

УДК 517.5

А. С. Сердюк¹, І. В. Соколенко²

^{1,2}(Інститут математики НАН України, Київ)

¹ serdyuk@imath.kiev.ua, ² sokol@imath.kiev.ua

Апроксимація класів згорток періодичних функцій лінійними методами, побудованими на основі коефіцієнтів Фур'є-Лагранжа

Присвячено 70-річчю професора Юрія Борисовича Зелінського

Знайдено точні верхні межі поточкових та рівномірних наближень класів 2π -періодичних функцій, що задаються у вигляді згортки довільного сумовного з квадратом твірного ядра з функціями, що належать одиничній кулі простору L_2 , за допомогою лінійних поліноміальних методів, побудованих на основі їх коефіцієнтів Фур'є-Лагранжа.

We calculate the least upper bounds of pointwise and uniform approximations for classes of 2π -periodic functions expressible as convolutions of an arbitrary square summable kernel with functions, which belong to the unit ball of the space L_2 , by linear polynomial methods, constructed on the basis of their Fourier-Lagrange coefficients.

Нехай C і L_p , $1 \leq p \leq \infty$, — простори 2π -періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ та $\|\cdot\|_p$, відповідно.

Позначимо через $C_{\bar{\beta},p}^\psi$, $1 \leq p \leq \infty$, множину всіх 2π -періодичних функцій f , які зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \Psi_{\bar{\beta}}(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B_p^0, \quad (1)$$

$$B_p^0 = \{\varphi \in L_p : \|\varphi\|_p \leq 1, \varphi \perp 1\},$$

із фіксованим твірним ядром $\Psi_{\bar{\beta}} \in L_{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$, ряд Фур'є якого має вигляд

$$\Psi_{\bar{\beta}}(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right),$$

де $\psi = \psi(k)$ і $\bar{\beta} = \beta_k$, $k = 1, 2, \dots$, — довільні послідовності дійсних чисел. Якщо $\psi(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, то функцію φ у зображенні (1) називають $(\psi, \bar{\beta})$ -похідною функції f і позначають $f_{\bar{\beta}}^{\psi}$. Поняття $(\psi, \bar{\beta})$ -похідної введено О. І. Степанцем (див., наприклад, [1]). Оскільки $\varphi \in L_p$, а $\Psi_{\bar{\beta}} \in L_{p'}$, то (див. [1, с. 144]) згортка (1) є неперервною функцією, тобто $C_{\bar{\beta}, p}^{\psi} \subset C$.

При $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, класи $C_{\bar{\beta}, p}^{\psi}$ позначатимемо через $C_{\beta, p}^{\psi}$. При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, класи $C_{\bar{\beta}, p}^{\psi}$ будемо позначати через $W_{\bar{\beta}, p}^r$. Якщо $\psi(k) = k^{-r}$ і $\beta_k \equiv r$, $r \in \mathbb{N}$, то $W_{\bar{\beta}, p}^r$ є відомими класами r -диференційовних функцій W_p^r . Якщо $\psi(k) = q^k$, $0 < q < 1$, то класи $C_{\bar{\beta}, p}^{\psi}$ будемо позначати через $C_{\bar{\beta}, p}^q$. При $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, $C_{\bar{\beta}, p}^q$ є відомими класами інтегралів Пуассона $C_{\beta, p}^q$. Зрозуміло, що при $p = 2$ умова включення $\Psi_{\bar{\beta}} \in L_2$ еквівалентна виконанню умови

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^2(k) < \infty. \tag{2}$$

Нехай $f(x)$ — довільна 2π -періодична неперервна функція. Через $\tilde{S}_n(f; x)$ будемо позначати тригонометричний поліном порядку n , що інтерполює $f(x)$ у точках $x_k^{(n)} = 2k\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \dots, 2n$, тобто такий, що

$$\tilde{S}_n(f; x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}), \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Інтерполяційний тригонометричний поліном $\tilde{S}_n(f; x)$ можна записати (див., наприклад, [2, с. 128-129]) у явному вигляді наступним чином:

$$\tilde{S}_n(f; x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx), \tag{3}$$

