

УДК 517.5

В. С. Шпаковский

(Институт математики НАН Украины, Киев)

shpakivskyi86@gmail.com

Гиперкомплексные функции и точные решения одного уравнения гидродинамики

Посвящается 70-летию профессора Юрия Борисовича Зелинского

Известно, что в некоторых коммутативных ассоциативных алгебрах экспоненциальная функция при определенном выборе базисных векторов алгебры является решением линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. В данной работе предложена процедура, позволяющая выписать все компоненты экспоненты в специальной коммутативной алгебре произвольной, наперед заданной размерности. Это позволяет находить решения одного уравнения гидродинамики третьего порядка.

It is known that in some commutative associative algebras the exponential function is a solution of linear partial differential equations with constant coefficients. In the present paper we propose a procedure allowing us to find all components of the exponent in a special N -dimensional commutative algebra, where N is an arbitrary fixed natural number. This allows us to construct solutions of one hydrodynamic equation of the third order.

1. Введение. Пусть \mathbb{A} — N -мерная коммутативная ассоциативная банахова алгебра над полем комплексных чисел \mathbb{C} и пусть e_1, e_2, \dots, e_n , где $n \leq N$, — набор линейно независимых векторов в

\mathbb{A} . Обозначим $\zeta := xe_1 + xe_2 + \dots + x_n e_n$, где $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ и определим в алгебре \mathbb{A} экспоненциальную функцию $\exp \zeta$ в виде суммы абсолютно сходящегося ряда

$$\exp \zeta := \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\zeta^r}{r!}. \quad (1)$$

Производная от функции $\Phi(\zeta) = \exp \zeta$ понимается как формальная производная ряда (1). Следовательно, $\frac{\partial}{\partial x_k} \exp \zeta = e_k \exp \zeta$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $k \in \{0, 1, 2, \dots\} =: \mathbb{Z}^+$. Набор $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_k \in \mathbb{Z}^+$, $k = 1, 2, \dots, n$, таков, что $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k$. Рассмотрим общее линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$E(u) := E_0(u) + E_1(u) + \dots + E_p(u) = 0, \quad (2)$$

где

$$E_k(u) := \sum_{\alpha: |\alpha|=k} C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^k \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Вследствие равенства

$$E(u) = (E_0^* + E_1^* + \dots + E_p^*) \exp \zeta,$$

где

$$E_k^* := \sum_{\alpha: |\alpha|=k} C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^k e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} \dots e_n^{\alpha_n},$$

функция $\exp \zeta$ удовлетворяет уравнению (2), если векторы e_1, e_2, \dots, e_n удовлетворяют характеристическому уравнению

$$E_0^* + E_1^* + \dots + E_p^* = 0. \quad (3)$$

Поскольку уравнение (2) линейное, то все комплекснозначные компоненты разложения функции $\exp \zeta$ по базису алгебры \mathbb{A} также являются его решениями.

Итак, имеем две задачи. Первая — описать все наборы векторов e_1, e_2, \dots, e_n , удовлетворяющие *характеристическому* уравнению (3), а вторая — описать все компоненты функции $\exp \zeta$. В конечномерной

алгебре разложение экспоненты $\exp \zeta$ по базису алгебры несложно выписать. Но, вместе с тем, понятно, что в конечномерной алгебре разложение экспоненты по базису алгебры имеет конечное количество компонент, а поэтому порождает конечное число решений дифференциального уравнения. В то время, как в бесконечномерной алгебре экспонента порождает бесконечное множество решений данного линейного дифференциального уравнения в частных производных. Но бесконечномерность алгебры существенно затрудняет нахождение компонент экспоненты.

В данной работе предложена процедура построения всех компонент экспоненты в специальной N -мерной алгебре для любого натурального N . Кроме того, приведенные выше две задачи полностью решены и применены для построения решений одного уравнения гидродинамики третьего порядка.

