Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 14, № 1, 128–139

УДК 517.5 + 517.95

*С. В. Грищук*

(*Інститут математики НАН України, Київ*)

**gryshchuk@imath.kiev.ua, serhii.gryshchuk@gmail.com**

# Одновимірність ядра системи інтегральних рівнянь Фредгольма для однорідної бігармонічної задачі

*Присвячено 70-річчю професора Юрія Борисовича Зелінського*

Встановлено достатню умову (що узагальнює попередні спільні результати автора та проф. С. А. Плакси), при виконанні якої розмірність лінійного простору розв'язків системи інтегральних рівнянь Фредгольма для однорідної бігармонічної крайової задачі дорівнює одиниці.

A condition (doing a generalization of [Theorem 7.11, Gryshchuk S. V., Plaksa S. A. Monogenic functions in the biharmonic boundary value problem // Math. Meth. Appl. Sci. — 2016. — **39**(11): 2939 – 2952]) under which a dimension of the linear space of solutions for a system of the Fredholm integral equations (associated with the homogeneous biharmonic boundary value problem) equals one is found.

**1. Моногенні функції зі значеннями у бігармонічній алгебрі.** Асоціативну комутативну над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ алгебру другого рангу з одиницею, згідно з роботою [1], будемо називати *бігармонічною*, якщо вона містить базис $\{e_1, e_2\}$, що задовольняє вимоги

$$(e_1^2 + e_2^2)^2 = 0, \qquad e_1^2 + e_2^2 \neq 0, \tag{1}$$

який також будемо називати *бігармонічним.*

Ця алгебра єдина [1] і асоційована з плоским бігармонічним рівнянням. Обмежимось надалі розглядом бігармонічного базису $\{e_1, e_2\}$ (див. [2]) з наступною таблицею множення:

$$e_1^2 = e_1, \quad e_2 e_1 = e_2, \quad e_2^2 = e_1 + 2ie_2,$$

де $i$ — уявна комплексна одиниця.

Позначимо через $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ розширену комплексну площину; $\operatorname{Re} z$ і $\operatorname{Im} z$ — дійсну та уявну частини для $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z \equiv \equiv x + iy \in \overline{\mathbb{C}}$, відповідно. Розглянемо $\mu := \{\zeta = x\, e_1 + y\, e_2 : z = x + iy \in \overline{\mathbb{C}}\}$. *Нескінченно віддалена точка* $\zeta = \infty \in \mu$: відповідна їй $z = \infty \in \overline{C}$. Під $\overline{G}$ розуміємо замикання довільної області $G$, що належить $\mu$ або декартовій площині $xOy$.

Області $D$ декартової площини $xOy$ поставимо у відповідність конгруентну їй область $D_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 : (x, y) \in D\} \subset \mu$.

Надалі вважаємо, що $\zeta = xe_1 + ye_2 \in \overline{D_\zeta}$, $(x, y) \in \overline{D}$, $z = x + iy \in \overline{\mathbb{C}}$.

Введемо у розгляд евклідову норму:

$$\|A\| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2},\ A = z_1 e_1 + z_2 e_2 \in \mathbb{B},\ z_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2.$$

Функцію $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ будемо називати *моногенною* в області $D_\zeta$, якщо в кожній точці $\zeta \in D_\zeta$ існує похідна

$$\Phi'(\zeta) := \lim_{h \to 0,\, h \in \mu} \big(\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta)\big)\, h^{-1},$$

де $h^{-1}$ — обернений елемент до $h$.

Кожна функція $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ має вигляд

$$\Phi(\zeta) = U_1(x, y)\, e_1 + U_2(x, y)\, ie_1 + U_3(x, y)\, e_2 + U_4(x, y)\, ie_2, \qquad (2)$$

де $U_k\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1, 4}$

Введемо позначення: $\mathrm{U}_k\, [\Phi(\zeta)] := U_k(x, y)$, $k = \overline{1, 4}$.

