Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 14, № 1, 230–237

УДК 517.51

О. В. Сафонова

(*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ*)
olechkadiadin@gmail.com

Про зліченнократні B-вимірні відображення

Присвячено 70-річчю професора Юрія Борисовича Зелінського

This paper considers countable-to-one B-measurable mappings of complete separable zero-dimensional uncountable spaces. It is proved that if a set of the first category of the space is excluded there exists a dense set of points of local homeomorphism on the remaining set.

У роботі розглядаються зліченнократні B-вимірні відображення повних сепарабельних нульвимірних незліченних просторів. Показано, що якщо виключити деяку множину першої категорії з простору, то існує щільна множина точок локального гомеоморфізму на множині, що залишається.

Дослідженню зліченнократних відображень присвячена низка робіт. Результати, отримані у роботах [1–3], заклали відправний пункт для подальших досліджень з цієї тематики.

Серед цих результатів привертають увагу теорема Ю. Ю. Трохимчука щодо існування щільної множини точок локального гомеоморфізму при зліченнократному неперервному відображенні многовидів однакової вимірності і загальна теорема М. М. Лузіна про існування неявних функцій. Розглядаючи проблему про уніформізацію множин, яка тісно пов'язана з проблемою неявних функцій, М. М. Лузін довів, що при зліченнократному неперервному відображенні f довільний повний сепарабельний простір X являє собою суму ряду борельових множин $X = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_j \cup \ldots$, таких, що звуження відображення $f\,|_{B_j}$ на кожну з них є гомеоморфізмом (взагалі кажучи з класу $(0,\beta)$) [4, с. 509].

Виявляється, якщо знехтувати деякою множиною першої категорії, то при зліченнократному довільному B-вимірному відображенні повного сепарабельного нульвимірного незліченного простору існує щільна множина точок локального гомеоморфізму. Метою цієї роботи і є доведення зазначеного твердження. Це твердження є доповненням до згаданих результатів. Інформацію про терміни та поняття, що використовуються, можна знайти у роботах [3–5].

Теорема 1. *Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$ є нульвимірною ніде не компактною G_δ-множиною, а $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — зліченнократне B-вимірне відображення. Тоді існують множина першої категорії $D \subset A$ та послідовність G_δ-множин $A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots$, така, що $A \setminus D = \bigcup_j A_j$ і звуження відображення $f\,|_{A_j}$ на кожну множину A_j є гомеоморфізмом.*

Доведення Теореми 1 ґрунтується на двох лемах.

Лема 1. *Якщо виконуються умови теореми 1, то існують множина першої категорії $D \subset A$ та послідовність G_δ-множин $A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots$, така, що $A \setminus D = \bigcup_j A_j$ і звуження відображення $f\,|_{A_j}$ на кожну множину A_j є взаємно однозначним, причому образи $f(A_j)$ нульвимірні і топологічно містяться у класичному берівсъкому просторі.*

Доведення. Відомо [4, с. 393], що графік $\Gamma(f)$ для B-вимірного відображення f є борельовою множиною у просторі $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Образ $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ для G_δ-множини $A \subset \mathbb{R}^n$ — ортогональна проекція графіка відображення $\Gamma(f)$ на $\mathbb{R}^m$, при цьому кожній точці множини $f(A)$ відповідає щонайбільше зліченна множина точок борельової множини $\Gamma(f)$. Згідно з теоремою Лузіна [2, с. 178], звідси випливає, що множина $f(A)$ є борельовою у просторі $\mathbb{R}^m$.

Оскільки множина $f(A)$ має вимірність $\dim f(A) = k \le m$, то за теоремою Катетова [5, с. 376] можна записати цю множину у вигляді суми множин $\widetilde{Q_i}$ вимірності $\dim\widetilde{Q_i} = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Як відомо [4, с. 294], існують множини $Q_i^* \supset \widetilde{Q_i}$ типу G_δ у просторі $\mathbb{R}^m$ і вимірності $\dim Q_i^* = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Тоді кожний перетин множин $Q_i' = Q_i^* \cap f(A)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, є нульвимірною борельовою множиною, причому $f(A) = \bigcup_{i=0}^{k} Q_i'$. Покладаючи $Q_0 = Q_0'$, $Q_1 = Q_1' \setminus Q_0'$,

$Q_2 = Q'_2 \setminus (Q'_0 \cup Q'_1), \dots, Q_k = Q'_k \setminus (Q'_0 \cup Q'_1 \cup \dots \cup Q'_{k-1})$, маємо $f(A) = \bigcup_{i=0}^{k} Q_i$, де Q_i — нульвимірні борельові множини, які попарно не перетинаються.