2. Модельное уравнение. Рассмотрим следующую систему уравнений гидродинамики в лагранжевых координатах

$$V_t(t, x) - u_x(t, x) = 0, \quad u_t(t, x) + p_x(t, x) = 0, \quad (4)$$

$$p(t, x) = a - bV(t, x) - \tau p_t(t, x), \quad a, b > 0, \quad (5)$$

где $V(t, x)$, $u(t, x)$, $p(t, x)$ — объем, скорость и давление, соответственно, τ — время релаксации, и приняты обозначения $V_t(t, x) := \partial V / \partial t$ и т. д. Уравнения (4) являются, соответственно, законами сохранения массы и импульса и имеют достаточно общий характер. Система уравнений движения (4) замыкается уравнением состояния среды (5), несущим информацию о конкретной модели гидродинамики, о свойствах среды.

Следует отметить, что динамическое уравнение состояния (5) является частным случаем модели Кельвина – Фойгта [1, с. 31] линейной вязкоупругой среды и используется при описании волновых процессов в грунтах и горных породах при малых нагрузках.

Уравнение состояния, подобное уравнению (5), рассматривалось также в работе [2], где изучались автомодельные решения одной общей системы уравнений гидродинамики.

Отметим, что система уравнений (4),(5) при достаточной дифференцируемости функций V , u , p сводится к уравнению

$$D[V](t, x) := V_{ttt}(t, x) + \alpha V_{tt}(t, x) - \beta V_{xx}(t, x) = 0, \quad (6)$$

где $\alpha := 1/\tau > 0$, $\beta := b/\tau > 0$.

В работе [3] с помощью коммутативной алгебры, изоморфной алгебре двойных чисел, описаны все полиномиальные и аналитические решения уравнения (6). В этой работе с помощью экспоненты в N -мерной коммутативной алгебре строится бесконечное множество решений уравнения (6) вида $V_n(t, x) = P_n(t, x)e^{at+bx}$, где P_n — полином степени n и $a, b \in \mathbb{C}$; приведены простейшие свойства этих решений.

3. Векторы e_1, e_2 . Пусть \mathbb{A}_{n+1} — $(n+1)$ -мерная коммутативная ассоциативная алгебра над полем комплексных чисел \mathbb{C} с базисом $\{1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^n\}$, где $\rho^{n+1} = 0$ и $n \geq 1$. При $n = 1$ получим *бигармоническую алгебру* (см., напр., [4–6]). Алгебра \mathbb{A}_3 — объект исследования работ [6–8]. При любом фиксированном $n \geq 3$ рассмотрена \mathbb{A}_n в [9].

В алгебре \mathbb{A}_{n+1} рассмотрим пару векторов

$$e_1 = \sum_{r=0}^n k_r \rho^r, \quad e_2 = \sum_{r=0}^n m_r \rho^r, \quad k_r, m_r \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

Пусть $\zeta := te_1 + xe_2$ при $t, x \in \mathbb{R}$. В силу равенства

$$D[\Phi](\zeta) = e_1^3 \Phi'''(\zeta) + \alpha e_1^2 \Phi''(\zeta) - \beta e_2^2 \Phi''(\zeta) = (e_1^3 + \alpha e_1^2 - \beta e_2^2) \exp \zeta,$$

функция $\Phi(\zeta) = \exp \zeta$ удовлетворяет уравнению (6), если векторы e_1, e_2 удовлетворяют соотношению

$$e_1^3 + \alpha e_1^2 - \beta e_2^2 = 0. \quad (8)$$

Произвольным образом зафиксируем натуральное n . В этом пункте опишем все пары векторов e_1, e_2 алгебры \mathbb{A}_{n+1} , удовлетворяющие соотношению (8).

Итак, из равенств (7) и таблицы умножения алгебры \mathbb{A}_{n+1} вытекают равенства

$$\begin{aligned} e_1^2 &= k_0^2 + k_1^2 \rho^2 + k_2^2 \rho^4 + \dots + k_{[n/2]}^2 \rho^{2[n/2]} + \\ &+ 2(k_0 k_1 \rho + k_0 k_2 \rho^2 + k_0 k_3 \rho^3 + \dots + k_0 k_n \rho^n) + \\ &+ 2(k_1 k_2 \rho^3 + k_1 k_3 \rho^4 + k_1 k_4 \rho^5 + \dots + k_1 k_{n-1} \rho^n) + \\ &+ 2(k_2 k_3 \rho^5 + k_2 k_4 \rho^6 + k_2 k_5 \rho^7 + \dots + k_2 k_{n-2} \rho^n) + \dots \\ &\dots + 2k_{[(n-1)/2]} k_{[(n-1)/2]+1} \rho^{2[(n-1)/2]+1}, \end{aligned}$$

