Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 14, № 1, 103–115

УДК 517.5

***Г. А. Волошин*[1], *В. М. Косован*[2], *В. К. Маслюченко*[3]**

[1,2,3] (*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці*)

[1] **galja.vlshin@gmail.com**, [2] **Kreuzwahler@outlook.com**
[3] **vmaslyuchenko@gmail.com**

Умова Гаара і тригонометричні поліноми

Присвячено 70-річчю професора Юрія Борисовича Зелінського

Введено поняття слабкої послідовності Гаара. У його термінах встановлено нові результати про зв'язки між нарізною і сукупною поліноміальністю узагальнених многочленів. Як наслідок, отримано, що нарізно тригонометричні поліноми будуть і тригонометричними поліномами за сукупністю змінних.

We introduced the concept of the weak Haar sequence. Using its terms we found out the new results about the relationship between separately and jointly polinomiality of generalized polynomials. As a result, we obtained that separately trigonometric polynomials are trigonometric polynomials on the joint of variables.

1. Вступ. Кажуть, що система функцій $f_k\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, задовольняє умову Гаара, якщо для кожної множини різних точок $x_1, \ldots, x_n$ з X визначник

$$\Delta = \det\left(f_k\left(x_j\right)\right)_{j,k=1}^{n}$$

не дорівнює нулю. Ця умова, що була введена А. Гааром [1], є необхідною і достатньою для того, щоб кожна неперервна функція

$f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ на компактному просторі X мала єдиний многочлен $g = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ найкращого рівномірного наближення, де f_k — неперервні функції. Узагальнення цієї теореми Гаара подано у працях [2, 3], а інше доведення у [4, с. 79].

У праці [5] умова Гаара була застосована до узагальнення теореми про сукупну поліноміальність нарізно поліноміальних функцій $f\colon K^n \longrightarrow K$, де K — це довільне поле [6–8], її основний результат при $n = 2$ був анонсований у [9]. У ньому для систем функцій $F = \{f_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq K^X$і $G = \{g_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq K^Y$розглядалися F-поліноми $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f_j$, G-поліноми $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k g_k$ і $F \otimes G$-поліноми $\sum\limits_{j,k=1}^{N} \alpha_{j,k} f_j \otimes g_k$, де $(\varphi \otimes \psi)(x, y) = \varphi(x)\,\psi(y)$ на $X \times Y$ для довільних функцій $\varphi\colon X \longrightarrow K$, $\psi\colon Y \longrightarrow K$. При цьому було встановлено, що коли обидві множини X і Y нескінченні, а одна з них незліченна і будь-які скінченні системи $f_1, \ldots, f_n$ і $g_1, \ldots, g_n$ задовольняють умову Гаара на X чи Y відповідно, то кожна функція $h\colon X \times Y \longrightarrow K$, у якої всі x-розрізи $h^x = h(x, \cdot) : Y \longrightarrow K$ і всі y-розрізи $h_y = h(\cdot, y) : X \longrightarrow K$ є G-поліномами чи F-поліномами відповідно, сама є $F \otimes G$-поліномом. У [5] цей результат був поширений і на випадок функцій від n змінних.

Послідовність функцій $f_n\colon X \longrightarrow K$, у якої кожна скінченна послідовність $f_1, \ldots, f_n$ задовольняє умову Гаара, ми називаємо *послідовністю Гаара.* Типовим прикладом послідовності Гаара є послідовність степеневих функцій $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots,$ де x пробігає підмножину X довільного поля K. Іншим прикладом служить послідовність $1,\, x,\, x^{-1},\, x^2,\, x^{-2},\, \ldots,\, x^m,\, x^{-m},\, \ldots,$ де $x \in X \subseteq K^* = K \setminus \{0\}$. Послідовність тригонометричних функцій $\{1,\, \cos x,\, \sin x,\, \ldots,\, \cos nx,\, \sin nx,\, \ldots\}$ не є послідовністю Гаара, і тому узагальнення з [5] не можна застосовувати до тригонометричних многочленів. У цій статті ми вводимо поняття слабкої послідовності Гаара і переносимо на такі послідовності основний результат з [5]. З отриманого узагальнення, зокрема, випливає, що будь-яка функція $h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, у якої всі x-розрізи $h^x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ і y-розрізи $h_y\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ є тригонометричними поліномами, сама є тригонометричним поліномом від двох змінних.

