Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 14, № 1, 156–162

УДК 517.54

Я. В. Заболотний

(*Інститут математики НАН України, Київ*)

yaroslavzabolotnii@mail.ru

Оцінки максимума добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей на $\mathbb{C}$

Присвячено 70-річчю професора Юрія Борисовича Зелінського

У даній роботі розглядається відома проблема В. М. Дубиніна про неперетинні області на комплексній площині і знайдено її розв'язок для $n \in \{6{,}7{,}8\}$ за певних обмежень на показник степеня γ.

We consider some problem on non-overlapping domains in the complex plane and we give solution of this problem for $n \in \{6{,}7{,}8\}$ under some restrictions on a power γ.

У геометричній теорії функцій комплексної змінної важливе місце посідають задачі про екстремальне розбиття комплексної площини. Задачі даного типу в основному зводяться до визначення максимуму добутку внутрішніх радіусів на системах попарно неперетинних областей, для яких виконуються певні умови.

З даного напрямку відзначимо, наприклад, роботи [1–4]. Було отримано багато вагомих результатів, але в той же час значна кількість задач не розв'язана і досі. Одній з таких задач (сформульована у роботі [1]) і присвячена ця робота.

Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ — множини натуральних і комплексних чисел відповідно, $n \in \mathbb{N}$, B_j — область в $\overline{\mathbb{C}}$, $r(B_j,a_j)$ — внутрішній радіус області B_j у точці a_j (див., наприклад, [1–4]), $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Задача 1. *Знайти максимум виразу*

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0,a_0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k), \tag{1}$$

де $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$, $n \geq 2$, *є попарно неперетиними областями в* $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $\gamma \leq n$, *а також описати екстремальні конфігурації областей.*

В роботі [2] було розв'язано дану задачу для $\gamma = 1$ і всіх $n \geq 2$. В роботі [5] було знайдено частковий розв'зок задачі Дубиніна при умові, що $n \geq 5$ і $\alpha_k\sqrt{\gamma} \leq 2$, де числа α_k означаються таким чином:

$$\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1),\ \alpha_2 := \frac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2), \ldots, \alpha_n := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n).$$

В роботі [3] задачу 1 було розв'язано для всіх $\gamma > 1$, але починаючи з деякого, заздалегідь невідомого номера n. У роботі [6] було знайдено частковий розв'зок задачі 1 для $n \geq 5$ і $1 < \gamma \leq n^{0.38}$, а в [7] — для $n \geq 8$ і $1 < \gamma \leq n^{0.42}$.

Для опису екстремальних конфігурацій областей ми будемо використовувати квадратичний диференціал (див., наприклад, [3, с. 63-70]).

В даній роботі отримано наступний результат:

Теорема 1. *Нехай* $n = 6,7,8$, $\gamma_6 = 2.49$, $\gamma_7 = 2.67$, $\gamma_8 = 2.84$. *Тоді для довільного* $1 < \gamma \leq \gamma_n$ *виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0,a_0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leq r^{\gamma}(D_0,d_0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k,d_k),$$

де $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$, $n \geq 2$, *є попарно неперетиними областями в* $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B_j,a_j)$ *є внутрішнім радіусом області* B_j *у точці* a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0,n}$; d_k, D_k *— відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2. \tag{2}$$

Доведення. Зауважимо, що випадок $\alpha_k\sqrt{\gamma} \leq 2$ був розглянутий в роботі [5]. Тому нам залишається довести правильність теореми для $\alpha_k\sqrt{\gamma} > 2$. Всі подальші міркування стосуються саме даного випадку.

Метод доведення спирається на застосування методу розділяючого перетворення областей, який детально розроблений в роботі [2].

Згідно з умовою задачі, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$. Припустимо, для конкретності, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \cdots < \arg a_n < 2\pi.$$

Нехай

$$P_k := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}, k = \overline{1,n}, \arg a_{n+1} = 2\pi,$$

$$P_0 := P_n,\ P_{n+1} := P_1,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 2.$$

При кожному $k = \overline{1,n}$ позначимо через $z_k(w)$ ту вітку многозначної аналітичної функції $z = -i(e^{-i\arg a_k} w)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $z_0 := z_n$, $z_{n+1} := z_1$, яка конформно і однолисно відображає області P_k, $k = \overline{1,n}$, на праву півплощину $\mathrm{Re} z > 0$