**Критерій моногенності** ( [2] ):
*Функція* (2) *є моногенною в області* $D_\zeta$*, тоді і тільки тоді, коли її компоненти* $\mathrm{U}_k\, [\Phi(\zeta)]\, , k = \overline{1, 4}$*, диференційовні в* $D$ *і виконується наступний аналог умов Коші–Рімана:*

$$\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial y}\, e_1 = \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x}\, e_2 \equiv \Phi'(\zeta) e_2 \ \forall \zeta \in D_\zeta. \qquad (3)$$

У [3] встановлено, що моногенна функція $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ має неперервні похідні будь-якого порядку в області $D_\zeta$. Тому в силу рівності

$$\Delta^2\Phi := \frac{\partial^4\Phi(\zeta)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\Phi(\zeta)}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi(\zeta)}{\partial y^4} = \Phi^{(4)}(\zeta)(e_1^2+e_2^2)^2$$

і умови (1) кожна з її компонент $U_k(x,y)$, $k=\overline{1,4}$, є *бігармонічною функцією*, тобто задовольняє в області $D$ бігармонічне рівняння: $\Delta^2 U(x,y)=0$, де $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — лапласіан.

Доведено (див. [3–5]), що кожна бігармонічна функція в однозв'язній області є першою компонентою деякої моногенної функції, при цьому усі такі моногенні функції знайдено у явному вигляді.

**2. Крайова (k-m)-задача для моногенних функцій.** Розглянемо крайову задачу типу задачі Шварца для моногенних функцій $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ в області $D_\zeta$, яка полягає у знаходженні моногенної в $D_\zeta$ функції $\Phi$ за заданими граничними значеннями

$$U_j(x,y) := \mathrm{U}_j\left[\lim_{\tau\to\zeta\in\partial D_\zeta,\tau\in D_\zeta}\Phi(\tau)\right]$$

компонент $U_j$, $j=\{k,m\}$, $1\le k<m\le 4$, з розкладу (2):

$$U_k(x,y)=u_k(\zeta)\,,\quad U_m(x,y)=u_m(\zeta)\qquad \forall\,\zeta\in\partial D_\zeta, \tag{4}$$

де $u_k$ та $u_m$ — фіксовані дійснозначні функції межі $\partial D_\zeta$ області $D_\zeta$ (див. [6]).

В роботах [7, 8] доведено, що задача про знаходження пружньої рівноваги ізотропного тіла $D$ за заданими граничними значеннями частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ від зміщень $u$, $v$ на межі $\partial D$ еквівалентна (1-4)-задачі з відповідними крайовими умовами.

**3. Редукція бігармонічної крайової задачі до (1-3)-задачі.** Нехай тут і надалі $D$ — обмежена однозв'язна область площини $xOy$.

Розглянемо функції вигляду $W\colon D\longrightarrow\mathbb{R}$, кожна з яких є неперервною разом з частинними похідними першого порядку $\frac{\partial W}{\partial x}$ і $\frac{\partial W}{\partial y}$ у $D$, а, у свою чергу, кожна з функцій $W$, $\frac{\partial W}{\partial x}$ і $\frac{\partial W}{\partial y}$ неперервно продовжується на межу $\partial D$ області $D$. *Основна бігармонічна задача* (див., наприклад, [9, с. 13]) полягає у знаходженні бігармонічної функції

$W\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, коли її значення і значення її нормальної похідної задані на межі $\partial D$:

$$W(x_0, y_0) = \omega_1(s), \quad \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}}(x_0, y_0) = \omega_2(s) \qquad \forall\, (x_0, y_0) \in \partial D\,, \qquad (5)$$

де $s$ — дугова координата точки $(x_0, y_0) \in \partial D$.

У випадку, коли $\omega_1$ є неперервно диференційовною функцією, основна бігармонічна задача "еквівалентна" наступній *бігармонічній задачі* (термін вживається, наприклад, у [9, с. 13]):

знайти бігармонічну функцію $V\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, яка задовольняє наступні крайові умови

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),\,(x,y)\in D} \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = \omega_3(s)\,,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),\,(x,y)\in D} \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = \omega_4(s) \qquad \forall\, (x_0, y_0) \in \partial D\,, \qquad (6)$$

$$\int\limits_{\partial D} \Big(\omega_3(s) \cos\angle(\mathbf{s}, x) + \omega_4(s) \cos\angle(\mathbf{s}, y)\Big)\, ds = 0\,,$$

де функції $\omega_3$, $\omega_4$ зв'язані з функціями $\omega_1$, $\omega_2$ задачі (5) співвідношеннями (див. [10, с. 577]):

$$\omega_3(s) = \omega_1'(s) \cos\angle(\mathbf{s}, x) + \omega_2(s) \cos\angle(\mathbf{n}, x)\,,$$
$$\omega_4(s) = \omega_1'(s) \cos\angle(\mathbf{s}, y) + \omega_2(s) \cos\angle(\mathbf{n}, y)\,,$$

в яких $\mathbf{s}$ і $\mathbf{n}$ — відповідно одиничні вектори дотичної і зовнішньої нормалі до межі $\partial D$, а через $\angle(\cdot,\cdot)$ позначено кут між відповідним вектором ($\mathbf{s}$ або $\mathbf{n}$) і додатнім напрямком координатної осі ($x$ або $y$), зазначеними у дужках. Розв'язки задач (5) і (6) зв'язані рівністю $V(x, y) = W(x, y) + c$, де $c \in \mathbb{R}$.

