Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, Т.10, №1, 7-17

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, Д. А. Левченко (Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара)

РЕЛЬЕФНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Sharp values of ridge approximation of classes of functions harmonic inside unit disk and ring, which have boundary values from rather arbitrary classes of convolutions, are obtained.

Знайдені нові точні оцінки рівнорозподіленої рельєфної апроксимації класів гармонічних в одиничному крузі та кільці функцій, що на межах цих областей належать досить довільним класам згорток.

Найдены точные оценки равнораспределенной рельефной аппроксимации классов гармонических в единичном круге и кольце функций, которые на границах этих областей принадлежат достаточно произвольным классам сверток.

В данной статье рассматриваются задачи равнораспределенной рельефной аппроксимации решений задачи Дирихле для единичного круга и кольца в равномерной метрике.

Приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{T}$ — единичная окружность на плоскости $\mathbb{R}^2$ реализованная как отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами, B — единичный круг $B = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$, а $D = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ r < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R\}$ — кольцо $(0 < r < R)$. Для множества $G \in \{\mathbb{T}, B, D\}$ через $C(G)$ и $L_p(G)(1 \le p \le \infty)$ будем обозначать пространства функций $f : G \to \mathbb{R}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_{C(G)}$ и $\|\cdot\|_{L_p(G)}$.

Введем классы функций. Как обычно, свертку $K * \varphi$ функций $K, \varphi \in L_1(\mathbb{T})$ (K — ядро свертки) определим равенством

$$(K * \varphi)(x) = \int\limits_0^{2\pi} K(x - t)\varphi(t)dt.$$

© **В. Ф. Бабенко, Д. А. Левченко, 2013**

Положим

$$\mu(K) = \begin{cases} 1, & K \perp 1, \\ 0, & K \not\perp 1. \end{cases}$$

Для заданного ядра K и множества $F \subset L_1(\mathbb{T})$ обозначим через $K*F$ множество функций, представимых в виде

$$f(x) = a\mu(K) + (K * \varphi)(x),\ a \in \mathbb{R},\ \varphi \in F,\ \varphi\perp\mu(K).$$

Будем рассматривать задачу Дирихле в единичном круге и кольце. Задача Дирихле в единичном круге — это задача о нахождении гармонической в B и непрерывной в замыкании $\overline{B}$ области B функции $u(\cdot,\cdot)$ такой, что

$$\triangle u = 0,\ u(\cos t, \sin t) = f(t), \qquad (1)$$

гле f – заданная 2π-периодическая функция.

Задача Дирихле для кольца – это задача о нахождении гармонической в D и непрерывной в замыкании $\overline{D}$ области D функции $u(\cdot,\cdot)$ такой, что

$$\triangle u = 0,\ u(R\cos t, R\sin t) = f_1(t),\ u(r\cos t, r\sin t) = f_2(t), \qquad (2)$$

где f_1, f_2 – заданные 2π-периодические функции.

Для заданных ядер K_0, K_1, K_2 через $(K_0 * F)^H(B)$ и $(K_{1,2} * F_{1,2})^H(D)$ будем обзначать множества решений задач (1) и (2) соответсвенно с $f \in K_0 * F, f_1 \in K_1 * F_1, f_2 \in K_2 * F_2$.

Пусть $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности. Через H^ω будем обозначать множество непрерывных 2π-периодических функций, имеющих заданную мажоранту $\omega(t)$ модулей непрерывности.

Ниже в качеств множеств F, F_1, F_2 будем рассматривать единичный шар F_p в пространстве $L_\infty(\mathbb{T})$ или классы типа H^ω.

Если X есть $C(G)$ или $L_p(G)$ и H — подпространство X, то для функции $f \in X$ величина

$$E(f, H)_X = \inf_{u\in H} \|f - u\|_X$$

называется наилучшим приближением подпространством H в метрике пространства X. Задача наилучшего приближения класса

$\mathfrak{M} \subset X$ подпространством H заключается в отыскании величины

$$E(\mathfrak{M}, H)_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} E(f, H)_X.$$

Для функций заданных на $\mathbb{T}$ в качетве аппроксимирующего подпространства будем рассматривать F^T_{2n-1}, $n = 1, 2, \ldots,$ – подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$. Обозначим через $H^n_p(\mathbb{T})$ класс тех функций из F_p, которые ортогональны подпространству F^T_{2n-1}. Для функций заданных на B или D в качестве аппроксимирующих будем рассматривать подпространства $\mathcal{P}^2_n$ алгебраических полиномов вида

$$P(x) = \sum_{\substack{k,l \geq 0,\\ k+l \leq n}} a_{kl} x_1^k x_2^l,$$

а также множество W^{eq}_n рельефных функций с n равнораспределенными направлениями, т.е. множество функций вида

$$R(x) = \sum_{j=1}^{n} W_j(x \cdot \theta_j),$$

где $W_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции одной действительной переменной (волновые профили), $x \cdot \theta_j = x_1 \cos \frac{\pi j}{n} + x_2 \sin \frac{\pi j}{n}$. Для подпространства F^T_{2n-1} будем использовать стандартные сокращения $E(f, F^T_{2n-1})_X = E_n(f)_X$ и $E(\mathfrak{M}, F^T_{2n-1})_X = E_n(\mathfrak{M})_X$.