где $[k]$ — целая часть числа k . Вводя обозначение $e_1^2 := \sum_{r=0}^n B_r \rho^r$, имеем

$$B_0 = k_0^2, \quad B_1 = 2k_0k_1, \quad B_2 = k_1^2 + 2k_0k_2, \quad (9)$$

и в общем случае

$$B_r(k_0, k_1, \dots, k_r) = \begin{cases} k_{r/2}^2 + 2(k_0k_r + k_1k_{r-1} + \dots + k_{\frac{r}{2}-1}k_{\frac{r}{2}+1}) & \text{при } r \text{ парном,} \\ 2(k_0k_r + k_1k_{r-1} + \dots + k_{\frac{r-1}{2}}k_{\frac{r+1}{2}}) & \text{при } r \text{ непарном.} \end{cases} \quad (10)$$

Обозначая $e_2^2 := \sum_{r=0}^n C_r \rho^r$, очевидно, что коэффициенты C_r определяются соотношениями

$$C_r(m_0, m_1, \dots, m_r) \equiv B_r(m_0, m_1, \dots, m_r). \quad (11)$$

Пусть $e_1^3 := \sum_{r=0}^n D_r \rho^r$. Из равенства

$$e_1^3 = e_1 e_1^2 = \sum_{r=0}^n k_r \rho^r \sum_{r=0}^n B_r \rho^r = \sum_{r=0}^n D_r \rho^r$$

вытекают равенства

$$D_0 = k_0^3, \quad D_1 = 3k_0^2k_1, \quad D_2 = k_0B_2 + k_1B_1 + k_3B_0, \quad (12)$$

и в общем случае

$$D_r = k_0B_r + k_1B_{r-1} + \dots + k_rB_0, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Таким образом, принимая во внимание все принятые обозначения, характеристическое уравнение (8) равносильно системе уравнений

$$D_r + \alpha B_r - \beta C_r = 0, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

При этом, при каждом $r = 0, 1, 2, \dots, n$ r -е уравнение системы (14) содержит $2(r+1)$ неизвестных — это $k_0, k_1, \dots, k_r, m_0, m_1, \dots, m_r$. То есть, система из $n+1$ уравнений содержит $2(n+1)$ неизвестных. Для определенности, будем считать k_r , при всех $r = 0, 1, 2, \dots, n$, произвольными комплексными числами и выразим через них все m_r . Для

этого отметим, что в уравнении (14) от m с разными индексами зависит только C_r . Более того, $C_r = C_r(m_0, m_1, \dots, m_r)$. Таким образом, из нулевого уравнения системы (14) мы можем найти m_0 , из первого уравнения системы (14) находим m_1 и т. д., из r -го уравнения системы (14) находим m_r .

Итак, из соотношений (10), (11), имеем

$$m_r = \begin{cases} \frac{1}{2m_0} \left(C_r - m_{r/2}^2 - 2(m_1 m_{r-1} + m_2 m_{r-2} + \dots + m_{\frac{r}{2}-1} m_{\frac{r}{2}+1}) \right) & \text{при } r \text{ парном,} \\ \frac{1}{2m_0} \left(C_r - 2(m_1 m_{r-1} + m_2 m_{r-2} + \dots + m_{\frac{r-1}{2}} m_{\frac{r+1}{2}}) \right) & \text{при } r \text{ непарном.} \end{cases}$$

Подставляя значение C_r из условия (14), получаем

$$m_r = \begin{cases} \frac{1}{2\beta m_0} \left(D_r + \alpha B_r - \beta \left(m_{\frac{r}{2}}^2 + 2m_1 m_{r-1} + 2m_2 m_{r-2} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + 2m_{\frac{r}{2}-1} m_{\frac{r}{2}+1} \right) \right) & \text{при } r \text{ парном,} \\ \frac{1}{2\beta m_0} \left(D_r + \alpha B_r - \beta \left(2m_1 m_{r-1} + 2m_2 m_{r-2} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + 2m_{\frac{r-1}{2}} m_{\frac{r+1}{2}} \right) \right) & \text{при } r \text{ непарном.} \end{cases} \quad (15)$$