Бігармонічна задача (6) редукується до (1-3)-задачі для моногенної в $D_\zeta$ функції $\Phi = \Phi_1'$, такої, що $V = \mathrm{U}_1\,[\Phi_1]$ (див. [6, 11, 12]).

**4. Редукція (1-3)-задачі до інтегральних рівнянь Фредгольма.** У [12] досліджено розв'язність (1-3)-задачі у формі гіперкомплексного інтеграла типу Коші

$$\Phi(\zeta) = \mathcal{B}\,[\varphi]\,(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_\zeta} \varphi(\tau)(\tau - \zeta)^{-1}\, d\tau \qquad \forall\, \zeta \in D_\zeta\,, \qquad (7)$$

де $\varphi(\tau) := \varphi_1(\tau)e_1 + \varphi_3(\tau)e_2$, $\tau \in \partial D_\zeta$, а функції $\varphi_1 \colon \partial D_\zeta \longrightarrow \mathbb{R}$ і $\varphi_3 \colon \partial D_\zeta \longrightarrow \mathbb{R}$ (а отже і $\varphi$) задовольняють умову типу Діні

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(\varphi,\eta)}{\eta}\, d\,\eta < \infty \tag{8}$$

для модуля неперервності

$$\omega(\varphi,\varepsilon) := \sup_{\tau_1,\tau_2\in\partial D_\zeta,\, \|\tau_1-\tau_2\|\le\varepsilon} \|\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2)\|.$$

Для розв'язання (1-3)-задачі використовується конформне відображення $z = \tau(t)$ верхньої напівплощини $\{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} t > 0\}$ на область $D_z := \{z = x + iy : xe_1 + ye_2 \in D_\zeta\}$. Позначимо $\tau_1(t) := \operatorname{Re}\tau(t)$, $\tau_2(t) := \operatorname{Im}\tau(t)$.

Оскільки вказане конформне відображення неперервно продовжується до гомеоморфізма замикань відповідних областей, то функція $\widetilde{\tau}(s)$, що визначається рівністю

$$\widetilde{\tau}(s) := \tau_1(s)e_1 + \tau_2(s)e_2 \ \forall\, s \in \overline{\mathbb{R}}, \tag{9}$$

здійснює гомеоморфне відображення розширеної дійсної осі $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ на криву $\partial D_\zeta$.

Умови на межу області $D_\zeta$ формулюються в термінах конформного відображення $\sigma(T)$ одиничного круга $\{T \in \mathbb{C} : |T| < 1\}$ на область $D_z$, такого, що $\tau(t) = \sigma\left(\frac{t-i}{t+i}\right)$ для всіх $t \in \{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} t > 0\}$.

За умов, що конформне відображення $\sigma(T)$ має відмінну від нуля контурну похідну $\sigma'(T)$ на одиничному колі $\Gamma := \{T \in \mathbb{C} : |T| = 1\}$ і її модуль неперервності

$$\omega_\Gamma(\sigma',\varepsilon) := \sup_{T_1,T_2\in\Gamma,\, |T_1-T_2|\le\varepsilon} |\sigma'(T_1) - \sigma'(T_2)|$$

задовольняє умову

$$\int\limits_0^2 \frac{\omega_\Gamma(\sigma',\eta)}{\eta}\, \ln\frac{3}{\eta}\, d\eta < \infty, \tag{10}$$

в [12] доведено, що розв'язність (1-3)-задачі у формі (7) еквівалентна розв'язності наступної системи інтегральних рівнянь Фредгольма:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\, g_1(t)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_1(s)\Big(\mathrm{Im}\, k_1(t,s)+2\mathrm{Re}\, k_2(t,s)\Big)\, ds- \\ -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_3(s)\mathrm{Im}\, k_2(t,s)\, ds=\widetilde{u}_1(t), \\ \frac{1}{2}\, g_3(t)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_3(s)\Big(\mathrm{Im}\, k_1(t,s)-2\mathrm{Re}\, k_2(t,s)\Big)\, ds- \\ -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_1(s)\mathrm{Im}\, k_2(t,s)\, ds=\widetilde{u}_3(t) \qquad \forall\, t\in\mathbb{R}\,,\end{gathered} \tag{11}$$