2. Слабкі послідовності Гаара. Нехай K — довільне поле,

X — довільна множина. Послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій $f_n\colon X \longrightarrow K$ ми називатимемо *слабкою послідовністю Гаара*, якщо існує така строго зростаюча послідовність номерів $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, що для кожного k система функцій $f_1, \ldots, f_{n_k}$ задовольняє умову Гаара.

Теорема 1. *Тригонометрична система функцій*

$$\{1,\, \cos x,\, \sin x,\, \ldots,\, \cos nx,\, \sin nx,\, \ldots\}$$

є слабкою послідовністю Гаара на проміжку $X = [0, 2\pi)$.

Доведення. За формулами Ейлера

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \text{і} \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

для кожного $n = 0, 1, 2, \ldots$. Заміною $z = e^{ix}$ тригонометрична система функцій переходить у систему функцій

$$1, \frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}, \ldots, \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \frac{z^n - z^{-n}}{2i}, \ldots \tag{$*$}$$

на колі $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$. Оскільки відображення $\varphi\colon\ [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{S}$, $\varphi(x) = e^{ix}$, є бієкцією, то перевірка того, що тригонометрична система функцій є слабкою послідовністю Гаара на $[0, 2\pi)$, зводиться до того, що система $(*)$ є такою на $\mathbb{S}$.

Розглянемо систему функцій $\{1,\, z,\, z^{-1},\, \ldots, z^n,\, z^{-n}, \ldots\}$ на колі $\mathbb{S}$. Нехай $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{2n-1}, z_{2n}$ — різні точки з кола $\mathbb{S}$. Розглянемо визначник

$$\Delta_{2n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ z_0 & z_1 & z_2 & \ldots & z_{2n-1} & z_{2n} \\ z_0^{-1} & z_1^{-1} & z_2^{-1} & \ldots & z_{2n-1}^{-1} & z_{2n}^{-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_0^{n} & z_1^{n} & z_2^{n} & \ldots & z_{2n-1}^{n} & z_{2n}^{n} \\ z_0^{-n} & z_1^{-n} & z_2^{-n} & \ldots & z_{2n-1}^{-n} & z_{2n}^{-n} \end{vmatrix}.$$

Легко зрозуміти, що після переставлення рядків визначник Δ_{2n+1} зводиться до визначника

$$\Delta_{2n+1} = \begin{vmatrix} z_0^{-n} & z_1^{-n} & z_2^{-n} & \dots & z_{2n-1}^{-n} & z_{2n}^{-n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0^{-1} & z_1^{-1} & z_2^{-1} & \dots & z_{2n-1}^{-1} & z_{2n}^{-1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ z_0 & z_1 & z_2 & \dots & z_{2n-1} & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0^{n} & z_1^{n} & z_2^{n} & \dots & z_{2n-1}^{n} & z_{2n}^{n} \end{vmatrix}.$$

Виносячи з кожного стовпчика z_k^{-n}, ми зводимо цей визначник до відомого визначника Вандермонда ([10, с.114] або [11, с.50]).

$$\Delta_{2n+1} = z_0^{-n} z_1^{-n} z_2^{-n} \dots z_{2n-1}^{-n} z_{2n}^{-n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ z_0 & z_1 & z_2 & \dots & z_{2n-1} & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0^{2n} & z_1^{2n} & z_2^{2n} & \dots & z_{2n-1}^{2n} & z_{2n}^{2n} \end{vmatrix} =$$

$$= z_0^{-n} \dots z_{2n}^{-n} \prod_{0 \le k < j \le 2n} (z_j - z_k).$$

Оскільки $z_j \neq z_k$ при $k \neq j$, то $\Delta_{2n+1} \neq 0$. Так само можна перевірити, що і $\Delta_{2n} \neq 0$, тобто система функцій $\{1, z, z^{-1}, \dots, z^n, z^{-n}, \dots\}$ утворює послідовність Гаара на колі $\mathbb{S}$, але нам потрібна лише умова $\Delta_{2n+1} \neq 0$.