Кожна множина Q_i, $i = 0, 1, \dots, k$, топологічно міститься у нульвимірному класичному берівському просторі $\mathcal{N}$ — множині всіх ірраціональних точок, розміщених на одиничному відрізку $[0,1] \subset \mathbb{R}$ [1, с. 147]. Що стосується множини A, то вона, будучи нульвимірною ніде не компактною і абсолютною G_δ-множиною, гомеоморфна простору Бера $\mathcal{N}$ [1, с. 155].

Нехай $\mathcal{N}_x$ і $\mathcal{N}_y$ — лінійні берівські простори, які належать відповідно осі OX і осі OY деякої прямокутної декартової системи координат, вибраної у двовимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$. Виберемо гомеоморфізми h, h_i такі, що $\mathcal{N}_x = h(A)$ і $H_i = h_i(Q_i) \subset \mathcal{N}_y$, $i = 0, 1, \dots, k$. Беручи до уваги попереднє, маємо $f^{-1}(Q_i) \subset A$, $E_i = h(f^{-1}(Q_i)) \subset \mathcal{N}_x$, та $E_i \cap E_p = \varnothing$ при $i \neq p$.

Покладемо $g = h^{-1}$ і розглянемо B-вимірні відображення $f_i \colon E_i \longrightarrow H_i$, які задані формулами: $y = h_i\left(f(g(x))\right) \in H_i$, $x \in E_i$, $i = 0, 1, \dots, k$. Внаслідок того, що кожне відображення f_i зліченнократне, будь-яка точка $y \in H_i$ є ортогональною проекцією на вісь OY щонайбільше зліченної множини точок графіка $\Gamma(f_i)$ відображення f_i, $i = 0, 1, \dots, k$. Звідси, за теоремою Лузіна [2, с. 244], випливає, що кожна борельова множина $\Gamma(f_i)$ може бути записаною у вигляді суми зліченної множини однозначних відносно осі OY і попарно без спільних точок борельових множин:

$$B_i^1, B_i^2, \dots,\ i = 0, 1, \dots, k,\ \Gamma(f_i) = \cup_s B_i^s,\ s = 1, 2, \dots.$$

Позначимо через E_i^s множину, яка є ортогональною проекцією на вісь OX множини B_i^s, $i = 0, 1, \dots, k$, $s = 1, 2, \dots$. Тоді $\mathcal{N}_x = \cup_{i=0}^{k} E_i$, $E_i = \cup_s E_i^s$, $i = 0, 1, \dots, k$, причому $E_i^s \cap E_i^t = \varnothing$ при $s \neq t$. Таким чином, $\mathcal{N}_x = \cup_{i=0}^{k} \cup_s E_i^s$, де E_i^s — борельові множини попарно без спільних точок.

Оскільки G_δ-множина $\mathcal{N}_x$ всюди другої категорії на відрізку $[0,1]$, то на будь-якому інтервалі $(\alpha, \beta) \subset [0,1]$ серед борельових множин зліченної послідовності $\{E_0^1, E_1^1, \dots, E_k^1, E_0^2, E_1^2, \dots, E_k^2, \dots\}$ знайдеться принаймні одна множина E_i^s не першої категорії і, отже, за властивістю Бера, другої категорії на деякому інтервалі $(a, b) \subset (\alpha, \beta)$. Тому, існують всюди щільна послідовність інтервалів $(a_j, b_j) \subset [0,1]$, $j = 1, 2, \dots$, і послідовність множин $\widetilde{E}_j \subseteq (a_j, b_j) \cap \mathcal{N}_x$, кожна з яких другої категорії на відповідному (a_j, b_j) та належить лише одній з множин E_i^s . Множини $\widetilde{E}_j$, очевидно, можна вважати G_δ-множинами у просторі $\mathbb{R}_x$. При цьому на відрізку $[0,1]$ множина $D_0 = [0,1]\setminus \setminus \bigcup_j (a_j, b_j)$ замкнена і ніде не щільна, а множини $D_j = \mathcal{N}_x \cap (a_j, b_j) \setminus \widetilde{E}_j$, $j = 1, 2, \ldots$, першої категорії. Враховуючи зазначене, отримаємо множину $\widetilde{D} = (D_0 \cap \mathcal{N}_x) \cup (\bigcup_j D_j)$ першої категорії у просторі Бера $\mathcal{N}_x$.