Используя соотношения (9), (12), из равенства (14) выпишем начальные значения m_0, m_1 :

$$m_0 := \pm \sqrt{\frac{k_0^3 + \alpha k_0^2}{\beta}}, \quad m_1 := \frac{3k_0^2 k_1 + 2\alpha k_0 k_1}{2\beta m_0}. \quad (16)$$

Таким образом, равенства (15) и (16) позволяют рекуррентной процедурой выписать значение m_r при всех $r = 0, 1, 2, \dots, n$.

4. Разложение экспоненты. Известно (см., например, [10, с. 182]), что определение функции $\exp \zeta$ в виде суммы абсолютно сходящегося ряда (1) равносильно ее определению в виде главного продолжения голоморфной функции комплексной переменной e^z в алгебру \mathbb{A}_{n+1} :

$$\exp \zeta := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^z (z - \zeta)^{-1} dz, \quad (17)$$

где γ — спрямляемая кривая в комплексной плоскости, охватывающая точку $\xi_0 := k_0 t + m_0 x$.

Для того, чтобы выписать разложение экспоненты в алгебре \mathbb{A}_{n+1} по формуле (17) необходимо сначала получить разложение резольвенты $(z - \zeta)^{-1}$.

Лемма 1. *Разложение резольвенты имеет вид*

$$(z - \zeta)^{-1} = \sum_{r=0}^n a_r \rho^r \quad \forall z \in \mathbb{C} : z \neq k_0 t + m_0 x, \quad (18)$$

где коэффициенты a_r определяются следующими рекуррентными соотношениями

$$a_r = -\frac{1}{z - \xi_0} (\xi_r a_0 + \xi_{r-1} a_1 + \dots + \xi_1 a_{r-1}), \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

при

$$a_0 := \frac{1}{z - \xi_0} \quad \text{и} \quad \xi_s := k_s t + m_s x, \quad s = 0, 1, \dots, n.$$

Доказательство. Пусть $(z - \zeta)^{-1}$ имеет вид (18). Для определения коэффициентов a_r заметим, что элемент $z - \zeta$ в базисе алгебры $\{1, \rho, \dots, \rho^n\}$ представляется в виде

$$z - \zeta = (z - tk_0 - xm_0) - \sum_{r=1}^n (tk_r + xm_r) \rho^r = (z - \xi_0) - \sum_{r=1}^n \xi_r \rho^r.$$

Следствием равенства $(z - \zeta)(z - \zeta)^{-1} = 1$ являются равенства

$$(z - \xi_0)a_0 = 1, \quad (z - \xi_0)a_1 + \xi_1 a_0 = 0, \quad (z - \xi_0)a_2 + \xi_1 a_1 + \xi_2 a_0 = 0,$$

.....

$$(z - \xi_0)a_n + \xi_1 a_{n-1} + \xi_2 a_{n-2} + \dots + \xi_n a_0 = 0,$$

из которых вытекают соотношения (19). Лемма доказана.

Очевидно, что $a_r = a_r((z - \xi_0)^s, \xi_1, \dots, \xi_r)$, где $s = \{2, 3, \dots, r + 1\}$.

Введем некоторые определения. Пусть $\varphi(z - \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r)$ — произвольная комплексная функция от $(r + 1)$ комплексных переменных. Определим линейный оператор P , который каждой функции φ ставит в соответствие функцию от r переменных по правилу

$$P\varphi((z - \xi_0)^s, \xi_1, \dots, \xi_r) = \varphi((s - 1)!, \xi_1, \dots, \xi_r) \quad \forall s \in \{2, 3, \dots, r + 1\}.$$

Так, например,

$$P\left(-\frac{\xi_3}{(z - \xi_0)^2} + 2\frac{\xi_1 \xi_2}{(z - \xi_0)^3} - \frac{\xi_1^3}{(z - \xi_0)^4}\right) = -\xi_3 + \xi_1 \xi_2 - \frac{\xi_1^3}{3!}.$$

Теперь определим функции

$$A_0 := 1, \quad A_r(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) := P a_r((z - \xi_0)^s, \xi_1, \dots, \xi_r) \quad (20)$$

$$\forall s \in \{2, 3, \dots, r + 1\}, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\exp \zeta = e^{\xi_0} \sum_{r=0}^n A_r \rho^r, \quad (21)$$

где коэффициенты A_r определены рекуррентными соотношениями (20).