Розглянемо тепер поряд з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ z_0 & z_1 & z_2 & \dots & z_{2n-1} & z_{2n} \\ z_0^{-1} & z_1^{-1} & z_2^{-1} & \dots & z_{2n-1}^{-1} & z_{2n}^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0^{n} & z_1^{n} & z_2^{n} & \dots & z_{2n-1}^{n} & z_{2n}^{n} \\ z_0^{-n} & z_1^{-n} & z_2^{-n} & \dots & z_{2n-1}^{-n} & z_{2n}^{-n} \end{pmatrix}$$

і матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \frac{z_0+z_0^{-1}}{2} & \frac{z_1+z_1^{-1}}{2} & \frac{z_2+z_2^{-1}}{2} & \dots & \frac{z_{2n-1}+z_{2n-1}^{-1}}{2} & \frac{z_{2n}+z_{2n}^{-1}}{2} \\ \frac{z_0-z_0^{-1}}{2i} & \frac{z_1-z_1^{-1}}{2i} & \frac{z_2-z_2^{-1}}{2i} & \dots & \frac{z_{2n-1}-z_{2n-1}^{-1}}{2i} & \frac{z_{2n}-z_{2n}^{-1}}{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{z_0^n+z_0^{-n}}{2} & \frac{z_1^n+z_1^{-n}}{2} & \frac{z_2^n+z_2^{-n}}{2} & \dots & \frac{z_{2n-1}^n+z_{2n-1}^{-n}}{2} & \frac{z_{2n}^n+z_{2n}^{-n}}{2} \\ \frac{z_0^n-z_0^{-n}}{2i} & \frac{z_1^n-z_1^{-n}}{2i} & \frac{z_2^n-z_2^{-n}}{2i} & \dots & \frac{z_{2n-1}^n-z_{2n-1}^{-n}}{2i} & \frac{z_{2n}^n-z_{2n}^{-n}}{2i} \end{pmatrix}$$

та

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix}.$$

Ясно, що $B=CA$. Тому

$$\det B=\det C\det A.$$

Але $\det A=\Delta_{2n+1}\neq 0$ і $\det C=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i}\end{vmatrix}^n=\left(-\frac{1}{2i}\right)^n=\frac{i^n}{2^n}\neq 0.$ Тому і $\det B\neq 0$, а це і показує, що система (*) є слабкою послідовністю Гаара на $\mathbb{S}$, а з нею такою послідовністю буде і тригонометрична система функцій на $[0,2\pi)$.

3. Теорема єдиності. Нам буде потрібний один результат, який доведений у [5] для послідовностей Гаара. Виявляється, він справедливий і для слабких послідовностей Гаара.

Нехай X — множина і K — довільне поле. Для підмножини F простору K^X всіх функцій $f\colon X\longrightarrow K$ розглянемо її лінійну оболонку

$$spF=\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k\colon n\in\mathbb{N}, f_1,\dots,f_n\in F,\lambda_1,\dots,\lambda_n\in K\right\}.$$

Її елементи $f=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k f_k$ називаються *F-поліномами.*

Якщо $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — деяка послідовність функцій $f_n\colon X\longrightarrow K$ і $F=\{f_n\colon n\in N\}$, то для F-полінома f його *степенем* $\deg f$ ми називаємо найменше з чисел n, таких, що $f=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k f_k$ для деяких елементів $\lambda_k\in K$.

Теорема 2. *Нехай $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — слабка послідовність Гаара на множині X, $F=\{f_n\colon n\in\mathbb{N}\}$, A — нескінченна підмножина X і f та g — F-поліноми, такі, що $f|_A=g|_A$. Тоді $f=g$.*

Доведення. Розглянемо F-поліном $h=f-g$. Для нього $h(x)=0$ на A. Існує така строго зростаюча послідовність номерів n_k, що система

$f_1, \ldots, f_{n_k}$ задовольняє умову Гаара на X для кожного k. Оскільки $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то існує такий номер k, що $n_k \geq \deg h$. Покладемо $n = n_k$. Зрозуміло, що існують такі елементи $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ з K, що

$$h = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s f_s.$$

В нескінченній множині A можна вибрати n різних елементів $x_1, \ldots, x_n$. За побудовою

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_s f_s\left(x_t\right) = h\left(x_t\right) = 0$$

при $t = 1, \ldots, n$, адже $x_t \in A$. Але визначник

$$\Delta = \det\left(f_s\left(x_t\right)\right)_{t,s=1}^{n} \neq 0,$$

бо система функцій $f_1, \ldots, f_n$ задовольняє умову Гаара на X. Оскільки однорідна система рівнянь з ненульовим визначником має тільки нульовий розв'язок, то $\alpha_s = 0$ при $s = 1, \ldots, n$, отже, і $h = 0$, а значить, $f = g$.