де

$$a_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)}) \cos kx_i^{(n)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)}) \sin kx_i^{(n)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Зв'язок між коефіцієнтами Фур'є a_k і b_k функції $f(x)$ ($f \in C$) і коефіцієнтами $a_k^{(n)}$ і $b_k^{(n)}$ інтерполяційного полінома $\tilde{S}_n(f; x)$ виражається за допомогою рівностей [2, с. 130]

$$a_k^{(n)} = a_k + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m(2n+1)+k} + a_{m(2n+1)-k}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

$$b_k^{(n)} = b_k + \sum_{m=1}^{\infty} (b_{m(2n+1)+k} - b_{m(2n+1)-k}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Розглянемо лінійні поліноміальні методи наближення функцій f з класів $C_{\beta, 2}^{\psi}$, які побудовані на основі їх коефіцієнтів Фур'є–Лагранжа $a_k^{(n)}$ і $b_k^{(n)}$. Нехай $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$ і $M = \|\mu_k^{(n)}\|$, $n = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1, \dots$, — нескінченні трикутні матриці дійсних чисел такі, що

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(n)} &= 1, & \mu_0^{(n)} &= 0, & n &= 0, 1, 2, \dots, \\ \lambda_k^{(n)} &= 0, & \mu_k^{(n)} &= 0, & k &= n+1, n+2, \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k^{(n)} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_k^{(n)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Позначимо через $\tilde{U}_n = \tilde{U}_n(\Lambda; M)$ лінійний оператор, який кожній функції $f \in C$ ставить у відповідність тригонометричний поліном вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{U}_n(f; x) = \tilde{U}_n(f; \Lambda; M; x) &= \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\lambda_k^{(n)} (a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx) + \right. \\ &\quad \left. + \mu_k^{(n)} (-b_k^{(n)} \cos kx + a_k^{(n)} \sin kx) \right), \end{aligned} \quad (7)$$

де $a_k^{(n)}$ і $b_k^{(n)}$ — коефіцієнти, що визначаються рівностями (4) і (5).

У даній роботі розглядається задача про знаходження точних значень величин

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,2}^\psi; \Lambda; M; x) = \sup_{f \in C_{\beta,2}^\psi} |f(x) - \tilde{U}_n(f; x)|. \quad (8)$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай послідовність дійсних чисел $\psi(k)$ задовольняє умову (2), а $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$ і $M = \|\mu_k^{(n)}\|$ — умови (6). Тоді для довільної послідовності $\beta = \beta_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, і довільного $n \in \mathbb{N}$ у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,2}^\psi; \Lambda; M; x) = & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=1}^n \left((1 - \lambda_k^{(n)})^2 + (\mu_k^{(n)})^2 \right) \psi^2(k) + \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \left(\left(\cos m(2n+1)x - \lambda_{|k-m(2n+1)|}^{(n)} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left. + \left(\sin m(2n+1)x + \mu_{|k-m(2n+1)|}^{(n)} \right)^2 \right) \psi^2(k) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Доведення. Для довільної функції f з класу $C_{\beta,2}^\psi$ згідно з (1) мають місце формули

$$a_\nu \cos kx + b_\nu \sin kx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\nu) \cos \left(\nu(x-t) - (\nu-k)x - \frac{\beta_\nu \pi}{2} \right) \varphi(t) dt, \quad (9)$$

$$-b_\nu \cos kx + a_\nu \sin kx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\nu) \sin \left(\nu(x-t) - (\nu-k)x - \frac{\beta_\nu \pi}{2} \right) \varphi(t) dt. \quad (10)$$