де $g_j(s) := \varphi_j\left(\widetilde{\tau}(s)\right)$ і $\widetilde{u}_j(t) := u_j\big(\widetilde{\tau}(t)\big)$ при $j \in \{1,3\}$,

$$k_1(t,s) := \frac{\tau'(s)}{\tau(s)-\tau(t)} - \frac{1+st}{(s-t)(s^2+1)}\,,$$

$$k_2(t,s) := \frac{\tau'(s)\big(\tau_2(s)-\tau_2(t)\big)}{2\big(\tau(s)-\tau(t)\big)^2} - \frac{\tau_2'(s)}{2\big(\tau(s)-\tau(t)\big)}\,.$$

Доведено також, що умова

$$\int\limits_{\partial D_\zeta} u_1(xe_1+ye_2)\, dx + u_3(xe_1+ye_2)\, dy = 0 \tag{12}$$

є необхідною для розв'язності системи (11).

## 5. Достатні умови одновимірності ядра системи інтегральних рівнянь Фредгольма, асоційованої з однорідними (1-3)- та бігармонічною задачами.

Позначимо $D_\zeta^+ := D_\zeta$ і $D_\zeta^- := \mu \setminus \overline{D_\zeta}$.

**Зауваження 1.** *Аналогічно доведенню властивостей комплексного інтеграла типу Коші встановлюємо, що $\mathcal{B}\left[\varphi\right](\zeta)$ є моногенною функцією в $D_\zeta^\pm$, а*

$$\mathcal{B}\left[\varphi\right](\infty) = 0, \tag{13}$$

*за умови, що $\varphi$ є інтегровною на $\partial D_\zeta$.*

*Якщо $\varphi$ має інтегровну контурну похідну $\varphi'$, то виконується рівність*

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\mathcal{B}\left[\varphi\right](\zeta)\right) = \mathcal{B}\left[\varphi'\right](\zeta)\ \forall\zeta \in \mu \setminus \partial D_\zeta. \tag{14}$$

*Якщо $\varphi$ задовольняє умову типу Діні* (8), *то існують граничні значення*

$$\mathcal{B}^{\pm}\left[\varphi\right](\zeta) := \lim_{\tau\to\zeta,\tau\in D_\zeta^{\pm}} \mathcal{B}\left[\varphi\right](\tau)$$

*у кожній точці $\zeta \in \partial D_\zeta$ і справедлива формула* (див. Теорему 4.2 з [12]):

$$\mathcal{B}^{+}\left[\varphi\right](\zeta) - \mathcal{B}^{-}\left[\varphi\right](\zeta) = \varphi(\zeta)\ \forall\zeta \in \partial D_\zeta. \tag{15}$$

Будемо казати, що інтеграл $\mathcal{B}\left[\varphi\right]$ з (7) *визначений у $D_\zeta^+$ і $D_\zeta^-$*, якщо

$$\left|\mathrm{U}_k\left[\mathcal{B}\left[\varphi\right](\zeta)\right]\right| < +\infty, k = \overline{1,4},$$

при усіх $\zeta \in D_\zeta^+$ і $\zeta \in D_\zeta^-$ відповідно. Або, іншими словами, при кожному $\zeta \in D_\zeta^{\pm}$ має місце включення: $\mathcal{B}\left[\varphi\right](\zeta) \in \mathbb{B}$.

В наступній теоремі містяться природні умови, за яких рівність (12) є також достатньою для розв'язності системи інтегральних рівнянь (11) у декартовому просторі $\left(C(\overline{\mathbb{R}})\right)^2 := C(\overline{\mathbb{R}}) \times C(\overline{\mathbb{R}})$, де $C(\overline{\mathbb{R}})$ є банаховим простором неперервних на розширеній дійсній осі функцій, а однорідна система (11) (при $\widetilde{u_j} \equiv 0, j = \{1,3\}$) має одновимірне ядро.

**Теорема 1** ([12])**.** *Нехай конформне відображення $\sigma(T)$ має відмінну від нуля контурну похідну $\sigma'(T)$ на колі $\Gamma$ і її модуль неперервності задовольняє умову* (10).