Отже справедливо, що $\mathcal{N}_x = \widetilde{D} \cup (\bigcup_j \widetilde{E}_j)$ і на кожній множині $\widetilde{E}_j$, $j = 1, 2, \ldots$, одне і тільки одне із відображень f_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, є взаємно однозначним. На підставі того, що відображення h є гомеоморфізмом, маємо множину $D = h^{-1}(\widetilde{D}) = g(\widetilde{D}) \subset A$ першої категорії в A та диз'юнктну зліченну сім'ю G_δ-множин $A_j = h^{-1}(\widetilde{E}_j) = g(\widetilde{E}_j) \subset A$ у просторі $\mathbb{R}^n$, причому $D \cap A_j = \varnothing$, $j = 1, 2, \ldots$. Звідси, згідно з означенням відображень $f_i, i = 0, 1, \ldots, k$, випливає, що $A = D \cup (\bigcup_j A_j)$ і звуження $f\,|_{A_j}$ відображення f на кожну множину A_j є взаємно однозначним. З попереднього також випливає, що образи $f(A_j)$ нульвимірні і топологічно містяться у берівському просторі $\mathcal{N}$. Лема доведена.

Лема 2. *Якщо $A \subset \mathbb{R}^n$ — нульвимірна ніде не компактна G_δ–множина і $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — взаємно однозначне B-вимірне відображення, то існують множина першої категорії $D \subset A$ та послідовність G_δ-множин $\{A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots\}$, таких, що $A \setminus D = \bigcup_j A_j$ і звуження відображення $f\,|_{A_j}$ на кожну множину A_j є гомеоморфізмом.*

Доведення. Будь-яке B-вимірне відображення в сепарабельний простір неперервне з точністю до множини першої категорії [4, с. 409]. Тому надалі вважатимемо, що відображення f є неперервним на нульвимірній ніде не компактній G_δ-множині $A \setminus D^*$, де D^* — належним чином вибрана у просторі R^n є F_σ-множиною першої категорії на A .

Скориставшись Лемою 1, попередньо вилучимо із множини $A \setminus D^*$ деяку множину першої категорії D' та розіб'ємо множину $A \setminus (D^* \cup D')$ на зліченну множину попарно без спільних точок G_δ-множин A_j, $j = 1, 2, ...$ таким чином, щоб образ $f(A_j)$ кожної із цих множин топологічно містився у берівському просторі $\mathcal{N}$. Отже, маємо $A \setminus (D^* \cup D') = \bigcup_j A_j$ та на кожній множині A_j, $j = 1, 2, \ldots$, відображення f є взаємно однозначним і неперервним.

Оскільки зліченна сума множин першої категорії є множиною також першої категорії, то для доведення леми 2 досить розглянути довільну множину A_j, $i = 0, 1, \ldots, k$, замість множини $A \setminus (D^* \cup D')$

та показати, що твердження цієї леми є справедливим. Тоді візьмемо одну будь-яку із множин A_j і позначимо її через A'. Множина A' — нульвимірна ніде не компактна абсолютна G_δ-множина і тому вона є гомеоморфною простору Бера $\mathcal{N}$.

Нехай h_1 і h_2 — гомеоморфізми такі, що $h_1(\mathcal{N}_x) = A'$ і $h_2(f(A')) = H \subset \mathcal{N}_y$, де $\mathcal{N}_x$, $\mathcal{N}_y$ — лінійні берівські простори, які належать відповідно осям OX і OY деякої прямокутної декартової системи координат у двовимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$. Розглянемо неперервне відображення $g : \mathcal{N}_x \to H$, що задано формулою $g(x) = h_2(f(h_1(x)))$, $x \in \mathcal{N}_x \subset [0,1]$, $g(x) \in \mathcal{N}_y$.