Доказательство. Пусть $\exp \zeta$ имеет вид (21). Определим коэффициенты A_r . Следствием соотношений (19) является равенства

$$a_r = \sum_{s=0}^r \frac{Q_{s,r}}{(z - \xi_0)^{s+1}}, \quad (22)$$

где $Q_{s,r} = Q_{s,r}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ — некоторые полиномы (ср. с леммой 1 [11]). Из определения (17), с использованием соотношений (18) и (22), имеем

$$\exp \zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^z (z - \zeta)^{-1} dz = \sum_{r=0}^n \rho^r \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{s=0}^r \frac{Q_{s,r} e^z}{(z - \xi_0)^{s+1}} dz =$$

$$= \sum_{r=0}^n \rho^r \sum_{s=0}^r \frac{Q_{s,r} e^{\xi_0}}{s!} = e^{\xi_0} \sum_{r=0}^n A_r \rho^r,$$

т. е.,

$$A_r = \sum_{s=0}^r \frac{Q_{s,r}}{s!}. \quad (23)$$

Сравнивая равенства (23) и (22), приходим к выводу, что A_r определяются соотношениями (20). Лемма доказана.

Замечание 1. С использованием представления (23) может быть доказано следующее рекуррентное соотношение

$$A_r = -\xi_r A_0 - \frac{r-1}{r} \xi_{r-1} A_1 - \frac{r-2}{r} \xi_{r-2} A_2 - \dots - \frac{1}{r} \xi_1 A_{r-1}.$$

Выпишем несколько первых членов разложения экспоненты:

$$\begin{aligned} \exp \zeta = e^{\xi_0} & \left[1 - \xi_1 \rho + \left(-\xi_2 + \frac{\xi_1^2}{2!} \right) \rho^2 + \left(-\xi_3 + \xi_1 \xi_2 - \frac{\xi_1^3}{3!} \right) \rho^3 + \right. \\ & + \left(-\xi_4 + \frac{2\xi_1 \xi_3 + \xi_2^2}{2!} - \frac{3\xi_1^2 \xi_2}{3!} + \frac{\xi_1^4}{4!} \right) \rho^4 + \\ & \left. + \left(-\xi_5 + \xi_1 \xi_4 + \xi_2 \xi_3 - \frac{\xi_1 \xi_2^2 + \xi_1^2 \xi_3}{2!} + \frac{\xi_1^3 \xi_2}{3!} - \frac{\xi_1^5}{5!} \right) \rho^5 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Поскольку функция $\exp \zeta$ удовлетворяет уравнению (6), то ее комплексные компоненты $V_r(t, x)$ разложения экспоненты по базису алгебры

$$\exp \zeta = \sum_{r=0}^n V_r(t, x) \rho^r \quad (24)$$

также удовлетворяет уравнению (6). Сформулируем это в следующем виде.

Теорема 1. Уравнению (6) удовлетворяют комплексные функции

$$V_r(t, x) = A_r(t, x) e^{\xi_0(t, x)} \quad \text{при всех } r = 0, 1, \dots, n, \quad (25)$$

где функции A_r определяются равенствами (20), при этом $\xi_r(t, x) := k_r t + m_r x$, $r = 0, 1, \dots, n$, где k_r — произвольные комплексные числа, а коэффициенты m_r определяются рекуррентными соотношениями (15) с начальными значениями (16).