Об'єднуючи (1), (4)–(7), (9) та (10), для $f \in C_{\beta,2}^\psi$ одержуємо

$$f(x) - \tilde{U}_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sum_{k=1}^n \psi(k) \left((1 - \lambda_k^{(n)}) \cos \left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2} \right) - \mu_k^{(n)} \sin \left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2} \right) \right) + \right. \\
& \quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi(\nu) \left(\cos \left(\nu t - \frac{\beta_\nu \pi}{2} \right) - \right. \\
& \quad - \lambda_{|\nu-m(2n+1)|}^{(n)} \cos \left(\nu t - m(2n+1)x - \frac{\beta_\nu \pi}{2} \right) - \\
& \quad \left. \left. - \mu_{|\nu-m(2n+1)|}^{(n)} \sin \left(\nu t - m(2n+1)x - \frac{\beta_\nu \pi}{2} \right) \right) \right) dt = \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \left(\sum_{k=1}^n \psi(k) \left((1 - \lambda_k^{(n)}) \cos \left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2} \right) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \mu_k^{(n)} \sin \left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2} \right) \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi(\nu) \times \right. \\
& \quad \times \left(\left(\cos m(2n+1)x - \lambda_{|\nu-m(2n+1)|}^{(n)} \right) \cos \left(\nu t - m(2n+1)x - \frac{\beta_\nu \pi}{2} \right) - \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(\sin m(2n+1)x + \mu_{|\nu-m(2n+1)|}^{(n)} \right) \sin \left(\nu t - m(2n+1)x - \frac{\beta_\nu \pi}{2} \right) \right) \right) dt. \tag{11}
\end{aligned}$$

Розглядаючи точну верхню межу відносно функцій f з класу $C_{\beta,2}^\psi$ у лівій і правій частині рівності (11) та враховуючи інваріантність множин $C_{\beta,2}^\psi$ відносно зсуву аргументу, в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ отримуємо

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,2}^\psi; \Lambda; M; x) &= \frac{1}{\pi} \sup_{\varphi \in B_{2,-\pi}^0} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \times \\
& \times \left(\sum_{k=1}^n \psi(k) \left((1 - \lambda_k^{(n)}) \cos \left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2} \right) - \mu_k^{(n)} \sin \left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2} \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi(\nu) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\left(\cos m(2n+1)x - \lambda_{|\nu-m(2n+1)|}^{(n)} \right) \cos \left(\nu t - m(2n+1)x - \frac{\beta_\nu \pi}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\sin m(2n+1)x + \mu_{|\nu-m(2n+1)|}^{(n)} \right) \sin \left(\nu t - m(2n+1)x - \frac{\beta_\nu \pi}{2} \right) \right) dt. \end{aligned} \tag{12}$$

Застосовуючи до правої частини (12) співвідношення двоїстості [3, с. 27]

$$\sup_{\varphi \in B_{2,-\pi}^0} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) u(t) dt = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \|u - \alpha\|_2, \quad u \in L_2,$$

та рівність Парсеваля, одержуємо

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,2}^\psi; \Lambda; M; x) &= \frac{1}{\pi} \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\| \sum_{k=1}^n \psi(k) \left((1 - \lambda_k^{(n)}) \cos \left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2} \right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \mu_k^{(n)} \sin \left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2} \right) \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi(\nu) \times \right. \\ & \quad \times \left(\left(\cos m(2n+1)x - \lambda_{|\nu-m(2n+1)|}^{(n)} \right) \cos \left(\nu t - m(2n+1)x - \frac{\beta_\nu \pi}{2} \right) - \right. \\ & \quad \left. \left. - \left(\sin m(2n+1)x + \mu_{|\nu-m(2n+1)|}^{(n)} \right) \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \sin \left(\nu t - m(2n+1)x - \frac{\beta_\nu \pi}{2} \right) \right) - \alpha \right\|_2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \left(\sum_{k=1}^n \left((1 - \lambda_k^{(n)})^2 + (\mu_k^{(n)})^2 \right) \psi^2(k) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \left(\left(\cos m(2n+1)x - \lambda_{|k-m(2n+1)|}^{(n)} \right)^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\sin m(2n+1)x + \mu_{|k-m(2n+1)|}^{(n)} \right)^2 \right) \psi^2(k) + \alpha^2 \right)^{1/2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=1}^n \left((1 - \lambda_k^{(n)})^2 + (\mu_k^{(n)})^2 \right) \psi^2(k) + \right. \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \left(\left(\cos m(2n+1)x - \lambda_{|k-m(2n+1)|}^{(n)} \right)^2 + \right. \\
&\left. \left. + \left(\sin m(2n+1)x + \mu_{|k-m(2n+1)|}^{(n)} \right)^2 \right) \psi^2(k) \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Теорему 1 доведено.

