Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 14, № 1, 222–229

УДК 517.51

В. М. Сафонов

(*Національний університет харчових технологій, Київ*)
safonov_v_m@ukr.net

Про функції першого класу Бера з властивістю Дарбу

Присвячено 70-річчю професора Юрія Борисовича Зелінського

Досліджуються на відрізку функції першого класу Бера з властивістю Дарбу, що мають скрізь множину зліченних рівнів другої категорії. Доведено, що існує щільна на відрізку відкрита множина, у кожному інтервалі якої ніде не стала функція строго монотонна і неперервна.

The Baire class one functions with the Darboux property and a set of countable levels of the second category are researched on closed interval. We proved that there exists a dense open set on this interval such that nowhere constant function is strictly monotonic and continuous on each subinterval of the set.

Якщо на відрізку задана функція $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, то множину $f^{-1}(y) = \{x : f(x) = y, x \in [a,b]\}$ називають *рівнем* функції f, що відповідає значенню y, $\inf_{x\in[a,b]} f(x) \le y \le \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Рівні неперервної функції являють собою замкнені множини в $[a,b]$, скінченні або нескінченні. Приклади показують, що існують неперервні функції, у яких всі рівні не тільки нескінченні, але і незліченні. Більш того, існують функції, у яких всі рівні навіть не містять ізольованих точок. Знання багатьох властивостей множини всіх рівнів функції часто дають змогу охарактеризувати її особливості.

Особливу увагу привертають зліченнократні відображення. Відома теорема [1, стор. 523] стверджує, що кожне зліченнократне відображення $f : D \to \mathbb{R}^n_1$, $D \subset \mathbb{R}^n$ має скрізь щільну множину точок локального гомеоморфізму. Виявляється, що зліченну кратність відображення можна припустити лише на деякій множині скрізь другої категорії на $f(D)$ [2, стор. 527].

Що стосується одновимірного випадку, то висновок з цієї теореми для нульвимірного неперервного відображення зводиться до існування скрізь щільної на заданому відрізку скінченної або зліченної послідовності інтервалів попарно без спільних точок, в кожному з яких відображення є строго монотонним.

У цій роботі переконаємось, що умови наведеної теореми можна послабити. Твердження теореми в одновимірному випадку залишається справедливим для такого класу функцій як функції першого класу Бера з властивістю Дарбу.

Тепер сформулюємо і доведемо основну теорему.

Теорема 1. *Нехай $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ — ніде не стала функція першого класу Бера з властивістю Дарбу, яка має множину зліченних рівнів E скрізь другої категорії. Тоді існує відкрита щільна множина $G = \cup_i G_i \subset [a,b]$, в кожній компоненті G_i якої функція f строго монотонна і неперервна.*

Виберемо прямокутну систему координат у двовимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$ і позначимо її осі через $\mathbb{R}_1$ і $\mathbb{R}_2$. При доведенні теореми скористаємось таким. Оскільки функція f на відрізку $[a,b]$ задовольняє властивість Дарбу і не має жодного інтервалу сталості, то образ $f([\alpha,\beta]) \subseteq \mathbb{R} = \mathbb{R}_2$ довільного відрізка $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b] \subset \mathbb{R}_1$ є зв'язною множиною — деяким проміжком, скінченним або нескінченним на осі $\mathbb{R}_2$.

Доведення основної теореми опирається на такі твердження.

Лема 1. *Нехай функція першого класу Бера $f(x)$, $x \in [a,b]$ задовольняє властивість Дарбу. Якщо довільна зв'язна підмножина $\Delta \subset f([a,b])$ містить дві точки y_1 і y_2 такі, що об'єднання $f^{-1}(y_1) \cup f^{-1}(y_2)$ є щонайбільше зліченною множиною, то існує інтервал $\delta \subset [a,b]$, на якому повний прообраз $f^{-1}(\Delta)$ всюди щільний (і більш того, другої категорії).*

Доведення. Для доведення леми досить показати, що повний прообраз $f^{-1}((y_1,y_2))$ інтервала $(y_1,y_2) \subset \Delta \subset \mathbb{R}_2$ є щільною множиною на деякому інтервалі $\delta \subset [a,b] \subset \mathbb{R}_1$. Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що за умови зліченності множини $f^{-1}(y_1) \cup f^{-1}(y_2)$ повний прообраз $\varepsilon = f^{-1}((y_1,y_2)) \subset [a,b]$ ніде не щільний.

