Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, Т.10, №1, 18-27

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, С. В. Савела (Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, Днепропетровск)

ОЦЕНКИ АППРОКСИМАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

Sharp estimation of approximation of the elements of a Hilbert space by arbitrary linear approximation methods operating to the subspace of whole vectors of exponential type are obtained.

Одержані точні оцінки аппроксимації элементів гильбертового простр-ру довільним лінійним методом наближення, що діє в підпростір цілих векторів експоненціального типу.

Получены точные оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства произвольным линейным методом приближения, действующим в подпространство целых векторов экспоненциального типа.

Первые точные неравенства типа Джексона для наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве L_2 были получены в 1967 году Н. И. Черных [1, 2]. Так в [1] им было доказано, что для любой функции f из L_2, которая не является константой (с точностью до множества меры нуль), имеет место неравенство

$$E_n\left(f\right)_{L_2} < \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{L_2} \qquad n = 1, 2, \ldots\,, \tag{1}$$

причем для произвольного фиксированного n константа $\frac{1}{\sqrt{2}}$ неулучшаема.

В дальнейшем точные неравенства типа Джексона изучались многими авторами. Аналоги результатов Н.И. Черных для наилучших $L_2(\mathbb{R})$ функций $f \in L_2(\mathbb{R})$ целыми функциями экспоненциального типа σ были получены И.И. Ибрагимовым и Ф.Г. Насибовым [3] и независимо В.Ю. Поповым [4]. В работе [5] точные неравенства такого типа были получены для для наилучших $L_2(\mathbb{R})$-приближений функций $f \in L_2(\mathbb{R})$ частными суммами рядов Фурье по системе вейвлет Шеннона – Котельникова и Мейера. Обзоры многих полученных в этом направлении результатов и дальнейшие ссылки можно найти в монографиях [6 – 8].

В качестве промежуточного результата в [1] было получено также точное неравенство

$$E_n^2\,(f)_{L_2} \leq \frac{n}{4} \int\limits_0^{\pi/n} \omega^2(f,t)_{L_2} \sin(nt)dt, \tag{2}$$

представляющее и самостоятельный интерес. В дальнейшем точные неравенства вида

$$E_n(f)_{L_2}^2 \leq K \int\limits_0^{\delta} \omega^2(f,t)_{L_2} v(t)dt$$

для различных весовых функций $v(t)$ были получены в ряде работ Л.В. Тайкова (см., например, [9]) и других авторов. Изучались также точные неравенства типа Джексона для аппроксимации функций из L_2 линейными методами приближения, отличными от сумм Фурье [10, 11] в пространстве L_2.

В ряде работ (см., например, [12, 13]) были, в частности, получены неравенства типа Джексона для наилучших приближений элементов гильбертова пространства целыми векторами экспоненциального типа некоторого оператора. Однако утверждений о точности констант в полученных неравенствах в упомянутых работах нет. Точные неравенства типа (1) и (2) в случае приближения элементов гильбертова пространства подпространствами, порожденными заданным разложением единицы, и условия их точности получены авторами в работе [14]. В данной работе мы получим ряд точных неравенств типа Джексона для аппроксимации элементов гильбертова пространства достаточно произвольным линейным методом приближения, действующим в подпространство целых векторов экспоненциального типа. При этом в качестве информации об отклонении аппроксимирующего элемента от аппроксимируемого мы будем использовать значение на их разности фиксированного функционала.

Мы получим таким образом неравенства более тонкие по сравнению с неравенствами для норм разностей и покажем, что неравенства типа Джексона в классической форме легко следуют из наших неравенств.

Пусть H — комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$, в котором задано разложение единицы [15], то есть однопараметрическое семейство проектирующих операторов $E_t : H \to H$, заданных на промежутке $(-\infty,+\infty)$ такое, что:

a) $E_u E_v = E_s$ $\forall u, v \in (-\infty,+\infty)$, где $s = \min\{u, v\}$;

b) в смысле сильной сходимости

$$\forall t \quad E_{t-0} = E_t \quad (-\infty < t < +\infty)\,;$$

c) $E_{-\infty} = \lim\limits_{t\to-\infty} E_t = 0,\ E_{+\infty} = \lim\limits_{t\to+\infty} = I \quad (\ Ix = x\ \forall x \in H)$.