Тоді для областей B_k, $k = \overline{1,n}$, таких, як і в Задачі 1, позначимо через $D_k^{(1)}$ об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k(B_k \cap \overline{P_k})$, що містить точку $z_k(a_k)$ з її відображенням відносно уявної осі, а через $D_{k-1}^{(2)}$ — об'єднання зв'язної компоненти множини $z_{k-1}(B_k \cap \overline{P_{k-1}})$, що містить точку $z_{k-1}(a_k)$ з її відображенням відносно уявної осі, $D_0^{(2)} := D_2^{(2)}$. Сім'ю двох симетричних відносно уявної осі областей $\{D_k^{(1)}; D_{k-1}^{(2)}\}$, будемо називати результатом розділяючого перетворення області B_k. Для утворених областей, згідно з Теоремою 3 роботи [2], а також враховуючи результат [3, Теорема 5.1.1], правильні наступні нерівності:

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leq \prod_{k=1}^{n} \alpha_k (r(D_{k+1}^{(i)},i) r(D_k^{(2)},-i))^{\frac{1}{2}} \leq 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k. \qquad (3)$$

Аналогічно проводиться розділяюче перетворення області B_0, і отримуємо нерівність

$$r(B_0,0) \leq \prod_{k=1}^{n} (r(D_0^{(k)};0)^{\frac{\alpha_k^2}{2}}.$$

Вираз (1) запишемо в наступному вигляді:

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0,a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} (r(B_0,a_0) r(B_k,a_k) r(B_{k+1},a_{k+1}) \right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \right)^{1-\frac{2\gamma}{n}},$$

де $B_{n+1} := B_1$, $a_{n+1} := a_1$ і, відповідно, $r(B_{n+1},a_{n+1}) = r(B_1,a_1)$.

Використовуючи теорему Голузіна [8, с. 165.], отримаємо наступні оцінки:

$$r(B_0,a_0) \cdot r(B_k,a_k) \cdot r(B_{k+1},a_{k+1}) \leq$$

$$\leq \frac{64}{81\sqrt{3}} \cdot |a_k - a_0| \cdot |a_{k+1} - a_0| \cdot |a_{k+1} - a_k| = \frac{64}{81\sqrt{3}} \cdot |a_{k+1} - a_k|.$$

Звідси будемо мати:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} (r(B_0,a_0) \cdot r(B_k,a_k) r(B_{k+1},a_{k+1}) \right)^{\frac{\gamma}{n}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{64}{81\sqrt{3}} \right)^{\gamma} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_{k+1} - a_k| \right)^{\frac{\gamma}{n}}. \qquad (4)$$

Використовуючи (3), отримаємо:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \right)^{1-\frac{2\gamma}{n}} \leqslant \left[2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right]^{1-\frac{2\gamma}{n}} \leqslant \left[2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1} \right)^{n-1} \right]^{1-\frac{2\gamma}{n}} <$$

$$< \left[\frac{2^{n+1}}{(n-1)^{n-1}\sqrt{\gamma}} \cdot \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \right)^{n-1} \right]^{1-\frac{2\gamma}{n}}. \qquad (5)$$

Враховуючи (4) і (5), а також те, що $\alpha_k > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, отримаємо наступну нерівність:

$$I_n(\gamma) < \left(\frac{64}{81\sqrt{3}} \right)^{\gamma} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_{k+1} - a_k| \right)^{\frac{\gamma}{n}} \times$$

$$\times \left[\frac{2^{n+1}}{(n-1)^{n-1}\sqrt{\gamma}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \right)^{n-1} \right]^{1-\frac{2\gamma}{n}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{64}{81\sqrt{3}} \right)^{\gamma} \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{n-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \right) \right)^{\frac{(n-1)\gamma}{n}} \left(2 \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \right)^{\frac{\gamma}{n}} \times$$

$$\times \left[\frac{2^{n+1}}{(n-1)^{n-1}\sqrt{\gamma}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \right)^{n-1} \right]^{1-\frac{2\gamma}{n}} =: J_n(\gamma).$$

Нехай $I_n^0(\gamma)$ — значення функціонала $I_n(\gamma)$ для областей D_k і точок d_k, згаданих в умові теореми. Тоді, згідно з [3, Теорема 5.2.3], виконується рівність:

$$I_n^0(\gamma) = r^{\gamma}\left(D_0{,}0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k{,}d_k\right) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}, \tag{6}$$

де D_k — згадані вище кругові області квадратичного диференціала (2).

