рівності просторів виконуються з точності до еквівалентності норм. Тому на підставі твердження 5 маємо:

$$\begin{aligned}&\big[D_A^{(s_0+2q)}(\Omega), H^{(s_1+2q)}(\Omega)\big]_\psi = \\ &= [(X_0)_{T,Y_0}, (X_1)_{T,Y_1}]_\psi = (X_\psi)_{T,Y_\psi} = D_{A,\eta}^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega).\end{aligned} \tag{26}$$

Згідно з властивістю інтерполяції з функціональним параметром [8, теорема 1.1], виконується неперервне і щільне вкладення

$$H^{(s_1+2q)}(\Omega) \hookrightarrow D_{A,\eta}^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega).$$

Звідси випливає, що множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна у просторі $D_{A,\eta}^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega)$.

Тепер на підставі рівностей просторів (21), (22) і (26), які виконуються з еквівалентністю норм, робимо висновок про те, що обмежений і нетерів оператор (20) є оператором (15) з теореми 1. З огляду на твердження 3 ядро та індекс цього оператора збігаються відповідно із спільним ядром N та однаковим індексом $\dim N - \dim N^+$ операторів (18) і (19). Окрім того, на підставі цього ж твердження і теореми Ліонса–Мадженеса маємо:

$$\begin{aligned}&(A,B)\big(D_{A,\eta}^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega)\big) = \mathcal{H}^{\eta,\varphi}(\Omega,\Gamma) \cap (A,B)\big(D_A^{(s_0+2q)}(\Omega)\big) = \\ &= \big\{(f,g) \in \mathcal{H}^{\eta,\varphi}(\Omega,\Gamma) : \text{виконується (10)}\big\}.\end{aligned}$$

Тут скористалися вкладенням

$$\mathcal{H}^{\eta,\varphi}(\Omega,\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{H}^{(0,s_0)}(\Omega,\Gamma).$$

Таким чином, обгрунтовано усі властивості оператора (15), зазначені у теоремі 1.

Нагадаємо, що ми зробили додаткове припущення про те, що число s_0 задовольняє умову (16), яка фігурує у теоремі Ліонса–Мадженеса. Остання зберігає силу і у випадку, коли

$$s + 2q \in \{-1/2, -3/2, -5/2, \ldots\},$$

як стверджує щойно доведена теорема 1, у якій беремо $\varphi(t) \equiv t^s$, $s_0 = s - 1/2$ і $s_1 = 0$. Тому, повторивши у цьому випадку, наше доведення, встановимо теорему 1 у ситуації, коли s_0 не задовольняє умову (16).

Теорема 1 доведена.

Література

[1] Михайлец В. А., Мурач А. А. Эллиптические операторы в уточненной шкале функциональных пространств // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 5 – С. 689–696.

[2] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 3. — С. 352—370.

[3] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. III // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 5. — С. 679–701.

[4] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 11. — С. 1536—1555.

[5] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптический оператор с однородными регулярными граничными условиями в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. вісник. — 2006. — **3**, № 4. — С. 547—580.

[6] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптическая краевая задача в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 4. — С. 497—520.

[7] *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.

[8] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступно как arXiv:1106.3214.)

[9] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Elliptic problems and Hörmander spaces // Oper. Theory Adv. Appl. – 2009. – **191**. – P. 447–470.

[10] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. — 2012. — **6**, No. 2. — P. 211–281.

[11] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 368–380.

[12] *Аноп А. В., Мурач А. А.* Регулярные эллиптические краевые задачи в расширенной соболевской шкале // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 7. – С. 867–883.

[13] *Anop A. V., Murach A. A.* Parameter-elliptic problems and interpolation with a function parameter // Methods Funct. Anal. Topology. – 2014. – **20**, № 2. – P. 103–116.

[14] *Аноп А. В.* Загальна еліптична крайова задача в розширеній соболєвській шкалі // Доповіді НАН України. – 2014. – № 4. – С. 7–14.

[15] *Аноп А. В.* Еліптичні крайові задачі в многозв'язній області в розширеній соболєвській шкалі // Диференціальні рівняння та суміжні питання аналізу / Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – Т. 10, № 2. – С. 37–59.

[16] *Аноп А. В.* Еліптичні крайові задачі для систем диференціальних рівнянь у просторах узагальненої гладкості // Диференціальні рівняння та суміжні питання / Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – Т. 11, № 2. – С. 7–34.

[17] *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наукова думка, 1965. – 800 с.

[18] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – Москва: Мир, 1971. – 372 с.

[19] *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1996. — xii+415 p.

[20] *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci. Vol. 79. Partial differential equations, IX. — Berlin: Springer, 1997. — P. 1–144.

[21] *Lions J.-L., Magenes E.* Problémes aux limites non homogénes, V // Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa. – 1962. – **16**. – P. 1–44.

[22] *Lions J.-L., Magenes E.* Problémes aux limites non homogénes, VI // J. d'Analyse Math. – 1963. – **11**. – P. 165–188.

[23] *Мадженес Э.* Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных // Успехи мат. наук. – 1966. – **21**, № 2. – С. 169–218.

[24] Михайлец В. А., Мурач А. А. Индивидуальные теоремы о разрешимости эллиптических за-дач и пространства Хермандера // Доповіді НАН України. – 2011. – № 4. – С. 30–36.

[25] *Функциональный анализ* / Под общ. ред. С. Г. Крейна. – Москва: Наука, 1972. – 544 с.

[26] *Avakumović V. G.* O jednom O-inverznom stavu // Rad Jugoslovenske Akad. Znatn. Umjetnosti. – 1936. – **254**. – P. 167–186.

[27] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.

[28] *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 512 p.

[29] *Matuszewska W.* On a generalization of regularly increasing functions // Studia Math. – 1964. – **24**. – P. 271–279.

[30] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. – Москва: Мир, 1986. – 456 с.

[31] *Волевич Л.Р., Панеях Б.П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.

[32] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Интерполяционные пространства Хермандера и эллиптические операторы // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 205–226.

[33] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces // Results Math. – 2015. – **67**, No 1. – P. 135–152.

[34] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. – Москва: Мир, 1987. – 696 с.

[35] *Хермандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – Москва: Изд. иностр. лит., 1959. – 132 с.

[36] *Foiaş C., Lions J.-L.* Sur certains théorèmes d'interpolation // Acta Scient. Math. Szeged. – 1961. – **22**, No 3–4. – P. 269–282.

[37] *Peetre J.* On interpolation functions // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1966. – **27**. – P. 167–171.

[38] *Peetre J.* On interpolation functions. II // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1968. – **29**, No. 1–2. – P. 91–92.

[39] *Берг Й, Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение. – Москва: Мир, 1980. – 264 с.

[40] *Ovchinnikov V. I.* The methods of orbits in interpolation theory // Math. Rep. Ser. 1. – 1984. – No. 2. – P. 349–515.