*Нехай усі розв'язки $(g_1, g_3) \in \left(C(\overline{\mathbb{R}})\right)^2$ однорідної системи рівнянь* (11) *є диференційовними на $\mathbb{R}$ і мають місце умови*:

(a) *інтеграл $\mathcal{B}\left[\varphi'\right](\zeta)$ визначений у $D_\zeta^+$ і $D_\zeta^-$*,

(b) *функції*

$$\Psi_{\pm}\left[\varphi\right](\zeta) := \mathcal{B}\left[\varphi'\right](\zeta)\ \forall\zeta \in D_\zeta^{\pm}$$

*є обмеженими для кожної*

$$\varphi(\tau) := g_1(s)e_1 + g_3(s)e_2,\ \tau = \widetilde{\tau}(s)\,\forall s \in \mathbb{R},$$

*де під $\varphi'$ розуміється контурна похідна функції $\varphi\left(\widetilde{\tau}(s)\right)$.*

*Тоді справедливі наступні твердження*:

(i) *число лінійно незалежних розв'язків однорідної системи рівнянь* (11) *дорівнює* 1;

(ii) *неоднорідна система рівнянь* (11) *є розв'язною, тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (12).

**Зауваження 2.** *Формулювання Теореми* 1 *аналогічне формулюванню Теореми* 7.11 *роботи* [12], *де відсутня умова* (a). *Це пов'язано з тим, що при* $\Psi_{\pm}[\varphi](\zeta) := \mathcal{B}[\varphi'](\zeta)$, $\zeta \in D_{\zeta}^{\pm}$, *з умови* (b) *випливає умова* (a).

Поділ на пункти (a) і (b) у формулюванні Теореми 1 здійснено для зручності формулювання наступної теореми, що узагальнює Теорему 1, містячи послаблення умови (b).

**Теорема 2.** *Нехай конформне відображення* $\sigma(T)$ *має відмінну від нуля контурну похідну* $\sigma'(T)$ *на колі* $\Gamma$ *і її модуль неперервності задовольняє умову* (10).

*Нехай усі розв'язки* $(g_1, g_3) \in \big(C(\,\overline{\mathbb{R}}\,)\big)^2$ *однорідної системи рівнянь* (11) *є диференційовними на* $\mathbb{R}$ *і мають місце умови:*

(a) *інтеграл* $\mathcal{B}[\varphi'](\zeta)$ *визначений у* $D_{\zeta}^{+}$ *і* $D_{\zeta}^{-}$,

(b) *функції*

$$\Psi_{+}[\varphi](\zeta) := \mathrm{U}_1[\mathcal{B}[\varphi'](\zeta)] - \mathrm{U}_4[\mathcal{B}[\varphi'](\zeta)] \;\; \forall \zeta \in D_{\zeta}^{+}, \tag{16}$$

$$\Psi_{-}[\varphi](\zeta) := \mathrm{U}_2[\mathcal{B}[\varphi'](\zeta)] + \mathrm{U}_3[\mathcal{B}[\varphi'](\zeta)] \;\; \forall \zeta \in D_{\zeta}^{-}, \tag{17}$$

*є обмеженими для кожної*

$$\varphi(\tau) := g_1(s)\, e_1 + g_3(s)\, e_2,\ \tau = \widetilde{\tau}(s),\ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

*а*

$$\varphi'(\tau) := g_1'(s)\, e_1 + g_3'(s)\, e_2 \;\forall \tau = \widetilde{\tau}(s). \forall s \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

*Тоді справедливі твердження* (i) *та* (ii) *Теореми* 1.

*Доведення.* Як і при доведенні Теореми 7.11 роботи [12], встановлюємо, що існує щонайменше один розв'язок $(g_1^0, g_3^0) \in \big(C(\,\overline{\mathbb{R}}\,)\big)^2$ однорідної системи рівнянь для (11). Тоді функція

$$\Phi_0(\zeta) := \mathcal{B}[\varphi_0](\zeta) \,\forall \zeta \in D_{\zeta}, \tag{20}$$

де $\varphi := \varphi_0$ визначається з (18) при $g_k := g_k^0$, $k \in \{1,3\}$, є розв'язком однорідної (1-3)-задачі, причому в силу Теореми 7.2 з [12] функція $\varphi_0(\tau)$ задовольняє умову виду (8). З диференційовності функцій $g_1^0$, $g_3^0$ на $\mathbb{R}$ випливає, що функція $\varphi_0(\tau)$ має контурну похідну $\varphi_0'$ для кожної $\tau \in \partial D_\zeta$, яка визначається рівністю (19) при $\varphi := \varphi_0$. З огляду на Зауваження 1, встановлюємо, що

$$\Phi_0'(\zeta) \equiv \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\mathcal{B}\left[\varphi_0\right](\zeta)\right) = \mathcal{B}\left[\varphi_0'\right](\zeta)\ \forall \zeta \in \mu \setminus \partial D_\zeta. \tag{21}$$