Как хорошо известно,

$$\mathcal{P}^2_{n-1} \subseteq W^{eq}_n.$$

Некоторые известные результаты по рельефной аппроксимации классов функций можно найти в работах [1 – 5].

Целью данной работы является получение точных оценок рельефной аппроксимации некоторых классов гармонических функций. Мы, во-первых, получим весьма широкое обобщение результатов работы [5], и, во-вторых, их аналоги для классов функций, заданных в кольце.

Ниже будем считать, что ядра сверток удовлетворяют следующему условию (см., например, [6, с. 309]).

Условие N_n^*. Существует полином $T_{n,j}^* \in F_{2n-1}^T$ и по меньшей мере одна точка $\xi_0^j \in [0, \frac{\pi}{n}]$ такие, что разность $K_j(x) - T_{n,j}^*(x)$ меняет знак на $\mathbb{T}$ в точках $x_k^j = \xi_0^j + \frac{k\pi}{n}$, $n = 0, 1, \ldots, 2n-1$, $j = 0, 1, 2$, и только в них.

Условие N_n^* было введено С.М. Никольским [7], при рассмотрении задач наилучшего приближения классов сверток. Это условие позволяет найти наилучшие L_1-приближения ядра K тригонометрическими полиномами.

Условию N_n^* удовлетворяют практически все важные для теории приближения ядра. Приведем некоторые примеры ядер, удовлетворяющих этому условию.

1. Ядра Бернулли (см., например, [8 – 10])

$$B_r(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \frac{\pi r}{2})}{k^r}, \ r \in \mathbb{N}.$$

2. Ядра $B_{r,\theta}$

$$B_{r,\theta}(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \frac{\pi\theta}{2})}{k^r}, \ r > 0, \ \theta \in \mathbb{R}.$$

По поводу известных результатов о наилучших L_1-приближениях ядер $B_{r,\theta}$ и более общих ядер, представимых в виде периодических интегралов от абсолютно монотонных функций см. работы [11 – 13].

3. Ядра Надя (см., например, [14]).

$a)$

$$K(t) = {\sum_{k=n}^{\infty}}' \mu_k \cos kt, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

(здесь ${\sum\limits_{k=n}^{\infty}}'$ означат, что если $n = 0$, то первый член нужно разделить на 2) где положительные числа $\mu_k, \mu_{k+1}, \ldots$ образуют последовательность, сходящуюся к нулю и три раза монотонную: $\Delta_k = \mu_k - \mu_{k+1} \geq 0$, $\Delta_k^2 = \Delta_k - \Delta_{k+1} \geq 0$, $\Delta_k^3 = \Delta_k^2 - \Delta_{k+1}^2 \geq 0$ ($k = n, n+1, \ldots$).

b)

$$K(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\nu_k\sin kt,\quad n=1,2,\dots,$$

где $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{\nu_k}{k}<\infty$ и положительные числа $\nu_k,\nu_{k+1},\dots$ образуют последовательность, сходящуюся к нулю и два раза монотонную.

4. CVD-ядра (см., например, [15], [16]). Непрерывное на $\mathbb{T}$ и не являющееся тригонометрическим полиномом ядро K называется CVD-ядром, если число перемен знака на периоде функции $a\mu+K*\varphi$ не больше чем количество перемен знака на периоде функции φ для любых $\varphi\in C(\mathbb{T})$, $\varphi\perp\mu(K)$, $a\in\mathbb{R}$. Следует отметить, что CVD-ядра сами образуют весьма широкую и важную для теории аппроксимации совокупность ядер.

5. Если непрерывное на $(0,2\pi)$ ядро K обладает тем свойством, что для любого полинома $T\in F_{2n-1}^{T}$ разность $K-T$ имеет на периоде не более $2n$ перемен знака, то ядро K удовлетворяе условию N_n^*.

Теперь перейдем к формулировке и доказательству основных результатов этого раздела.