4. $F \otimes G$-поліноміальність (F, G)-поліноміальних функцій. Нехай K — довільне поле, X і Y — множини і $F \subseteq K^X$, а $G \subseteq K^Y$. Функцію $f\colon X \times Y \longrightarrow K$ ми називаємо (F, G)-*поліноміальною*, якщо для кожного $x \in X$ її вертикальний x-розріз $f^x = f\left(x, \cdot\right) : Y \longrightarrow K$ — це G-поліном і для кожного $y \in Y$ її горизонтальний y-розріз $f_y = f\left(\cdot, y\right) : X \longrightarrow K$ — це F-поліном.

Для функцій $f\colon X \longrightarrow K$ і $g\colon Y \longrightarrow K$ визначимо їх тензорний добуток $f \otimes g\colon X \times Y \longrightarrow K$ формулою

$$\left(f \otimes g\right)\left(x, y\right) = f\left(x\right) g\left(y\right).$$

Для множин F і G покладемо

$$F \otimes G = \left\{f \otimes g\colon f \in F, g \in G\right\}.$$

Теорема 3. *Нехай X і Y — нескінченні множини, одна з яких незліченна, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ — слабкі послідовності Гаара на X і Y відповідно, $F = \{f_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, $G = \{g_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ і $h\colon X \times Y \longrightarrow K$ — (F, G)-поліноміальна функція. Тоді h — це $F \otimes G$-поліном.*

Доведення. Для певності будемо вважати, що множина X незлічена. Оскільки $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ — це слабка послідовність Гаара на Y, то існує така строго зростаюча послідовність номерів m_j, що для кожного j система функцій $g_1, \ldots, g_{m_j}$ задовольняє умову Гаара на Y.

Введемо у розгляд множини

$$A_j = \{x \in X \colon \deg h^x \leq m_j\}.$$

Оскільки $m_j \to \infty$ при $j \to \infty$ і для кожного $x \in X$ функція $h^x \colon Y \longrightarrow K$ — це G-поліном певного степеня $\deg h^x$, то $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j = X$. З незліченності множини X випливає, що існує такий номер j, що множина $A = A_j$ незлічена, адже об'єднання послідовності не більш, ніж злічених множин залишається не більш, ніж зліченною множиною. Зрозуміло, що множина A, будучи незліченною, є і нескінченною. У нескінченній множині Y виберемо $m = m_j$ різних елементів $y_1, \ldots, y_m$.

Нехай $x \in A$. За означенням множини A існують такі елементи $b_1(x), \ldots, b_m(x)$ з K, що

$$h(x, y) = h^x(y) = \sum_{s=1}^{m} b_s(x)\, g_s(y)$$

для кожного $y \in Y$. Для кожного $t = 1, \ldots, m$ будемо мати

$$\sum_{s=1}^{m} b_s(x)\, g_s(y_t) = h(x, y_t) = h_{y_t}(x). \qquad (**)$$

За умовою визначник

$$\Delta = \det\left(g_s(y_t)\right)_{t,s=1}^{m} \neq 0.$$

За правилом Крамера з рівності $(**)$ випливає, що

$$b_s(x) = \frac{\Delta_s}{\Delta},$$

де

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} g_1(y_1) & \ldots & g_{s-1}(y_1) & h_{y_1}(x) & g_{s+1}(y_1) & \ldots & g_m(y_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_1(y_m) & \ldots & g_{s-1}(y_m) & h_{y_m}(x) & g_{s+1}(y_m) & \ldots & g_m(y_m) \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи цей визначник за елементами s-го стовпчика, ми отримаємо, що

$$\Delta_s = \sum_{t=1}^{m} \alpha_{s,t} h_{y_t}(x),$$

де $\alpha_{s,t}$ — відповідні алгебраїчні доповнення елементів $h_{y_t}(x)$. Тому

$$b_s(x) = \sum_{t=1}^{m} \beta_{s,t} h_{y_t}(x),$$

де елементи $\beta_{s,t} = \frac{\alpha_{s,t}}{\Delta}$ поля K не залежать від x.