Повний прообраз $f^{-1}([y_1, y_2])$ відрізка $[y_1, y_2] \subseteq \Delta$ є незліченною G_δ-множиною на $[a, b]$ (див. [3, с. 382]). Оскільки $f^{-1}(y_1) \cup f^{-1}(y_2)$ — злічення множина, то множина ε є (абсолютною) G_δ-множиною. При цьому множина ε не містить ізольованих точок. Справді, для деякої ізольованої точки $x' \in \varepsilon$ знайдеться відрізок $\sigma \subset [a, b]$ такий, що $\sigma \cap \varepsilon = \{x'\}$. Тоді, приймаючи до уваги властивість Дарбу, дістанемо $f(\sigma) \cap ((y_1, y_2) \setminus \{f(x')\}) \neq \varnothing$, що суперечить рівності $\sigma \cap (\varepsilon \setminus \{x'\}) = \varnothing$.

Візьмемо замикання $\overline{\varepsilon} \subset [a, b]$ множини ε. Множина ε другої категорії на $\overline{\varepsilon}$. Оскільки f-функція першого класу на досконалій множині $\overline{\varepsilon}$, то існує множина $Q \subset \overline{\varepsilon}$ скрізь другої категорії на $\overline{\varepsilon}$ точок неперервності звуження $f|_{\overline{\varepsilon}}$ функції f на множину $\overline{\varepsilon}$. Звідси випливає, що перетин $\varepsilon \cap Q \neq \varnothing$ (множина $\varepsilon \cap Q$ навіть незліченна, як множиною другої категорії на $\overline{\varepsilon}$). Отже, знайдеться точка $x_0 \in \varepsilon \cap Q$, причому її образ $y_0 = f(x_0) \in (y_1, y_2)$. Тоді, внаслідок попереднього, для деякого околу $V(y_0)$, $\overline{V(y_0)} \subset (y_1, y_2)$ образа y_0 точки x_0 існує окіл цієї точки $U(x_0) \subset [a, b]$ такий, що для всіх $x \in U(x_0) \cap \overline{\varepsilon}$ маємо $f(x) \in V(y_0)$.

Виберемо відрізок $\tau \subset U(x_0)$, для якого $\tau \cap \overline{\varepsilon} \neq \varnothing$. Множина $\overline{\varepsilon}$ ніде не щільна на відрізку τ, тому виконується $\tau \setminus \overline{\varepsilon} \neq \varnothing$. Враховуючи те, що функція f задовольняє властивість Дарбу, дістанемо $f(\tau) \cap ((y_1, y_2) \setminus \overline{V(y_0)}) \neq \varnothing$, всупереч включенню $\tau \cap \overline{\varepsilon} \subset U(x_0)$.

Таким чином, існує інтервал $\delta \subset [a, b]$, на якому G_δ-множина $\delta \cap \varepsilon$ скрізь щільна і тому другої категорії. Лема доведена.

Лема 2. *Нехай $f(x)$, $x \in [a, b]$ — функція першого класу з властивістю Дарбу, причому множина її зліченних рівнів E скрізь щільна. Якщо підмножина $A \subset [a, b]$ щільна, то її образ $f(A)$ є щільним на множині $f([a, b])$.*

Доведення. Припустимо супротивне. Тоді існує щільна підмножина $A_0 \subset [a, b]$ така, що її образ $f(A_0)$ не є скрізь щільним на множині $f([a, b])$. Враховуючи те, що множина зліченних рівнів E функції f щільна на $f([a, b])$, знайдемо відрізок $[y_1, y_2] \subset f([a, b]) \setminus f(A_0)$, де $y_1, y_2 \in E$.

Згідно з лемою 1, існує інтервал $\delta \subset [a, b]$, на якому повний прообраз $f^{-1}([y_1, y_2])$ скрізь щільний. Зважаючи на те, що множина A_0 щільна на $[a, b]$ і функція f задовольняє властивість Дарбу, маємо щільну на інтервалі δ зліченну множину $f^{-1}(y_1) \cup f^{-1}(y_2)$. Оскільки будь-який рівень функції першого класу є G_δ-множиною, то множина $f^{-1}(y_1) \cup f^{-1}(y_2)$ другої категорії на δ і, отже, вона незліченна. Отримана суперечність доводить лему 2.