Замечание 2. Для того, чтобы выписать решение V_p уравнения (6), необходимо выписать функции A_0, A_1, \dots, A_p , а для этого нужно иметь значения m_0, m_1, \dots, m_p . Для последнего, очевидно, нужно преодолеть три шага: 1) по явным формулам (10) выписать B_0, B_1, \dots, B_p ; 2) по явным формулам (13) выписать D_0, D_1, \dots, D_p ; 3) по рекуррентным соотношениям (15) выписать значения m_0, m_1, \dots, m_p .

Имея значения m_0, m_1, m_2 , можем выписать первые три комплексные решения уравнения (6). Таким образом, имеем

$$V_0(t, x) = \exp \left(k_0 t \pm x \sqrt{\frac{k_0^3 + \alpha k_0^2}{\beta}} \right), \quad (26)$$

$$V_1(t, x) = \left(tk_1 \pm x \frac{3k_0 k_1 + 2\alpha k_1}{2\sqrt{\beta(k_0 + \alpha)}} \right) \exp \left(k_0 t \pm x \sqrt{\frac{k_0^3 + \alpha k_0^2}{\beta}} \right),$$

$$V_2(t, x) = \left[tk_2 \pm x \frac{3k_1^2 k_0 + 4\alpha k_1^2 + 20\alpha k_0 k_2 + 12k_0^2 k_2 + 8\alpha^2 k_2}{8\sqrt{\beta}(k_0 + \alpha)^{3/2}} + \frac{1}{2} \left(tk_1 \pm x \frac{3k_0 k_1 + 2\alpha k_1}{2\sqrt{\beta}(k_0 + \alpha)}} \right)^2 \right] \exp \left(k_0 t \pm x \sqrt{\frac{k_0^3 + \alpha k_0^2}{\beta}} \right),$$

где среди знаков \pm выбираются одновременно либо верхние либо нижние знаки, а k_0, k_1, k_2 — произвольные комплексные числа.

Увеличивая n , можно выписать сколь угодно много точных решений уравнения (6).

Замечание 3. Выделяя в комплексном решении V_r действительную и мнимую части, получаем два действительных решения вида $V_{r,1} = U_r(t, x)e^{\lambda(t,x)} \cos \mu(t, x)$ та $V_{r,2} = R_r(t, x)e^{\lambda(t,x)} \sin \mu(t, x)$, где U_r, R_r — некоторые полиномы степени r , а $\lambda(t, x) := \operatorname{Re} \xi_0$, $\mu(t, x) := \operatorname{Im} \xi_0$.

Замечание 4. Формула (21) позволяет получить бесконечное множество точных решений уравнения (2). Для этого лишь нужно в алгебре \mathbb{A}_{n+1} выписать векторы e_1, e_2, \dots, e_n , удовлетворяющие характеристическому уравнению (3). Подобного рода замечание сделано в монографии [13, с. 189–190]. Кроме того, отметим работу [14], где экспонента использовалась в разных конечномерных алгебрах для построения

решений соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных.

5. Свойства решений. Одним из традиционных методов решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных является метод разделения переменных или метод Фурье, согласно которому решение уравнения (6) ищем в виде

$$V_F(t, x) = W(t)R(x). \quad (27)$$

Подставляя выражение (27) в (6), приходим к системе уравнений

$$\frac{W'''(t) + \alpha W''(t)}{\beta W(t)} = \frac{R''(x)}{R(x)} = \lambda^2,$$

где λ — некоторая комплексная постоянная. Таким образом, приходим к общему решению вида (27):

$$V_F(t, x) = \sum_{s=1}^3 b_s e^{\mu_s t} (d_1 e^{\lambda x} + d_2 e^{-\lambda x}), \quad (28)$$

где b_s, d_r — произвольные комплексные постоянные, а μ_s — корни уравнения

$$\mu^3 + \alpha\mu^2 - \beta\lambda^2 = 0. \quad (29)$$

В следующей теореме устанавливается связь между решениями вида (25), полученными гиперкомплексным методом, и решением вида (28).