Якщо

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n, \end{cases} \quad i \quad \mu_k^{(n)} \equiv 0,$$

то згідно з (3) і (7) тригонометричний поліном $\tilde{U}_n(f; \Lambda; M; x)$ є інтерполяційним тригонометричним поліномом $\tilde{S}_n(f; x)$ функції f порядку n , тобто $\tilde{U}_n(f; \Lambda; M; x) = \tilde{S}_n(f; x)$. В цьому випадку, як випливає з теореми 1, при всіх $x \in \mathbb{R}$ для величин

$$\mathcal{E}(C_{\beta,2}^{\psi}; \tilde{S}_n; x) = \sup_{f \in C_{\beta,2}^{\psi}} |f(x) - \tilde{S}_n(f; x)|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

виконується рівність

$$\mathcal{E}(C_{\beta,2}^{\psi}; \tilde{S}_n; x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \frac{(2n+1)mx}{2} \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Рівність (14) встановлено у [4].

Поряд з $\mathcal{E}(C_{\beta,2}^{\psi}; \tilde{S}_n; x)$ розглянемо величини

$$\mathcal{E}(C_{\beta,2}^{\psi}; \tilde{S}_n)_C = \sup_{f \in C_{\beta,2}^{\psi}} \|f(\cdot) - \tilde{S}_n(f; \cdot)\|_C, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, а послідовність дійсних чисел $\psi(k)$ задовольняє умову (2) і така, що послідовність $\alpha_m = m \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k)$*

є отужкою донизу. Тоді для довільної $\tilde{\beta} = \beta_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, виконується рівність

$$\mathcal{E}(C_{\tilde{\beta},2}^\psi; \tilde{S}_n)_C = \mathcal{E}(C_{\tilde{\beta},2}^\psi; \tilde{S}_n; \frac{\pi}{2n+1}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=(2l-1)(2n+1)-n}^{(2l-1)(2n+1)+n} \psi^2(k) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доведення. Підносячи до квадрату обидві частини рівності (14), отримуємо

$$\mathcal{E}^2(C_{\tilde{\beta},2}^\psi; \tilde{S}_n; x) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (1 - \cos(2n+1)mx) \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k).$$

При кожному $n \in \mathbb{N}$ величина $\mathcal{E}^2(C_{\tilde{\beta},2}^\psi; \tilde{S}_n; x)$ є парною періодичною функцією від змінної x з періодом $T = \frac{2\pi}{2n+1}$, тому досить її розглядати на $[0, \frac{\pi}{2n+1}]$. За виконання умов теореми 2, як випливає з [5, с. 297], похідна

$$\frac{d}{dx} \mathcal{E}^2(C_{\tilde{\beta},2}^\psi; \tilde{S}_n; x) = \frac{2(2n+1)}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k) \sin(2n+1)mx$$

є додатною на $(0, \frac{\pi}{2n+1})$ функцією, а, отже, максимум величини $\mathcal{E}^2(C_{\tilde{\beta},2}^\psi; \tilde{S}_n; x)$ досягається в точці $x = \frac{\pi}{2n+1}$ і приймає значення