Нехай $\Phi_1$ є моногенною функцією в $D_\zeta$, такою, що $\Phi_1'(\zeta) = \Phi_0(\zeta)$ при всіх $\zeta \in D_\zeta$. Тому $V(x,y) := \mathrm{U}_1\left[\Phi_1(\zeta)\right]$ є розв'язком однорідної бігармонічної задачі (6) з $\omega_3 = \omega_4 \equiv 0$, причому

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = \mathrm{U}_1\left[\mathcal{B}\left[\varphi_0\right](\zeta)\right], \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = \mathrm{U}_3\left[\mathcal{B}\left[\varphi_0\right](\zeta)\right]\ \forall \zeta \in D_\zeta. \tag{22}$$

Враховуючи Зауваження 1, рівності (22), (21) і (3), одержуємо наступний ланцюжок рівностей для лапласіана $\Delta V$ в точках $(x,y) \in D$:

$$\begin{aligned}\Delta V(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{U}_1\left[\mathcal{B}\left[\varphi_0\right](\zeta)\right]\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{U}_3\left[\mathcal{B}\left[\varphi_0\right](\zeta)\right]\right) = \\ &= \mathrm{U}_1\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{B}\left[\varphi_0\right](\zeta)\right)\right] + \mathrm{U}_3\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathcal{B}\left[\varphi_0\right](\zeta)\right)\right] = \\ &= \mathrm{U}_1\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{B}\left[\varphi_0\right](\zeta)\right)\right] + \mathrm{U}_3\left[e_2\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{B}\left[\varphi_0\right](\zeta)\right)\right] = \\ &= \mathrm{U}_1\left[\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\mathcal{B}\left[\varphi_0\right](\zeta)\right)\right] + \mathrm{U}_3\left[e_2\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\mathcal{B}\left[\varphi_0\right](\zeta)\right)\right] = \\ &= \mathrm{U}_1\left[\Phi_0'(\zeta)\right] + \mathrm{U}_3\left[e_2\Phi_0'(\zeta)\right].\end{aligned} \tag{23}$$

Оскільки $\mathrm{U}_3\left[e_2 A\right] = \mathrm{U}_1\left[A\right] - 2\mathrm{U}_4\left[A\right]$ при кожному $A \in \mathbb{B}$, то рівність (23) набуває вигляду

$$\begin{aligned}\Delta V(x,y) &= 2\left(\mathrm{U}_1\left[\mathcal{B}\left[\varphi_0'\right](\zeta)\right] - \mathrm{U}_4\left[\mathcal{B}\left[\varphi_0'\right](\zeta)\right]\right) \equiv \\ &\equiv 2\Psi_+\left[\varphi_0\right](\zeta)\ \forall \zeta \in D_\zeta.\end{aligned} \tag{24}$$

Тому обмеженість $\Psi_+\left[\varphi_0\right]$ в $D_\zeta$ приводить до обмеженості лапласіана $\Delta V$ в $D$. Тепер, в силу роботи [13], довільний розв'язок $V$ однорідної бігармонічної задачі для області $D$, що має обмежений лапласіан $\Delta V$, має вигляд: $V = \text{const}$. Одже, в силу (22), маємо рівності

$$\mathrm{U}_1 \left[\Phi_0(\zeta)\right] = \mathrm{U}_3 \left[\Phi_0(\zeta)\right] \equiv 0 \ \forall \zeta \in D_\zeta.$$

Тому, вибираючи з [3, формула (24)] ті моногенні функції, у яких і третя дійсна компонента тотожна нулеві, приходимо до формули $\mathcal{B}\left[\varphi_0\right](\zeta) = ik\zeta + i\left(n_1 e_1 + n_2 e_2\right)$ при всіх $\zeta \in \overline{D_\zeta}$, де $n_1$, $n_1$, $k$ — довільні дійсні числа