У просторі $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ візьмемо замикання $\overline{\Gamma(g)}$ графіка $\Gamma(g)$ відображення g . Тоді відрізок $[0,1] \subset \mathbb{R}_x$ — ортогональна проекція множини $\overline{\Gamma(g)}$. Графік $\Gamma(g)$ є G_δ-множиною всюди другої категорії на компакті $\overline{\Gamma(g)}$. Оскільки множина $\Gamma(g)$ ніде не щільна у просторі $\mathbb{R}^2$, то замкнена множина $\overline{\Gamma(g)}$ не містить внутрішніх точок відносно $\mathbb{R}^2$.

На підставі того, що множини $\Gamma(g)$ і $\mathcal{N}_x$ гомеоморфні, будь-яка точка множини $\mathcal{N}_x$ є проекцією лише однієї точки компакта $\overline{\Gamma(g)}$. На відміну від цього, кожна раціональна точка $x \in [0,1] \setminus \mathcal{N}_x$ є проекцією, взагалі кажучи, деякої (замкненої) підмножини точок $B_x \subset \overline{\Gamma(g)}$. При цьому зрозуміло, що $B_x \cap \Gamma(g) = \varnothing$, тобто $B_x \subset \overline{\Gamma(g)} \setminus \Gamma(g)$.

Усі борельові множини $B_x, x \in [0,1] \setminus \mathcal{N}_x$ занумеруємо і запишемо у вигляді послідовності $B_1, B_2, \ldots, B_r, \ldots,$ причому $B_r \cap B_t = \varnothing, r \neq t$. Тоді, враховуючи попереднє, компакт $\overline{\Gamma(g)}$ можна зобразити як об'єднання зліченної множини попарно без спільних точок борельових множин, кожна з яких є однозначною відносно осі OY : $\overline{\Gamma(g)} = \Gamma(g) \cup (\bigcup_r B_r)$, $r = 1, 2, \ldots$.

Візьмемо ортогональну проекцію $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \to \mathbb{R}_y$ простору $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ на вісь $\mathbb{R}_y$. Розглянемо звуження $\pi \colon \overline{\Gamma(g)} \longrightarrow \mathbb{R}_y$ відображення $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \longrightarrow \mathbb{R}_y$ на множину $\overline{\Gamma(g)}$. З попереднього випливає, що неперервне відображення π є зліченнократним і його звуження $\pi \mid_{B_r}$ на кожну множину B_r-гомеоморфізмом. При цьому образ множини $\overline{\Gamma(g)}$ є компактом $\Phi = \pi(\overline{\Gamma(g)}) \subseteq [0,1] \subset \mathbb{R}_y$ і множина $H \subset \Phi$ всюди щільна на Φ.

Нехай маємо довільний відрізок $\Delta \subseteq [0,1] \subset \mathbb{R}_x$ і $\overline{\Gamma}$ — замикання графіка $\Gamma \subset \overline{\Gamma(g)}$ звуження відображення g на множину $\mathcal{N}_x \cap \Delta$. Надалі під порцією будь-якої підмножини компакта $\overline{\Gamma}$ розуміємо (непорожній) її перетин з деяким відкритим прямокутником $\Pi \subset [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, сторони якого паралельні осям координат, а його проекція на вісь OX

належить відрізку Δ.

Для замкненої множини $F^* \subset \overline{\Gamma}$, яка щільна на деякій порції $\Gamma' \subset \overline{\Gamma}$ компакта $\overline{\Gamma}$, маємо $\Gamma' \subset F^*$. Множина $\Gamma(g)$ всюди другої категорії на порції Γ'. Внаслідок того, що множини $\Gamma(g)$ і $\mathcal{N}_x$ гомеоморфні, існує інтервал $\delta \subset \Delta$ такий, що множина $\mathcal{N}_x \cap \delta$ гомеоморфна деякій підмножині $\Gamma^* \subset \Gamma' \subset F^*$. Якщо на множині F^* відображення π є гомеоморфним, то звуження відображення g на множину $\mathcal{N}_x \cap \delta$ — гомеоморфізм. Оскільки $\Delta \subset [0,1]$ — довільний відрізок, то знайдеться щільна на $[0,1]$ послідовність попарно без спільних точок інтервалів $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots$, на кожній підмножині $\mathcal{N}_x \cap \delta_i$ з яких відображення g є гомеоморфізмом. При цьому замкнена множина $[0,1] \setminus \cup_i \delta_i$ ніде не щільна і, отже, множина $S = ([0,1] \setminus \cup_i \delta_i) \cap \mathcal{N}_x$ першої категорії на $\mathcal{N}_x$. На підставі того, що h_1 — гомеоморфізм, множина $D' = h_1(S)$ першої категорії на A'. Тоді множина $A' \setminus D'$ розіб'ється на зліченну множину попарно без спільних точок G_δ-множин $A'_i = h_1(\mathcal{N}_x \cap \delta_i)$, $i = 1, 2, \dots$, на кожній з яких відображення f є гомеоморфізмом.