Розглянемо тепер ніде не сталу функцію $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, яка задовольняє умови леми 2. Якщо $D \subset f([a,b])$ — ніде не щільна підмножина, то її повний прообраз $f^{-1}(D)$ ніде не щільний на $[a,b]$. Справді, припускаючи супротивне, знайдемо замкнений інтервал $\overline{\delta} \subset [a,b]$ такий, що множина $A = \overline{\delta} \cap f^{-1}(D)$ щільна на $\overline{\delta}$. Оскільки функція f не має інтервалів сталості, то згідно з лемою 2, образ $f(A) \subset D$ множини A щільний на (зв'язній) множині $f(\overline{\delta}) \subset f([a,b])$. Але це суперечить тому, що множина D ніде не щільна на $f(\overline{\delta})$.

Підмножина першої категорії $R \subset f([a,b])$ може бути зображеною у вигляді об'єднання $R = \cup_i D_i$ зліченної множини ніде не щільних множин $D_i \subset f([a,b])$, $i = 1,2,\ldots$. Тоді, внаслідок попереднього, кожний повний прообраз $f^{-1}(D_i)$, $i = 1,2,\ldots$, є ніде не щільною множиною на відрізку $[a,b]$. При цьому маємо

$$f^{-1}(R) = \cup_i f^{-1}(D_i)$$

і, отже, $f^{-1}(R)$ — множина першої категорії на $[a,b]$.

Враховуючи те, що у повних метричних просторах доповнення до будь-якої множини першої категорії є множиною скрізь другої категорії, приходимо до такого твердження.

Лема 3. *Нехай $f(x)$, $x \in [a,b]$ — ніде не стала функція, для якої виконуються умови леми 2 і $M \subset f([a,b]) \subseteq \mathbb{R}_2$. Якщо множина M має одну з властивостей*:

- *є ніде не щільною множиною,*
- *множиною першої категорії,*
- *множиною другої категорії,*

то її повний прообраз $f^{-1}(M) \subset [a,b] \subset \mathbb{R}_1$ має відповідну властивість.

З леми 3 випливає твердження.

Лема 4. *Якщо для ніде не сталої функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ виконуються умови леми 2 і $A \subset [a,b]$ — підмножина скрізь другої категорії, то її образ $f(A)$ — множина не першої категорії на $f([a,b])$.*

Враховуючи усі доведені вище леми, приходимо до наступного твердження.

Лема 5. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді образ* $f(C)$ *множини* $C \subset [a, b]$ *точок неперервності функції* f *є множиною всюди другої категорії на* $f([a, b])$.

Доведення. За умовою теореми множина зліченних рівнів E функції f другої категорії на $f([a, b])$. Тоді, згідно з лемою 3, її повний прообраз $f^{-1}(E)$ є множиною другої категорії на $[a, b]$. З іншого боку, оскільки f є функцією першого класу Бера, то множина $C \subset [a, b]$ її точок неперервності всюди другої категорії. Тому перетин $C \cap f^{-1}(E)$ містить G_δ-множину H другої категорії на інтервалі (a, b). При цьому звуження $f|_H$ функції f на множину H є зліченнократним і неперервним.

Візьмемо довільний інтервал $e \subset f([a, b])$. Оскільки за лемою 2 множина $f(H)$ скрізь щільна на $f([a, b])$, то $e \cap f(H) \neq \varnothing$. Нехай маємо $y_0 \in e \cap f(H)$. Виберемо точку $x_0 \in H \cap f^{-1}(y_0) \subset (a, b)$ та інтервал $\delta \subset [a, b]$ такі, що $x_0 \in \delta$ і $f(\overline{\delta}) \subset e$.

Беручи до уваги попереднє, маємо G_δ-множину $H \cap \overline{\delta}$ другої категорії на замкненому інтервалі $\overline{\delta}$, причому функція f на цій множині є зліченнократною і неперервною. Тому образ $f(H \cap \overline{\delta})$ — борельова множина [3, с. 508-509], яка, згідно з лемою 4, не першої категорії на $f(\overline{\delta})$ і, отже, другої категорії на деякому інтервалі $e' \subset f(\overline{\delta}) \subset e \subset f([a, b])$.

Внаслідок довільності вибору інтервала $e \subset f([a, b])$, існує щільна на $f([a, b])$ відкрита множина $V = \cup_i V_i \subset f([a, b])$, в кожній компоненті V_i якої множина $f(H)$ другої категорії. Звідси випливає, що $f(C)$ — множина другої категорії на $f([a, b])$.