Усі міркування, що були проведені для $\varphi_0(\tau)$ і $\Phi_0(\zeta)$, зберігаються і для довільної $\varphi(\tau)$ з (18) і $\Phi(\zeta) := \mathcal{B}\left[\varphi\right](\zeta)$. Зокрема, функція $\varphi(\tau)$ задовольняє умову виду (8), а функція $\Phi(\zeta)$ є розв'язком однорідної (1-3)-задачі в області $D_\zeta$, і має місце формула

$$\mathcal{B}\left[\varphi\right](\zeta) = ik\zeta + i\left(n_1 e_1 + n_2 e_2\right) \ \forall \zeta \in \overline{D_\zeta}, \tag{25}$$

де $n_1$, $n_1$, $k$ — довільні дійсні числа

Умова обмеженості функції (17) виникає, при доведенні від супротивного того, що $k \neq 0$ у (25). Дійсно, припускаючи, що $k = 0$ у даній формулі, приходимо в силу (15) до рівностей

$$\mathcal{B}^-\left[\varphi\right](\zeta) = -\varphi(\zeta) + \mathcal{B}^+\left[\varphi\right](\zeta) = -\varphi(\zeta) + i\left(n_1 e_1 + n_2 e_2\right) \ \forall \zeta \in \partial D_\zeta^-.$$

Тому, для кожної $\varphi$ з (18), функція $\Phi(\zeta) = \mathcal{B}\left[\varphi\right](\zeta)$, $\zeta \in D_\zeta^-$, є розв'язком (2-4)-задачі для $D_\zeta^-$ з граничними умовами в (4) з $u_2(\zeta) := n_1$, $u_4(\zeta) := n_2$.

Аналогічно, як і для (1-3)-задачі, (2-4)-задача для моногенної функції $\Phi(\zeta) = \Phi_1'(\zeta)$, $\mathrm{U}_2\left[\Phi_1(\zeta)\right] = V(x,y)$, асоційована з бігармонічною задачею для функції $V$, в силу рівностей

$$\mathrm{U}_2\left[\Phi_1'(\zeta)\right] = \frac{\partial V(x,y)}{\partial x}, \ \mathrm{U}_4\left[\Phi_1'(\zeta)\right] = \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}, \tag{26}$$

які слідують з умови (3) для $\Phi := \Phi_1$. Далі, діючи аналогічно доведенню (23), з використанням співвідношення

$$\mathrm{U}_2\left[A\right] + \mathrm{U}_4\left[e_2 A\right] = 2\left(\mathrm{U}_2\left[A\right] + \mathrm{U}_3\left[A\right]\right) \ \forall A \in \mathbb{B},$$

приходимо до рівності

$$\Delta V(x,y) = 2\left(\mathrm{U}_2\left[\mathcal{B}\left[\varphi'\right](\zeta)\right] + \mathrm{U}_3\left[\mathcal{B}\left[\varphi'\right](\zeta)\right]\right) \equiv$$

$$\equiv 2\Psi_{-}\left[\varphi\right](\zeta).\forall\zeta\in D_{\zeta}^{-}, \tag{27}$$

Рівність (27) та обмеженість кожної функції з (17) приводять, в силу роботи [13], аналогічно встановленню подібного факту і для однорідної (1-3)-задачі у $D_{\zeta}^{+}$ і відповідної однорідної бігармонічної задачі у області $D$, спочатку до формули загального розв'язку, $V = \mathrm{const}$, однорідної бігармонічної задачі для необмеженої області з межею $\partial D$, а далі — до факту про те, що загальний розв'язок $V$ бігармонічної задачі у даній області з крайовими умовами $\omega_3 := n_1$, $\omega_4 := n_2$ подається формулою: $V(x, y) = n_1 x + n_2 y + \mathrm{const}$.

Тому в силу (26), одержуємо рівності

$$\mathrm{U}_2\left[\mathcal{B}\left[\varphi\right](\zeta)\right] = n_1, \mathrm{U}_4\left[\mathcal{B}\left[\varphi\right](\zeta)\right] = n_2\ \forall\zeta\in\overline{D_{\zeta}^{-}}.$$

Оскільки для кожної $\Phi$ вигляду (2) виконуються співвідношення $\mathrm{U}_2[\Phi] = \mathrm{U}_1[-i\Phi]$, $\mathrm{U}_4[\Phi] = \mathrm{U}_3[-i\Phi]$, функція $\Phi(\zeta) := i\,(n_1 e_1 + n_2 e_2)$ визначає частковий розв'язок згаданої (2-4)-задачі для $D_{\zeta}^{-}$, загальний розв'язок однорідної (2-4)-задачі для $D_{\zeta}^{-}$ одержується множенням правої частини рівності вигляду (25), що розглядається у $D_{\zeta}^{-}$, на $i^3$, отже, одержуємо рівність

$$\mathcal{B}\left[\varphi\right](\zeta) = k_1\zeta + m_1 e_1 + m_2 e_2 + i\,(n_1 e_1 + n_2 e_2)\ \ \forall\zeta\in\overline{D_{\zeta}^{-}}, \tag{28}$$

де $k_1$, $m_1$, $m_2$ — довільні дійсні числа.