Отже, лема буде доведена, якщо покажемо, що серед замкнених підмножин компакта $\overline{\Gamma}$, на кожній з яких відображення π є гомеоморфізмом, існує принаймні одна множина, яка всюди щільна на деякій порції множини $\overline{\Gamma}$.

Припустимо супротивне. Тоді будь-яка замкнена множина $F \subset \overline{\Gamma}$ є ніде не щільною на компакті $\overline{\Gamma}$, як тільки звуження $\pi\,|_F$ відображення π на цю множину є гомеоморфізмом.

Позначимо через E_p множину точок прямої $\mathbb{R}_y$, кожній з яких при відображенні π^{-1} відповідає щонайбільше p точок компакта $\overline{\Gamma(g)}$. Очевидно, що $E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_p \subset \dots$, причому $\Phi = \bigcup_p E_p$, $i = 0, 1, \dots, k$. Якщо $e_p = \pi^{-1}(E_p) \cap \Gamma$, то справджуються співвідношення $\Gamma = \cup_p e_p$ і $e_1 \subset e_2 \subset \cdots \subset e_p \subset \cdots$.

Згідно з відомою теоремою Бера [4, с. 425], знайдеться порція $\Gamma_1 \subset \Gamma$ G_δ-множини Γ, на якій одна з множин e_p всюди щільна. Нехай k — максимальна кратність точок множини $e = \Gamma_1 \cap e_p$ відносно відображення π. Тоді $k \le p$.

Візьмемо замикання $\overline{\Gamma_1} \subset \overline{\Gamma(g)}$ множини Γ_1 та його проекцію $\Phi_1^* \subset \Phi$ на вісь OY. Оскільки π — неперервне зліченнократне відображення, то на компакті $\overline{\Gamma_1}$ існує послідовність замкнених множин $F_1^1, F_2^1, \dots, F_m^1, \dots$, така, що $\Phi_1^* = \bigcup_m \pi(F_m^1)$ і звуження відображення $\pi\,|_{F_m^1}$ є гомеоморфізмом для $m = 1, 2, \dots$ [6, с. 76]. Множина Φ_1^* — досконалий компакт і образи $\pi(F_m^1), m = 1, 2, \dots,$ — замкнені множини. Тому, знову ж за теоремою Бера, знайдеться відрізок $[a_1, b_1] \subseteq [0,1] \subset \mathbb{R}_y$ такий, що на множині $\Phi_1 = \Phi_1^* \cap [a_1, b_1]$ одна з множин $\pi(F_m^1)$ всюди щільна, отже, маємо $\Phi_1 \subset \pi(F_m^1)$. Позначимо $F_1 = F_m^1 \cap \pi^{-1}(\Phi_1)$, тоді $\Phi_1 = \pi(F_1)$.

Оскільки G_δ-множина Γ_1 другої категорії на своєму замиканні $\overline{\Gamma_1}$, то її проекція на вісь OY всюди щільна на компакті Φ_1. Звідси випливає, що перетин $\pi^{-1}(\Phi_1) \cap \overline{\Gamma_1}$ містить цілу порцію $\Gamma_1' \subset \Gamma_1$ множини Γ_1, причому замикання цієї порції $\overline{\Gamma_1'}$ збігається з компактом $\pi^{-1}(\Phi_1) \cap \overline{\Gamma_1}$. Множина F_1 ніде не щільна на компакті $\overline{\Gamma_1'}$. Тому знайдеться порція $\Gamma_2 \subset \Gamma_1'$ множини Γ_1 така, що $\overline{\Gamma_2} \cap F_1 = \varnothing$. При цьому проекція множини $\overline{\Gamma_2}$ на вісь OY є компактом $\Phi_2^* \subset \Phi_1$.