Лема 5 доведена.

Зауваження 1. *Очевидно, що твердження леми 5 залишається справедливим для будь-якої підмножини* $C' \subset C$ *другої категорії на відрізку* $[a, b]$.

Зараз ми вже спроможні довести основну Теорему 1.

Доведення теореми 1. Нехай, як у лемі 5, C — множина точок неперервності функції f і $H \subseteq C \cap f^{-1}(E)$ — G_δ-множина (другої категорії) на відрізку $[a, b]$. При цьому на множині H функція f є неперервною і зліченнократною.

Нехтуючи раціональними точками, візьмемо на осях системи координат множини ірраціональних точок $\mathcal{N}_1 \subset \mathbb{R}_1$ і $\mathcal{N}_2 \subset \mathbb{R}_2$. Розглянемо на площині $\mathbb{R}^2$ графік $B(f)$ звуження $f|_H$ функції f на множину H.

Внаслідок гомеоморфності множин H і $B(f)$ [3, с. 148], остання з них є незліченною G_δ-множиною у просторі $\mathbb{R}^2$.

Кожній точці проекції множини $B(f)$ на вісь $\mathbb{R}_2$ відповідає не більше, ніж зліченна множина точок графіка функції $f|_H$. Отже, G_δ-множину $B = (\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2) \cap B(f)$ можна зобразити у вигляді об'єднання $B = \cup_k B_k$ скінченної або зліченної множини попарно без спільних точок і однозначних відносно осі $\mathbb{R}_2$ борельових множин B_k, $k = 1, 2, \ldots$ (див. [4, с. 244]). Позначимо через H'_k проекцію множини B_k, $k = 1, 2, \ldots$ на вісь $\mathbb{R}_1$. З попереднього випливає, що $H' = \cup_k H'_k \subset H$ є G_δ-множиною другої категорії на $[a, b]$, причому $H'_k \cap H'_l = \varnothing$ при $k \neq l$ і функція f на кожній борельовій множині H'_k, $k = 1, 2, \ldots$, неперервна і взаємно однозначна.

Нехай $\lambda \subset [a, b]$ — довільний інтервал. Оскільки перетин $\lambda \cap H'$ є G_δ-множиною другої категорії на інтервалі λ, то існує (очевидно, борельова) множина H'_k, яка не першої категорії на λ і тому за властивістю Бера вона другої категорії на деякому інтервалі $\lambda' \subset \lambda$. Внаслідок довільності інтервала λ знайдеться щільна на $[a, b]$ відкрита множина $G = \cup_i G_i \subset [a, b]$, в кожній компоненті G_i якої одна множина з системи множин $\{H'_1, H'_2, \ldots, H'_k, \ldots\}$ має скрізь другу категорію.

Таким чином, існують підмножини $H_i \subset G_i \cap H' \subset G_i$, $i = 1, 2, \ldots$, всі другої категорії (на відповідних множинах G_i), на кожній з яких звуження функції $f|_{H_i}$ є неперервним і взаємно однозначним.

Переконаємось в тому, що функція f на кожній множині G_i, $i = 1, 2, \ldots$, є строго монотонною. При цьому зрозуміло, що характер монотонності на множинах $G_1, G_2, \ldots, G_i, \ldots$, може бути різним.

Припустимо, що насправді це не так. Тоді існують деякий інтервал $\delta \subset G_i$ і точки $x_1 < x_2 < x_3$, $\{x_1, x_2, x_3\} \subset \delta$ такі, що $f(x_1) < f(x_2)$ і $f(x_2) > f(x_3)$ або $f(x_1) > f(x_2)$ і $f(x_2) < f(x_3)$.

Візьмемо відрізки $[x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \subset \delta$ та їхні образи $f([x_1, x_2])$ і $f([x_2, x_3])$. Враховуючи властивість Дарбу, знайдемо за припущенням інтервал $\Delta \subset f([x_1, x_2]) \cap f([x_2, x_3]) \setminus \{f(x_2)\} \neq \varnothing$. Оскільки підмножини $H_i \cap [x_1, x_2] \subset [x_1, x_2]$ і $H_i \cap [x_2, x_3] \subset [x_2, x_3]$ всюди другої категорії на відповідних відрізках, то, згідно з зауваженням 1 до леми 5, їхні образи $f(H_i \cap [x_1, x_2])$, $f(H_i \cap [x_2, x_3])$ другої категорії на Δ. Звідси маємо $f(H_i \cap (x_1, x_2)) \cap f(H_i \cap (x_2, x_3)) \neq \varnothing$, всупереч тому, що функція $f|_{H_i}$ є взаємно однозначною.