Застосовуючи (13) до (28), одержуємо: $k_1 = m_1 = m_2 = n_1 = = n_2 = 0$, Далі, формула (15), з урахуванням (25) при $k = 0$, приводить до тотожності: $\varphi\equiv 0$. Але, за доведеним, існує $\varphi := \varphi_0$, яка не є тотожною нулеві. Тому припущення про те, що $k = 0$ в (25) є хибним.

Далі, завершення доведення теореми, зокрема, той факт, що розв'язок однорідної системи для (11), а, отже, і розв'язок однорідної (1-3)-задачі вигляду (7) існує лише при $\varphi = \alpha\varphi_0$ (параметр $\alpha\in\mathbb{R}$), ідентичне міркуванням Теореми 7.11 з [12] (після формули (7.14)). Теорему доведено.

Робота виконана за часткової підтримки гранта Міністерства освіти і науки України (проект № 0116U001528).

# Література

[1] *Мельниченко И. П.* Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга // Укр. мат. журн. — 1986. — **38**, № 2. — С. 252 – 254.

[2] *Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П.* Бигармонические функции на бигармонической плоскости // Докл. АН УССР, Сер. А. — 1981. — № 8. — С. 25 – 27.

[3] *Грищук С. В., Плакса С. А.* Моногенные функции в бигармонической алгебре // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 12. — С. 1587 – 1596.

[4] *Plaksa S. A., Gryshchuk S. V., Shpakivskyi V. S.* Commutative algebras of monogenic functions associated with classic equations of mathematical physic // in "Complex Analysis and Dynamical Systems IV", Contemporary Mathematics. — 2011. — **553**. — Providence, RI: Amer. Math. Soc. — P. 245 – 258

[5] *Gryshchuk S. V., Plaksa S. A.* Basic Properties of Monogenic Functions in a Biharmonic Plane // in: "Complex Analysis and Dynamical Systems V", Contemporary Mathematics. — 2013. — **591**. — Providence, RI: Amer. Math. Soc. — P. 127 – 134

[6] *Ковалев В. Ф.* Бигармоническая задача Шварца. — К.: ИМ АН УССР, 1986. — 19 с. — (Препр. / АН УССР, Ин-т математики; 86.16).

[7] *Gryshchuk S. V.* *$\mathbb{B}$-valued monogenic functions and their applications to boundary value problems in displacements of 2-D Elasticity* // ArXiv preprint. — 2016. — 12 p. — (ArXiv preprint / arXiv:1601.01626v1 [math.AP]).

[8] *Gryshchuk S. V.* $\mathbb{B}$-valued monogenic functions and their applications to boundary value problems in displacements of 2-D Elasticity // in: "Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2015", *S. V. Rogosin and M. V. Dubatovskaya, Belarusian State University, Minsk, Belarus (Eds.)*, Cambridge Scientic Publishers Ltd, 45 Margett Street, Cottenham, Cambridge CB24 8QY, UK (2016) (to appear), ISBN (paperback) 978-1-908106-56-8, P. 37 – 47.

[9] *Михлин С. Г.* Плоская задача теории упругости // Труды Сейсм. ин-та АН СССР. — 1935. — № 65. — М.–Л.: Изд-во АН СССР. — 82 с.

[10] *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. — М.: ГИФМЛ. — 1962. — 708 с.

[11] *Gryshchuk S. V., Plaksa S. A.* Schwartz-type integrals in a biharmonic plane // Inter. J. of Pure and Appl. Math. — 2013. — **83**, No. 1.— P. 193 – 211.

[12] *Gryshchuk S. V., Plaksa S. A.* Monogenic functions in the biharmonic boundary value problem // Math. Meth. Appl. Sci. — 2016. — **39**, No. 11. — P. 2939 – 2952 / DOI: 10.1002/mma.3741 /.

[13] *Михлин С. Г.* Теорема единственности для основной бигармонической проблемы // Матем. сб. — 1934. — **41**, № 2. — С. 284 – 291.