Розглянемо зліченнократне відображення π на компакті $\overline{\Gamma_2}$. Тоді так само, як і раніше, знайдемо послідовність замкнених множин $F_1^2, F_2^2, \ldots, F_n^2, \ldots$, причому звуження відображення $\pi \mid_{F_n^2}$ на кожну з них є гомеоморфізмом і $\Phi_2^* = \bigcup\limits_n \pi(F_n^2)$. Оскільки множини $\pi(F_n^2)$, $n = 1, 2, \ldots$, замкнені на компакті Φ_2^*, то існує відрізок $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset \mathbb{R}_y$ такий, що на множині $\Phi_2 = \Phi_2^* \cap [a_2, b_2]$ одна з множин $\pi(F_n^2)$ всюди щільна і тому $\Phi_2 \subset \pi(F_n^2)$. Якщо позначити $F_2 = F_n^2 \cap \pi^{-1}(\Phi_2)$, то маємо $\Phi_2 = \pi(F_2)$.

Продовжуючи цей процес, побудуємо на компакті $\overline{\Gamma}$ послідовність замкнених множин $F_1, F_2, \ldots, F_s, \ldots$ та на відрізку $[0,1] \subset \mathbb{R}_y$ — послідовність вкладених компактів $\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \cdots \supset \Phi_s \supset \ldots$, де $F_s \cap F_q = \varnothing$ при $s \neq q$ і $\Phi_s = \pi(F_s)$, $s = 12, \ldots$. Кожній парі множин F_s, Φ_s відповідає порція $\Gamma_{s+1} \subset \Gamma_1 \subset \Gamma$ множини Γ_1, яка має ту властивість, що кожна її точка є точкою кратності щонайменше $s+1$ відносно відображення π. Якщо виконати лише $k+1$ кроків цього процесу, то дістанемо порцію Γ_{k+1} множини Γ_1, всі точки якої мають кратність щонайменше $k+1$, всупереч тому, що $\Gamma_{k+1} \cap e \neq \varnothing$. Цим лема доведена.

Застосовуючи тепер послідовно леми 1 і 2, дістанемо доведення теореми 1.

Із теореми 1 випливає така теорема.

Теорема 2. *Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ — область і $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}_1^n$ — зліченнократне B-вимірне відображення. Тоді існує всюди щільна в D відкрита множина $G = \bigcup_j G_j \subset D$ така, що звуження відображення $f \mid_{Q_j}$ на множину $Q_j \subset G_j$ другої категорії в кожній компоненті G_j є гомеоморфізмом.*

У повному метризованому просторі будь-яке B-вимірне відображення неперервне на G_δ-множині другої категорії. При цьому, як відомо, G_δ-множина є топологічно повним простором. До того ж, кожний повний сепарабельний нульвимірний незліченний простір являє собою об'єднання деякої зліченної множини і множини, що гомеоморфна берівському простору $\mathcal{N}$ [4, с. 455]. Якщо тепер вилучити належним чином підібрану множину першої категорії з такого нульвимірного простору, то замість B-вимірного відображення можна розглядати неперервне відображення, задане у просторі $\mathcal{N}$.

Образ $f(\mathcal{N})$ при зліченнократному неперервному відображенні f є борельовою множиною [4, с. 508]. Як метричний простір, множина $f(\mathcal{N})$ гомеоморфна деякій множині гільбертового простору і тому можна вважати, що вона зліченновимірна. Тоді множину $f(\mathcal{N})$ можна записати як скінченну або зліченну суму нульвимірних множин. Повторюючи далі в точності доведення Теореми 1, приходимо до такої теореми.

Теорема 3. *При зліченнократному B-вимірному відображенні f повного сепарабельного нульвимірного незліченного простору X існує множина першої категорії $D \subset X$ така, що множина точок локального гомеоморфізму звуження відображення $f\ |_{X \setminus D}$ на доповнення $X \setminus D$ всюди щільна у $X \setminus D$.*

Література

[1] *Александров П. С.* Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств. — М.: Наука, 1978. — 416 с.

[2] *Лузин Н. Н.*, Лекции об аналитических множествах и их приложениях. — М.: Гостехиздат, 1953. — 360 с.

[3] *Трохимчук Ю. Ю.* Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности // Праці Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2008. — **70**. — 539 с.

[4] *Куратовский К.* Топология. В 2-х т. — М.: Мир, 1966. — Т. 1 — 596 с.

[5] *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. — М.: Наука, 1973. — 576 с.

[6] *Куратовский К.* Топология. В 2-х т. — М.: Мир, 1969. — Т. 2 — 624 с.