Функції h_{y_t}при $t = 1, \ldots, m$ — це F-поліноми, а значить, F-поліномом буде і їх лінійна комбінація

$$\varphi_s = \sum_{t=1}^{m} \beta_{s,t} h_{y_t}$$

для кожного $s = 1, \ldots, m$. Оскільки s набуває скінченне число значень, то існує такий номер n і елементи $\lambda_{s,u}$ з K, що

$$\varphi_s = \sum_{u=1}^{n} \lambda_{s,u} f_u$$

для $s = 1, \ldots, m$. Введемо в розгляд функцію $p \colon X \times Y \longrightarrow K$, покладаючи

$$p(x,y) = \sum_{s=1}^{m} \varphi_s(x) g_s(y) = \sum_{s=1}^{m} \left(\sum_{u=1}^{n} \lambda_{s,u} f_u(x) \right) g_s(y) =$$

$$= \sum_{u=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \lambda_{s,u} f_u(x) g_s(y) = \sum_{u=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} (f_u \otimes g_s)(x,y)$$

для довільної пари $(x,y) \in X \times Y$. Ясно, що p — це $F \otimes G$-поліном. Оскільки $\varphi_s(x) = b_s(x)$ на A, то

$$h(x,y) = p(x,y)$$

на добутку $A \times Y$.

Зафіксуємо $y \in Y$. Функції h_y і p_y — це F-поліноми, причому $h_y|_A = p_y|_A$. Але множина A нескінченна і $f_1, f_2 \ldots$ — це слабка послідовність

Гаара на X. Тому за теоремою 2 будемо мати, що $h_y = p_y$. Оскільки ця рівність справджується для довільного $y \in Y$, то $h = p$, отже, h — це $F \otimes G$-поліном.

5. $F_1 \otimes \ldots \otimes F_n$-поліноміальні функції. Нехай $X_1, \ldots, X_n$ — довільні множини і $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ — їхній добуток. Для функцій $f_k \colon X_k \longrightarrow K$, $k = 1, \ldots, n$, зі значеннями у довільному полі K і точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ покладемо

$$(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n).$$

Функція $f = f_1 \otimes \ldots \otimes f_n \colon X \longrightarrow K$ називається *тензорним* добутком функцій $f_1, \ldots, f_n$. Для підмножин $F_k \subseteq K^{X_k}$, де $k = 1, \ldots, n$, покладемо

$$F_1 \otimes \ldots \otimes F_n = \{f_1 \otimes \ldots \otimes f_n \colon f_k \in F_k,\, k = 1, \ldots, n\},$$

Для $F_1 \otimes \ldots \otimes F_n$-полінома $f \colon X_1 \times \ldots \times X_n \longrightarrow K$ ми пишемо, що $\deg f \le m$, якщо

$$f = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1}^{m} \alpha_{k_1, \ldots, k_n} f_{1,k_1} \otimes \ldots . \otimes f_{n,k_n}.$$

Для точки $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X$ і номера $k = 1, \ldots, n$ покладаємо $\hat{a}_k = (a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots a_n)$ і $\hat{X}_k = X_1 \times \ldots \times X_{k-1} \times X_{k+1} \times \ldots \times X_n$. Для функції $f \colon X \longrightarrow K$ і точки a введемо функцію $f_{\hat{a}_k} \colon X_k \longrightarrow K$, покладаючи

$$f_{\hat{a}_k}(x_k) = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n).$$

Функцію $f \colon X \longrightarrow K$ ми називаємо $(F_1, \ldots, F_n)$-*поліноміальною*, якщо для кожної точки $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X$ і довільного $k = 1, \ldots, n$ функція $f_{\hat{a}_k} \colon X_k \longrightarrow K$ є F_k-поліномом.

6. Зв'язок між $(F_1, \ldots, F_n)$-поліноміальними та $(F_1 \otimes \ldots \otimes F_n)$-поліноміальними функціями. Тут ми узагальнимо Теорему 3 на випадок функції багатьох змінних.

Теорема 4. *Нехай K — довільне поле, $X_1, \ldots, X_{n-1}$ — незліченні множини, X_n — нескінченна множина, для кожного $k = 1, \ldots, n$ задано зліченну множину $F_k = \{f_{k,j} \colon j \in \mathbb{N}\}$ функцій $f_{k,j} \colon X_k \longrightarrow K$, для* *якої* $(f_{k,j})_{j=1}^{\infty}$ *— це слабка послідовність Гаара на* X_k *при* $k = 1, \ldots, n$, $F = F_1 \otimes \ldots \otimes F_n$ *і* $f = X_1 \times \ldots \times X_n \longrightarrow K - (F_1, \ldots, F_n)$*-поліноміальна функція. Тоді* F *— це* F*-поліном.*

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n. При $n = 1$ твердження тривіальне. Припустимо, що $n > 1$ і наше твердження справедливе, коли кількість множин дорівнює $n - 1$. Доведемо, що воно справджується і для n множин, як у формулюванні теореми.