Определенная для любого $x \in H$ функция

$$(E_t x, x)\,, \quad -\infty < t < \infty,$$

является непрерывной слева и имеет ограниченную вариацию,

$$E_{-\infty}(x,x) = 0, \quad E_{+\infty}(x,x) = (x,x).$$

Заданное разложение единицы порождает группу унитарных операторов

$$U_t x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} dE_s x, \qquad (0 \le t < \infty)$$

(интеграл в правой части - это операторный интеграл Стилтьеса, нужные нам свойства которого можно найти в [16]).

Для $t \in \mathbb{R}$ и $x \in H$ положим

$$\Delta_t x = x - U_t x$$

и определим модуль непрерывности элемента $x \in H$, полагая

$$\omega(x, \delta) = \sup_{|t| \le \delta} \|x - U_t x\|.$$

Отметим, что

$$\|\Delta_t x\|^2 = \|x - U_t x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(ts) d(E_s x, x),$$

где положено

$$\psi(ts) = \left|1 - e^{ist}\right|^2.$$

Определим некоторый линейный метод приближения

$$\Lambda x = \int_{-\sigma}^{\sigma} \lambda(t) dE_t x,$$

где $\lambda(t)$ - непрерывная комплекснозначная функция. Ясно, что

$$x - \Lambda x = \int_{|t|<\sigma} (1 - \lambda(t))\, dE_t x + \int_{|t| \ge \sigma} dE_t x = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) dE_t x,$$

где $\theta(t) = 1 - \lambda(t)$, если $|t| < \sigma$, и $\theta(t) = 1$, если $|t| \ge \sigma$.

Пусть $T = [0, \delta] \subset [0, 2\pi]$, $\delta > 0$, пусть также $v(t)$ – вес, т.е. заданная на T интегрируемая функция, положительная на множестве полной меры. Введем еще следующее обозначение

$$\Gamma(v; t) = \int_T \psi(ts) v(s) ds.$$

Для любого элемента $x \in H$ такого, что $x \ne U_t x$ для некоторого t, рассмотрим значение функционала $f \in H^* = H$ на разности $x - \Lambda x$. Применяя неравенство Коши – Буняковского, будем иметь

$$|(x - \Lambda x, f)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) d(E_t x, f) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(t)}{\Gamma(v; t)^{\frac{1}{2}}} \Gamma(v; t)^{\frac{1}{2}} d(E_t x, f) \right| \le$$

$$\le \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(t)|^2 d(E_t f, f)}{\Gamma(v;t)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(v;t) d(E_t x, x)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= K_\sigma \left(\int_T v(s) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(ts) d(E_t x, x) ds\right)^{\frac{1}{2}} = K_\sigma \left(\int_T \|\Delta_s x\|^2 v(s) ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$K_\sigma = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(t)|^2 d(E_t f, f)}{\Gamma(v;t)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом получено неравенство

$$|(x - \Lambda x, f)| \le K_\sigma \left(\int_T \|\Delta_s x\|^2 v(s) ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Покажем, что это неравенство является точным. Положим

$$x^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\theta(t)}}{\Gamma(v;t)} dE_t f.$$

С одной стороны, как легко видеть,

$$|(x^* - \Lambda x^*, f)| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(t)|^2 d(E_t f, f)}{\Gamma(v;t)} = K_\sigma^2.$$

С другой стороны,

$$x^* - U_t x^* = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{its}) dE_s x^* =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{its}) dE_s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\theta(u)}}{\Gamma(v;u)} dE_u f =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(u)}{\Gamma(v;u)} dE_u \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{its}) dE_s f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(s)}{\Gamma(v;s)} (1 - e^{its}) dE_s f.$$