Теорема 1. *Для любых суммируемых ядер $K_0(t),K_1(t),K_2(t)$, удовлетворяющих условию N_n^*, справедливы соотношения*

$$E\left((K_0*F_\infty)^H(B),W_n^{eq}\right)_{C(B)}=E\left((K_0*F_\infty)^H(B),\mathcal{P}_{n-1}^2\right)_{C(B)}=$$

$$=E_n(K_0)_{L_1(\mathbb{T})}=\|K_0*\varphi_n\|_{C(\mathbb{T})},\tag{3}$$

$$E\left((K_{1,2}*F_\infty)^H(D),W_n^{eq}\right)_{C(D)}=E\left((K_{1,2}*F_\infty)^H(D),\mathcal{P}_{n-1}^2\right)_{C(D)}=$$

$$=\max\left\{E_n(K_1)_{L_1(\mathbb{T})},E_n(K_2)_{L_1(\mathbb{T})}\right\}=$$

$$=\max\left\{\|K_1*\varphi_n\|_{C(\mathbb{T})},\|K_2*\varphi_n\|_{C(\mathbb{T})}\right\},\tag{4}$$

где $\varphi_n(t)=\operatorname{sign}\sin nt$.

Доказательство. В работе [5] при получении оценки сверху величины $E(W_\infty^r,W_n^{eq})_{C(B)}=E(B_r*F_\infty,W_n^{eq})_{C(B)}$ использовались следующая цепочка неравенств. Пусть $\mathcal{A}_n^2$ множество гармонических многочленов из $\mathcal{P}_n^2$. Тогда для любой функции u, являющейся решением задачи (1) с непрерывной граничной функцией f, справедливы следующие неравенства

$$E\left(u, W_n^{eq}\right)_{C(B)} \le E\left(u, \mathcal{P}_{n-1}^2\right)_{C(B)} \le E\left(u, \mathcal{A}_{n-1}^2\right)_{C(B)} = E_n(f)_{C(\mathbb{T})}. \tag{5}$$

Аналогичную оценку можно получить и для приближения функции u, являющейся решением задачи (2) с граничными функциями f_1, f_2. Очевидно, что

$$E\left(u, W_n^{eq}\right)_{C(D)} \le E\left(u, \mathcal{P}_{n-1}^2\right)_{C(D)} \le E\left(u, \mathcal{A}_{n-1}^2\right)_{C(D)}. \tag{6}$$

Далее, поскольку множество сужений на окружность гармонических многочленов совпадает с подпространством F_{2n-1}^T, а также в силу принципа максимума для гармонических функций получим,

$$E\left(u, \mathcal{A}_{n-1}^2\right)_{C(D)} = \max\left\{E_n(f_1)_{C(\mathbb{T})}, E_n(f_2)_{C(\mathbb{T})}\right\},$$

что вместе с (6) дает следующие соотношения

$$E\left(u, W_n^{eq}\right)_{C(D)} \le E\left(u, \mathcal{P}_{n-1}^2\right)_{C(D)} \le E\left(u, \mathcal{A}_{n-1}^2\right)_{C(D)} =$$

$$= \max\left\{E_n(f_1)_{C(\mathbb{T})}, E_n(f_2)_{C(\mathbb{T})}\right\}. \tag{7}$$

Еще одним существенным фактом для получения оценки сверху является следующее утверждение (см., например, [6, с. 79]). Для любого суммируемого ядра $K(t)$, удовлетворяющего условию N_n^* и функции $f = K * \varphi$ справедливы соотношения

$$\sup_{\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \le 1} E_n(f)_{C(\mathbb{T})} = E_n(K)_{L_1(\mathbb{T})} = \|K * \varphi_n\|_{C(\mathbb{T})}. \tag{8}$$

Из (5), (7) и (8) очевидно следует, что

$$E\left((K_0 * F_\infty)^H(B), W_n^{eq}\right)_{C(B)} \le E\left((K_0 * F_\infty)^H(B), \mathcal{P}_{n-1}^2\right)_{C(B)} \le$$

$$\le E_n(K_0)_{L_1(\mathbb{T})} = \|K_0 * \varphi_n\|_{C(\mathbb{T})} \tag{9}$$

и

$$E\left((K_{1,2} * F_\infty)^H(D), W_n^{eq}\right)_{C(D)} \le E\left((K_{1,2} * F_\infty)^H(D), \mathcal{P}_{n-1}^2\right)_{C(D)} \le$$

$$\le \max\left\{E_n(K_1)_{L_1(\mathbb{T})}, E_n(K_2)_{L_1(\mathbb{T})}\right\} =$$
$$= \max\left\{\|K_1 * \varphi_n\|_{C(\mathbb{T})}, \|K_2 * \varphi_n\|_{C(\mathbb{T})}\right\}. \tag{10}$$

Нужные оценки сверху получены.