Для кожного $x_1 \in X_1$ розглянемо функцію $f_{x_1} \colon \hat{X}_1 \longrightarrow K$, $f_{x_1}(x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. За індуктивним припущенням функція f_{x_1} буде $F_2 \otimes \ldots \otimes F_n$-поліномом на $\hat{X}_1$.

Введемо у розгляд множини

$$A_m = \{x_1 \in X_1 \colon \deg f_{x_1} \leq m\}.$$

Ясно, що $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m = X_1$. Оскільки множина X_1 незліченна, то існує такий номер m, що множина $A = A_m$ незліченна, а значить і нескінченна.

Покладемо $\tilde{A} = A \times X_2 \times \ldots X_{n-1}$. Зафіксуємо точку $\hat{x}_n = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \tilde{A}$. Функція $f_{\hat{x}_n} \colon X_n \longrightarrow K -$це F_n-поліном, причому $\deg f_{\hat{x}_n} \leq m$, адже $x_1 \in A$. Оскільки $(f_{n,j})_{j=1}^{\infty}$ — це слабка послідовність Гаара, то існує така строго зростаюча послідовність номерів j_s, що для кожного $s = 1, 2, \ldots$ функції $f_{n,1}, \ldots, f_{n,j_s}$ задовольняють умову Гаара на X_n. Ясно, що існує такий номер s, що $j_s \geq m$. Покладемо $j_s = p$. Оскільки $\deg f_{\hat{x}_n} \leq p$, то

$$f_{\hat{x}_n}(x_n) = \sum_{j=1}^{p} a_j(\hat{x}_n) f_{n,j}(x_n)$$

для деяких функцій $a_j \colon \tilde{A} \longrightarrow K$. Оскільки множина X_n нескінченна, то з неї можна вибрати p різних точок $x_{n,1}, \ldots, x_{n,p}$. Для кожного $q = 1, \ldots, p$ маємо, що

$$\sum_{j=1}^{p} a_j(\hat{x}_{n,q}) f_{n,j}(x_{n,q}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n,q}).$$

Оскільки $\det(f_{n,j}(x_{n,q}))_{j,q=1}^{p} \neq 0$, то за правилом Крамера існують такі елементи $\mu_{j,q} \in K$, що

$$a_j(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \sum_{q=1}^{p} \mu_{j,q} f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n,q})$$

для довільного набору $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ з $\tilde{A}$.

За індуктивним припущенням кожна функція $f_{x_{n,q}} \colon \hat{X}_n \longrightarrow K$, $f_{x_{n,q}}(x_1,\ldots,x_{n-1}) = f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n,q})$ – це $F_1 \otimes \ldots \otimes F_{n-1}$-поліном. Тому і коефіцієнти a_j–це $F_1 \otimes \ldots \otimes F_{n-1}$-поліноміальні функції на множині $\tilde{A}$.

Розглянемо функцію

$$g(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{q=1}^{p} \mu_{j,q} f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n,q}) f_{n,j}(x_n),$$

яка є, очевидно, F-поліномом на X. При цьому ясно, що $g|_{\tilde{A}\times X_n} = f|_{\tilde{A}\times X_n}$.

Зафіксуємо $\hat{x}_1 = (x_2,\ldots,x_n) \in \hat{X}_1$. З попередньої рівності випливає, що $f_{\hat{x}_1}|_A = g_{\hat{x}_1}|_A$. Оскільки $f_{\hat{x}_1}$ і $g_{\hat{x}_1}$ — це F_1-поліноми і множина A нескінченна, то за теоремою єдності $f_{\hat{x}_1} = g_{\hat{x}_1}$, а значить, для довільних точок $x_1 \in X_1,\ldots,x_n \in X_n$

$$f(x_1,\ldots,x_n) = g(x_1,\ldots,x_n),$$

тобто $f = g$ на X. Це доводить, що f є F-поліномом.