Теорема 2. *Решение уравнения (6), порожденное функцией (26), совпадает с решением $V_F(t, x)$.*

Доказательство. Вводя обозначение $\sqrt{\frac{k_0^3 + \alpha k_0^2}{\beta}} = \lambda$, получаем $V_0(t, x) = e^{k_0 t \pm \lambda x}$, где λ и k_0 связаны соотношением

$$k_0^3 + \alpha k_0^2 - \beta\lambda^2 = 0. \quad (30)$$

Поскольку уравнение (6) линейное, то функция $V_0(t, x)$ порождает следующее его решение

$$\tilde{V}_0(t, x) = \sum_{s=1}^3 b_s e^{k_{0,s} t} (d_1 e^{\lambda x} + d_2 e^{-\lambda x}),$$

где $k_{0,s}$, $s = 1, 2, 3$, — корни уравнения (30). Очевидно, что $\tilde{V}_0(t, x) \equiv V_F(t, x)$ при $k_{0,s} = \mu_s$. Теорема доказана.

То есть, лишь нулевое решение $V_0(t, x)$ по существу совпадает с решением, полученным методом Фурье, а все остальные решения вида (25) имеют более общий вид.

Теорема 3. Для решений (25) уравнения (6) справедливы равенства

$$\sum_{r+s=n} \int_{\gamma} V_r(t, x) (k_s dt + m_s dx) = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots, \quad (31)$$

где γ — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая на плоскости tOx , k_s — произвольные комплексные числа, а m_s — определены равенствами (15), при $s = 1, 2, 3$.

Доказательство. Согласно аналогу теоремы Коши (см. Теорему 3 работы [12]), справедливо равенство $\int_{\gamma} e^{\zeta} d\zeta = 0$. Учитывая обозначения (7) и (24), получаем равенства

$$\int_{\gamma} e^{\zeta} d\zeta = \int_{\gamma} \sum_{r=0}^n V_r(t, x) \rho^r \sum_{s=0}^n d\xi_s \rho^s = \int_{\gamma} \sum_{0 \leq r+s \leq n} V_r(t, x) d\xi_s \rho^{r+s} = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при ρ^{r+s} , получаем равенство (31). Теорема доказана.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U001528).

Список литературы

- [1] Ляхов Г. М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 288 с.
- [2] Danylenko V. A., Sorokina V. V., Vladimirov V. A. On the governing equations in relaxing media models and self-similar quasiperiodic solutions // J. Phys. A: Math. Gen. — 1993. — **26**. — P. 7125 – 7135.
- [3] Шпаковский В. С. Гиперкомплексное представление аналитических решений одного уравнения гидродинамики // Труды ИПММ НАН Украины. — 2017 (подана к печати).

- [4] Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П. Бигармонические функции на бигармонической плоскости // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1981. — № 8. — С. 25 — 27.
- [5] Грицик С. В., Плакса С. А. Моногенные функции в бигармонической алгебре // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 12. — С. 1587–1596.
- [6] Plaksa S. A. Commutative algebras associated with classic equations of mathematical physics // Advances in Applied Analysis, Trends in Mathematics. — Basel: Springer, 2012. — P. 177 – 223.
- [7] Мельниченко И. П., Плакса С. А. Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2008. — 230 с.
- [8] Plaksa S. A. and Shpakovskii V. S. Constructive description of monogenic functions in a harmonic algebra of the third rank // Ukr. Math. J. — 2011. — **62**, No. 8. — P. 1251 – 1266.
- [9] Plaksa S. A., Shpakivskiy V. S. Monogenic functions in a finite-dimensional algebra with unit and radical of maximal dimensionality // J. Algerian Math. Soc. — 2014. — **1**. — P. 1 – 13.
- [10] Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 829 с.
- [11] Shpakivskiy V. S. Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. — 2015. — **12**, No. 3. — P. 251 – 268.
- [12] Shpakivskiy V. S. Integral theorems for monogenic functions in commutative algebras // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. — 2015. — **12**, No. 4. — P. 313 – 328.
- [13] Roşculeţ M. N. Funcţii monogene pe algebre comutative. — Bucureşti, Acad. Rep. Soc. Romania, 1975. — 339 p.
- [14] Pogorui A., Rodriguez-Dagnino R. M. Solutions of some partial differential equations with variable coefficients by properties of monogenic functions // J. Math. Sci. — 2017. — **220**, No. 5. — P. 624 – 632.