Следовательно,

$$\|\Delta_t x^*\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(s)|^2}{\Gamma^2(v;s)} \psi(ts) d(E_s f, f)$$

и

$$\int\limits_T v(t) \|\Delta_t x^*\|^2 dt = \int\limits_T v(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(s)|^2}{\Gamma^2(v;s)} \psi(ts) d(E_s f, f) dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(v;s) \frac{|\theta(s)|^2}{\Gamma^2(v;s)} d(E_s f, f) = K_\sigma^2.$$

Таким образом,

$$|(x^* - \Lambda x^*, f)| = K_\sigma^2 = K_\sigma \cdot K_\sigma = K_\sigma \left(\int\limits_T v(t) \|\Delta_t x^*\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Итак, нами доказана

Теорема 1. *Для произвольной непрерывной комплекснозначной функции $\lambda(t)$, линейного метода приближения $\Lambda x = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \lambda(t) dE_t x$, любого элемента $x \in H$ такого, что $x \neq U_t x$ для некоторого t, любого элемента $f \in H$ и любого почти всюду положительного на $T = [0, \delta]$ веса $v(t)$ имеет место точное неравенство*

$$|(x - \Lambda x, f)| \leq K_\sigma \left(\int\limits_T \|\Delta_s x\|^2 v(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Следствие 1. *При $\lambda(t) \equiv 1$ для любого элемента $x \in H$ такого,* *что $x \neq U_t x$ при некотором t, справедливо точное неравенство*

$$\left|\left(x - \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} dE_t x, f\right)\right| \leq \left(\int\limits_{|t|\geq\sigma} \frac{d(E_t f, f)}{\Gamma(v;t)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{T} \|\Delta_t x\|^2 v(t) dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из неравенства (3), учитывая выражение для константы K_σ выводим

$$\|x - \Lambda x\|^2 \leq \sup_{\|f\|=1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(t)|^2 d(E_t f, f)}{\Gamma(v;t)} \int\limits_{T} \|\Delta_s x\|^2 v(s) ds.$$

Положим

$$\varphi(t) = \frac{|\theta(t)|}{\Gamma(v;t)^{\frac{1}{2}}}$$

и рассмотрим функцию $\varphi(A)$ от самосопряженного оператора A, порожденного разложением единицы E_t:

$$\varphi(A) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dE_t.$$

Как известно,

$$\sup_{\|f\|=1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(t)|^2 d(E_t f, f)}{\Gamma(v;t)} = \|\varphi(A)\|^2$$

и мы получаем, что имеет место

Теорема 2. *Для любого элемента $x \in H$ такого, что $x \neq U_t x$ при некотором t, справедливо точное неравенство*

$$\|x - \Lambda x\| \leq \|\varphi(A)\| \left(\int\limits_{T} \|\Delta_s x\|^2 v(s) ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оценим $\|\varphi(A)\|$. Имеем

$$\|\varphi(A)\|^2 = \sup_{\|f\|=1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta(t)|^2 d(E_t f, f)}{\Gamma(v;t)} \leq$$

$$\leq \sup_{\|f\|=1} \left(\sup_{|t|<\sigma} \frac{|1-\lambda(t)|^2}{\Gamma(v;t)} \int\limits_{|t|<\sigma} d(E_t f, f) + \sup_{|t|\geq\sigma} \frac{1}{\Gamma(v;t)} \int\limits_{|t|\geq\sigma} d(E_t f, f) \right) =$$

$$= \max \left\{ \sup_{|t|<\sigma} \frac{|1-\lambda(t)|^2}{\Gamma(v;t)}, \sup_{|t|\geq\sigma} \frac{1}{\Gamma(v;t)} \right\}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Для любого элемента $x \in H$ такого, что $x \neq U_t x$ при некотором t, справедливо неравенство*

$$\|x - \Lambda x\|^2 \leq \max \left\{ \sup_{|t|<\sigma} \frac{|1-\lambda(t)|^2}{\Gamma(v;t)}, \sup_{|t|\geq\sigma} \frac{1}{\Gamma(v;t)} \right\} \int\limits_T \|\Delta_s x\|^2 v(s) ds.$$

Если разложение единицы таково, что $E_{t+\varepsilon} - E_t \neq 0$ для произвольных $t \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$, то неравенство является точным.