Тоді

$$\frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} < \frac{J_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)}.$$

Перейдемо до розгляду конкретних значень n.

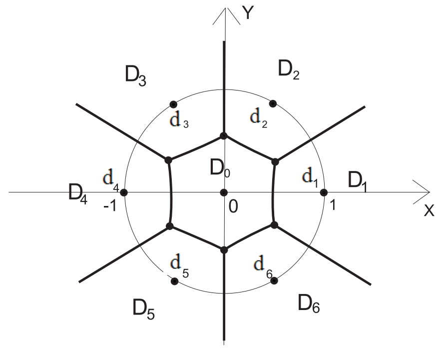
Розглянемо випадок $n = 6$. Для $\gamma = 2.49$, враховуючи (6), отримаємо, що $\frac{J_6(2.49}{I_6^0(2.49)} < 0.988 < 1$, аб значить, для даних значень n і γ для довільної конфігурації областей B_k і точок a_k, які задовольняють усі умови теореми 1, виконується нерівність $I_6(2.49) < I_6^0(2.49)$, тобто для $\gamma = 2.49$ теорема доведена.

Нехай тепер $1 < \gamma < 2.49$. Зауважимо, що функція $J_6(\gamma)$ монотонно зростає на даному проміжку, а отже $J_6(\gamma) < J_6(2.49)$. У той же час, функція $I_6^0(\gamma)$ монотонно спадає, а отже $I_6^0(\gamma) > I_6^0(2.49)$. Підсумовуючи вище сказане, для довільного γ такого, що $1 < \gamma < 2.49$ виконуються наступні нерівності:

$$\frac{I_6(\gamma)}{I_6^0(\gamma)} < \frac{J_6(\gamma)}{I_6^0(\gamma)} < \frac{J_6(2.49)}{I_6^0(2.49)} < 1.$$

Отже, для $n = 6$ і $1 < \gamma < 2.49$ для довільної конфігурації областей B_k і точок a_k, які задовольняють всі умови теореми 1, виконується нерівність $I_6(\gamma) < I_6^0(\gamma)$, тобто для $n = 6$ теорема доведена.

Нехай тепер $n = 7$. Для $\gamma = 2.67$ отримаємо, що $J_7(2.67)/I_7^0(2.67) < < 0.995 < 1$, отже, для даних значень n і γ для довільної конфігурації областей B_k і точок a_k, які задовільняють усі умови Теореми 1, виконується нерівність $I_7(2.67) < I_7^0(2.67)$, тобто для $\gamma = 2.67$ теорема доведена.



Мал. 1: Структура траєкторій квадр. диференц. (2) при $n = 6$

Випадок $n = 7$ і $1 < \gamma < 2.67$ розглядається аналогічно до випадку $n = 6$.

Для $n = 8$ і $\gamma = 2.84$ отримаємо, що $J_8(2.84)/I_8^0(2.84) < < 0.991 < 1$, і аналогічними міркуваннями, щодо попередніх випадків, показуємо, що твердження теореми правильне як для $\gamma = 2.84$, так і для $1 < \gamma < 2.84$.

Теорему доведено.

Автор висловлює подяку професору О. К. Бахтіну за постановку задачі, а також за цінні поради та зауваження щодо написання цієї роботи.

Література

[1] *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1994. — **49**, № 1(295). — С. 3 – 76.

[2] *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — **168**. — С. 48 – 66.

[3] *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Топологоалгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2008. — 308 с.

[4] *Кузъмина Г. В.* Методы геометрической теории функций // Алгебра и анализ. — 1997. — **9**, № 5. — С. 1 – 50.

[5] *Ковалев Л. В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальнев. матем. сб. — 1996. — **2**. — С. 96 – 98.

[6] *Бахтин А. К., Денега И. В.* Об одной проблеме В.Н. Дубинина // Зб. праць Ін-ту математики НАН України /Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування/. — К.: Ін-т математики НАН України, 2013. — **10**, №4-5. — С. 401 – 411.

[7] *Бахтин А. К., Вьюн В. Е., Таргонский А. Л.* Неравенства для внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей // Зб. праць Ін-ту математики НАН України /Аналіз та застосування/. — К.: Ін-т математики НАН України, 2015. — **12**, №3. — С. 38 – 46.

[8] *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 628 с.