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2(C_{\tilde{\beta},2}^\psi; \tilde{S}_n)_C &= \max_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{E}^2(C_{\tilde{\beta},2}^\psi; \tilde{S}_n; x) = \mathcal{E}^2(C_{\tilde{\beta},2}^\psi; \tilde{S}_n; \frac{\pi}{2n+1}) = \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \sin^2 \frac{(2l-1)\pi}{2} \sum_{k=(2l-1)(2n+1)-n}^{(2l-1)(2n+1)+n} \psi^2(k) + \sin^2 l\pi \sum_{k=2l(2n+1)-n}^{2l(2n+1)+n} \psi^2(k) = \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=(2l-1)(2n+1)-n}^{(2l-1)(2n+1)+n} \psi^2(k). \end{aligned}$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження. Із означень (13) і (15) випливають очевидні співвідношення

$$\mathcal{E}(C_{\tilde{\beta},2}^\psi; \tilde{S}_n; x) \leq \max_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{E}(C_{\tilde{\beta},2}^\psi; \tilde{S}_n; x) = \mathcal{E}(C_{\tilde{\beta},2}^\psi; \tilde{S}_n)_C.$$

Як випливає з теореми 2, опуклість донизу послідовності $\alpha_m = m \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k)$ є достатньою умовою того, що величини $\mathcal{E}(C_{\bar{\beta},2}^\psi; \tilde{S}_n; x)$ (13) досягають значень $\mathcal{E}(C_{\bar{\beta},2}^\psi; \tilde{S}_n)_C$ рівно посередині між вузлами інтерполяції, тобто при $x = \frac{\pi}{2n+1} + \frac{2j\pi}{2n+1}, j \in \mathbb{Z}$. Неважко переконатись, що при достатньо великих n умову опуклості послідовності α_m задовольняють $\psi(k) = q^k, q \in (0, 1)$. Утім, наступне твердження показує, що для зазначених $\psi(k)$ рівності

$$\mathcal{E}(C_{\bar{\beta},2}^\psi; \tilde{S}_n; \frac{\pi}{2n+1}) = \mathcal{E}(C_{\bar{\beta},2}^\psi; \tilde{S}_n)_C, \quad (16)$$

мають місце при всіх $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. *Нехай $q \in (0, 1)$, $\bar{\beta} = \beta_k$ — довільна послідовність дійсних чисел і $n \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$\mathcal{E}(C_{\bar{\beta},2}^q; \tilde{S}_n)_C = \mathcal{E}(C_{\bar{\beta},2}^q; \tilde{S}_n; \frac{\pi}{2n+1}) = \frac{2q^{n+1}}{\sqrt{\pi(1-q^2)(1+q^{2(2n+1)})}}.$$

Доведення. Згідно з наслідком 1 роботи [4]

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(C_{\bar{\beta},2}^q; \tilde{S}_n; x) &= \left| \sin \frac{(2n+1)x}{2} \right| \frac{2q^{n+1}}{\sqrt{\pi(1-q^2)}} \times \\ &\times \left(\frac{1+q^{2(2n+1)}}{1-2q^{2(2n+1)} \cos(2n+1)x + q^{4(2n+1)}} \right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (17)$$

Рівність (17) можна записати у еквівалентному вигляді:

$$\mathcal{E}^2(C_{\bar{\beta},2}^q; \tilde{S}_n; x) = \frac{2q^{2(n+1)}(1+q^{2(2n+1)})(1-\cos(2n+1)x)}{\pi(1-q^2)(1-2q^{2(2n+1)} \cos(2n+1)x + q^{4(2n+1)})}. \quad (18)$$

Розглянемо функцію

$$y(\tau) = \frac{1 - \cos \tau}{1 - 2\rho \cos \tau + \rho^2}, \quad \rho \in (0, 1).$$

Оскільки

$$y'(\tau) = \frac{(1-\rho)^2 \sin \tau}{(1-2\rho \cos \tau + \rho^2)^2},$$

то максимум функції $y(\tau)$ досягається в точці $\tau = \pi$ і приймає значення

$$y_{\max} = y(\pi) = \frac{2}{(1 + \rho)^2}.$$

Отже, з урахуванням (18),

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2(C_{\bar{\beta},2}^q; \tilde{S}_n)_C &= \max_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{E}^2(C_{\bar{\beta},2}^q; \tilde{S}_n; x) = \\ &= \frac{4q^{2(n+1)}(1 + q^{2(2n+1)})}{\pi(1 - q^2)(1 + q^{2(2n+1)})^2} = \frac{4q^{2(n+1)}}{\pi(1 - q^2)(1 + q^{2(2n+1)})}. \end{aligned}$$

Теорему 3 доведено.