Приймаючи до уваги властивість Дарбу і те, що будь-яка монотонна функція має лише точки розриву першого роду (множина цих точок щонайбільше зліченна), дістанемо неперервність функції f на кожній множині G_i, $i = 1, 2, \dots$.

Теорема доведена.

Відомо [5, с. 139], що точна похідна — функція першого класу Бера з властивістю Дарбу. Функція, яка має монотонну похідну на інтервалі, є опуклою (вниз або вгору) на цьому інтервалі. Нехай функція $f(x)$ диференційовна на відрізку $[a, b]$, причому її похідна $f'(x)$ має множину зліченних рівнів скрізь другої категорії. Тоді, враховуючи інтервали сталості похідної функції $f'(x)$, скористаємось теоремою 1 на кожному відрізку з $[a, b]$, де $f'(x)$ є ніде не сталою. Звідси відразу дістанемо доведення твердження, що дозволяє встановити опуклість диференційовної функції.

Теорема 2. *Якщо функція $f(x)$ диференційовна на відрізку $[a, b]$ і множина зліченних рівнів її похідної $f'(x)$ скрізь другої категорії, то існує щільна на $[a, b]$ послідовність неперетинних інтервалів $\{(a_i, b_i)\}$, на кожному з яких $f(x)$ є опуклою.*

З теоремою 1 тісно пов'язане таке твердження.

Теорема 3. *Нехай функція першого класу Бера $f(x)$, $x \in [a, b]$ задовольняє властивість Дарбу. Якщо один з рівнів функції $f(x)$ — скрізь щільна множина на відрізку $[a, b]$, то всі її рівні $f^{-1}(y)$, $y \in \mathrm{Int} f([a, b])$ є незліченними.*

Доведення. Нехай для деякої точки $y_0 \in f([a, b])$ її повний прообраз $f^{-1}(y_0)$ — множина скрізь щільна на відрізку $[a, b]$. Тоді, будучи рівнем функції першого класу, множина $f^{-1}(y_0)$ є G_δ-множиною і тому вона скрізь другої категорії на $[a, b]$.

Припустимо, що існують відрізок $[y_1, y_2] \subset f([a, b])$ та точка $y^* \in (y_1, y_2)$ такі, що $y_0 \notin [y_1, y_2]$ і $f^{-1}(y^*)$ — зліченна множина. Для визначеності обмежимось випадком $y_0 < y^*$. У разі, коли $y_0 > y^*$, доведення аналогічне.

Візьмемо відрізок $[y^*, y_2]$. Оскільки f — функція першого класу Бера, то його повний прообраз $f^{-1}([y^*, y_2])$ є G_δ-множиною. Вилучивши зліченну множину $f^{-1}(y^*)$, розглянемо G_δ-множину ε таку, що $\varepsilon = f^{-1}((y^*, y_2])$. Тоді, запровадивши в точності таку саму схему міркувань, як при доведенні леми 1, не важко впевнитись в тому, що знайдеться інтервал $\delta \subset [a, b]$, на якому множина ε скрізь другої категорії. Але це не може трапитись. Бо тоді маємо $\delta \supset f^{-1}(y_0) \cap \varepsilon \neq \varnothing$, всупереч тому, що $y_0 \notin [y^*, y_2]$. Теорема доведена.

Література

[1] *Трохимчук Ю. Ю.* Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности // Праці Ін-ту математики НАН України. — К.: Інститут математики НАН України, 2008. — **70**. — 539 с.

[2] *Трохимчук Ю. Ю., Сафонов В. М.* О множестве второй категории счетных уровней непрерывных отображений // Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування /. — К.: Ін-т математики НАН України, 2013.— **10**, №4-5. — С. 526 – 531.

[3] *Куратовский К.* Топология. В 2-х т. — М.: Мир, 1966. — Т. 1. — 595 с.

[4] *Лузин Н. Н.* Лекции об аналитических множествах и их приложениях. — М.: ГИТТЛ, 1953. — 360 с.

[5] *Куратовский К.* Топология. В 2-х т. — М.: Мир, 1969. — Т. 2. — 624 с.