Пусть теперь $\lambda(t) \equiv 1$, $\delta = \pi/\sigma$ и $v(t) = \sin \sigma t$. Учитывая, что $\psi(ts) = |1 - e^{its}|^2 = 2(1 - \cos ts)$ и тот факт, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \cos ts \sin \sigma t dt \leq 0$$

для $s \geq \sigma$, получим

$$\sup_{|t|\geq\sigma} \frac{1}{\Gamma(v;t)} = \frac{\sigma}{4}.$$

Следствие 2. *Для любого элемента $x \in H$ такого, что $x \neq U_t x$ при некотором t, справедливо неравенство*

$$\left\| x - \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} dE_t x \right\|^2 \leq \frac{\sigma}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \|\Delta_t x\|^2 \sin \sigma t dt.$$

Из последнего неравенства, используя неравенство

$$\|\Delta_t x\| \leq \omega\left(x, \frac{\pi}{\sigma}\right) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{\sigma}\right],$$

получаем (см. [12 – 14])

$$\left\| x - \int_{-\sigma}^{\sigma} dE_t x \right\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \omega\left(x, \frac{\pi}{\sigma}\right).$$

1. *Черных Н.И.* О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИАН. — 1967. — **88**. — С. 71 – 74.
2. *Черных Н.И.* О наилучшем приближении периодических Функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. — 1967. — **2**, № 5. — С. 513 – 522.
3. *Ибрагимов И.И., Насибов Ф.Г.* Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // ДАН СССР. — 1970. — **194**, № 5. — С. 1013 – 1016.
4. *Попов В.Ю.* О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Известия ВУЗов. Математика. — 1972. — **121**, № 6. — С. 65 – 73.
5. *Бабенко В.Ф., Жиганова Г.С., Новикова Л.С.* О неравенствах типа Джексона для наилучших L_2-приближений при помощи вейвлет // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. — 2006. — **11**. — С. 3 – 8.
6. *Лигун А.А., Капустян В.Е., Волков Ю.И.* Специальные вопросы теории приближений и оптимального управления распределенными системами. — Киев, 1990. — 211 с.
7. *Иванов В.И., Смирнов О.И.* Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. — Тула, 1995. — 192 с.
8. *Горбачев Д.В.* Избранные задачи теории функций и теории приближения. — Тула, 2004. — 153 с.
9. *Тайков Л.В.* Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Мат. заметки. — 1977. — **22**, № 4. — С. 535 – 542.
10. *Божуха Л.Н.* О неравенстве Джексона при приближении фукнции линейными методами суммирования в пространстве L_2 // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 4. — С. 537 – 545.

11. *Бабенко В.Ф., Доронин В.Г., Лигун А.А., Шумейко А.А.* О неравенствах типа Джексона для функций, заданных на сфере // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 3. — С. 291 – 304.
12. *Горбачук М.Л., Грушка Я.І., Торба С.М.* Прямі і обернені теореми в теорії наближень методом Рітца // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 5. — С. 633 – 643.
13. *Торба С.М.* Операторний підхід до прямих і обернених теорем теорії наближень: Автореф. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. — 2007. — 20 с.
14. *Бабенко В.Ф., Савела С.В.* Оценки аппроксимации элементов гильбертова пространства подпространствами, порожденными заданным разложением единицы // Вісник ДНУ. Математика. — 2010. — **18**, № 6/1. — С. 49 – 58.
15. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966. — 544 с.
16. *Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г.* Функциональный анализ. Курс лекций. — Киев, 1990. — 600 с.