7. Тригонометричні поліноми. Розглянемо тригонометричну систему функцій

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots, \qquad (***)$$

яку ми позначимо символом T. У Теоремі 1 ми встановили, що послідовність $(***)$ — це слабка послідовність Гаара на множині $[0,2\pi)$. Тому до неї можна застосовувати результати Теорем 3 і 4. В ролі поля K тут виступатиме поле $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел. T-поліноми називаються *тригонометричними поліномами від однієї змінної*, вони мають вигляд

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Система $T \otimes T$ складається з функцій

$$1, \cos x, \sin x, \cos y, \sin y, \cos x \cos y, \cos x \sin y, \sin x \sin y, \sin x \cos y, \ldots.$$

$T \otimes T$-поліноми — це тригонометричні многочлени чи поліноми від двох змінних. Загальніше, $\underbrace{T \otimes \ldots \otimes T}_{n}$-поліноми — це тригонометричні многочлени чи поліноми від n змінних. Застосуємо отримані результати до тригонометричних многочленів.

Теорема 5. *Нехай $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ — це (T, T)-поліноміальна функція. Тоді f — це тригонометричний поліном від двох змінних.*

Доведення. Нехай $X = Y = [0, 2\pi)$. З теорем 1 і 3 негайно випливає, що функція f — це тригонометричний поліном від двох змінних на множині $X \times Y = [0, 2\pi)^2$. Тобто існує такий $T \otimes T$-поліном $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, що $h(x, y) = g(x, y)$ на $[0, 2\pi)^2$.

Зафіксуємо y з $[0, 2\pi)$. Функції $f_y\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ і $g_x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ є 2π-періодичними, адже вони є тригонометричними поліномами від однієї змінної. Крім того, $f_y(x) = f(x, y) = g(x, y) = g_y(x)$, якщо $x \in [0, 2\pi)$. Тому $f_y(x) = g_y(x)$ і для всіх $x \in \mathbb{R}$, отже, $f(x, y) = g(x, y)$ на $[0, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

Зафіксуємо тепер $x \in \mathbb{R}$. Функції $f^x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ і $g^x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ теж є тригонометричними поліномами, а значить, 2π-переіодичними функціями. Крім того, $f^x(y) = g^x(y)$ на $[0, 2\pi)$, а тому $f^x(y) = g^x(y)$ і на $\mathbb{R}$. Таким чином, $f(x, y) = g(x, y)$ на $\mathbb{R}^2$, отже, F — це тригонометричний поліном від двох змінних.

Так само з Теорем 1 і 4 виводиться загальніша

Теорема 6. *Нехай $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ — це $\underbrace{(T, \ldots, T)}_{n}$-поліном. Тоді F — це тригонометричний поліном від n змінних.*

Література

[1] *Haar A.* Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen// Math. Annalen. — 1918. — **78**. — S. 294 – 311.

[2] *Колмогоров А. Н.* Замечание но поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции // Успехи мат. наук. — 1948. — **3**, №1. — С. 216 – 221.

[3] *Зуховицкий С. И., Крейн М. Г.* Замечание об одном возможном обобщении теорем А. Хаара и А. Н. Колмогорова // Успехи мат. наук. — 1950. — **5**, №1. — С. 217 – 229.

[4] *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 408 с.

[5] *Волошин Г. А., Косован В. М., Маслюченко В. К.* Умова Гаара та сукупна поліноміальність нарізно поліноміальних функцій // Укр. мат. журн. — 2017. — **69**, №1. — С. 17 – 27.

[6] *Mazur S., Orlicz W.* Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen. Erste Mitteilung // Stud. Math. — 1934. — **5**, №1. — S. 50 – 68.

[7] *Bochnak J., Siciak J.* Polynomials and multilinear mapping in topological vector spaces // Stud. Math. — 1971. — **39**. — P. 59 – 76.

[8] *Косован В. М., Маслюченко В. К.* Нарізно поліноміальні функції // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту, В. Математика. — Чернівці: Рута, 2008. — **374**. — С. 66 – 74.

[9] *Волошин Г. А., Косован В. М., Маслюченко В. К.* Узагальнені нарізно поліноміальні функції та умова Гаара // Мат. Друг. Всеук. наук. конф., присв. 55-річчю каф. вищ. мат. Ів.-Франк. нац. тех. ун. нафти і газу, Івано-Франківськ, 13-15 жовтня, 2016. — Івано-Франківськ, 2016. — С. 33 – 34.

[10] *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1971. — 432 с.

[11] *Чарін В. С.* Лінійна алгебра. — К.: Техніка, 2004. — 416 с.