Наступне твердження показує, що (16) має місце для $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 1/2$.

Теорема 4. *Нехай $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 1/2$, $\bar{\beta} = \beta_k$ — довільна послідовність дійсних чисел і $n \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(W_{\bar{\beta},2}^r; \tilde{S}_n)_C &= \mathcal{E}(C_{\bar{\beta},2}^\psi; \tilde{S}_n; \frac{\pi}{2n+1}) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(2r)(2n+1)^r} \left(\int_0^1 \frac{\rho^{-n/(2n+1)} \ln^{2r-1} \rho^{-1}}{(1 - \rho^{1/(2n+1)})(1 + \rho)} d\rho \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

де $\Gamma(x)$ — гамма-функція.

Доведення. Згідно з наслідком 2 роботи [4]

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(W_{\bar{\beta},2}^r; \tilde{S}_n; x) &= \left| \sin \frac{(2n+1)x}{2} \right| \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(2r)(2n+1)^r} \times \\ &\times \left(\int_0^1 \frac{\rho^{-n/(2n+1)}(1 + \rho) \ln^{2r-1} \rho^{-1}}{(1 - \rho^{1/(2n+1)})(1 - 2\rho \cos(2n+1)x + \rho^2)} d\rho \right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (19) \end{aligned}$$

Запишемо рівність (19) у наступному вигляді:

$$\mathcal{E}^2(W_{\bar{\beta},2}^r; \tilde{S}_n; x) = \frac{2(1 - \cos(2n+1)x)}{\pi\Gamma(2r)(2n+1)^{2r}} \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{\rho^{-n/(2n+1)}(1+\rho) \ln^{2r-1} \rho^{-1}}{(1-\rho^{1/(2n+1)})(1-2\rho \cos(2n+1)x + \rho^2)} d\rho. \quad (20)$$

З рівності (20) отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathcal{E}^2(W_{\tilde{\beta},2}^r; \tilde{S}_n; x) &= \frac{2(2n+1) \sin(2n+1)x}{\pi \Gamma(2r)(2n+1)^{2r}} \times \\ &\times \int_0^1 \frac{\rho^{-n/(2n+1)}(1+\rho)(1-\rho)^2 \ln^{2r-1} \rho^{-1}}{(1-\rho^{1/(2n+1)})(1-2\rho \cos(2n+1)x + \rho^2)^2} d\rho. \end{aligned} \quad (21)$$

Оскільки інтеграл в правій частині (21) додатний, то максимум $\mathcal{E}^2(W_{\tilde{\beta},2}^r; \tilde{S}_n; x)$ досягається в точці $x = \frac{\pi}{2n+1}$ і, з урахуванням (20), приймає значення

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2(W_{\tilde{\beta},2}^r; \tilde{S}_n)_C &= \max_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{E}^2(W_{\tilde{\beta},2}^r; \tilde{S}_n; x) = \\ &= \frac{4}{\pi \Gamma(2r)(2n+1)^{2r}} \int_0^1 \frac{\rho^{-n/(2n+1)} \ln^{2r-1} \rho^{-1}}{(1-\rho^{1/(2n+1)})(1+\rho)} d\rho. \end{aligned}$$

Теорему 4 доведено.

Література

- [1] Степанец А. И. Методы теории приближений. В 2-х ч. — К.: Ин-т математики НАН України, 2002. — Ч. 1. — 427 с.
- [2] Степанец А. И. Методы теории приближений. В 2-х ч. — К.: Ин-т математики НАН України, 2002. — Ч. 2. — 468 с.
- [3] Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 423 с.
- [4] Сердюк А. С., Соколенко І. В. Наближення класів $(\psi, \tilde{\beta})$ -диференційованих функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України /Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу/. — К.: Ін-т математики НАН України, 2016. — **13**, №1. — С. 289–299.
- [5] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т. 1. — 616 с.