При получении оценок снизу будем использовать соотношение двойственности для наилучшего приближения подпространством (см., например, [6, с. 34]). В [5] было показано, что функционал

$$\Phi(u) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k u(\cos\gamma_k, \sin\gamma_k),\ \gamma_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

удовлетворяет условиям $\Phi \in C(B)^*$, $\|\Phi\| \le 1$ и $\Phi \perp W_n^{eq}$. Отсюда и из упомянутой теоремы двойственности следует, что для любой функции $u \in (K_0 * F_\infty)^H$ справедливо следующее соотношение

$$E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \ge \Phi(u).$$

Положим

$$f_0^*(x) = (K * \varphi_n)(x - \tau_0),$$

где τ_0 выбрано так, чтобы для $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$ было

$$f_0^*\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \|K_0 * \varphi_n\|_{C(\mathbb{T})},$$

и

$$f_0^*\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) = -\|K_0 * \varphi_n\|_{C(\mathbb{T})}$$

(ясно, что такое τ_0 существует).

Обозначим через u^* решение задачи (1) с граничной функцией $f_0^*\left(t - \frac{\pi}{2n}\right)$. Поскольку

$$u^*(\cos\gamma_k, \sin\gamma_k) = f_0^*\left(\gamma_k - \frac{\pi}{2n}\right) = (-1)^k\|K_0 * \varphi_n\|_{L_\infty(\mathbb{T})},$$

то

$$\Phi(u^*) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k u^*(\cos\gamma_k, \sin\gamma_k) = \|K_0 * \varphi_n\|_{L_\infty(\mathbb{T})}.$$

Следовательно

$$E(u^*, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \geq \|K_0 * \varphi_n\|_{L_\infty(\mathbb{T})},$$

что вместе с (9) дает (3).

Докажем теперь равенство (4). Аналогично тому, как это было сделано в [5] для функционала Φ, нетрудно показать, что функционал

$$\Phi_\rho(u) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k u(\rho \cos \gamma_k, \rho \sin \gamma_k)$$

$\gamma_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, при любом фиксированном $\rho > 0$ удовлетворяет соотношениям $\Phi_\rho \in C(D)^*$, $\|\Phi_\rho\| \leq 1$ и $\Phi_\rho \perp W_n^{eq}$.

Введем две функции

$$f_1^*(x) = (K_1 * \varphi_n)(x - \tau_1)$$

и

$$f_2^*(x) = (K_2 * \varphi_n)(x - \tau_2),$$

где $\tau_i,\ i = 1, 2$ выбраны так, чтобы для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ было

$$f_i^* \left(\frac{2k\pi}{n} \right) = \|K_i * \varphi_n\|_{C(\mathbb{T})},$$

и

$$f_i^* \left(\frac{(2k+1)\pi}{n} \right) = -\|K_i * \varphi_n\|_{C(\mathbb{T})}$$

(ясно, что такие τ_i существуют).

Функции f_1^* и f_2^* принадлежат $K_1 * F_\infty$ и $K_2 * F_\infty$ соответственно. Обозначим через u^{**} решение задачи (2) с граничными функциями $f_1^* \left(t - \frac{\pi}{2n}\right)$ и $f_2^* \left(t - \frac{\pi}{2n}\right)$. Будем иметь

$$u^{**}(R \cos \gamma_k, R \sin \gamma_k) = f_1^* \left(\gamma_k - \frac{\pi}{2n} \right) = (-1)^k \|K_1 * \varphi_n\|_{C(\mathbb{T})},$$

$$u^{**}(r \cos \gamma_k, r \sin \gamma_k) = f_2^* \left(\gamma_k - \frac{\pi}{2n} \right) = (-1)^k \|K_2 * \varphi_n\|_{C(\mathbb{T})}.$$

Следовательно,

$$\Phi_R(u^{**}) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k u^{**}(R\cos\gamma_k, R\sin\gamma_k) = \|K_1 * \varphi_n\|_{C(\mathbb{T})},$$

$$\Phi_r(u^{**}) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k u^{**}(r\cos\gamma_k, r\sin\gamma_k) = \|K_2 * \varphi_n\|_{C(\mathbb{T})},$$

что вместе с уже упоминавшейся теоремой двойственности дает

$$E\left((K_{1,2} * F_\infty)^H(D), W_n^{eq}\right)_{C(D)} \geq$$

$$\geq \max\{\Phi_R(u^{**}),\ \Phi_r(u^{**})\} \geq$$

$$\geq \max\left\{\|K_1 * \varphi_n\|_{C(\mathbb{T})}, \|K_2 * \varphi_n\|_{C(\mathbb{T})}\right\}.$$

Отсюда и из (10) следует (4). Теорема доказана.

Теперь обратимся к рельефной аппроксимации решений задачи Дирихле для круга в случае, когда граничная функция принадлежит классу $K * H^\omega$ и задачи Дирихле для кольца в случае, когда граничные функции принадлежат классам $K_1 * H^{\omega_1}$ и $K_2 * H^{\omega_2}$.

В работе Н. П. Корнейчука [17] для классов $B_r * H^\omega$ с выпуклым вверх ω были найдены точные значения величин $E_n(B_r * H^\omega)_{C(\mathbb{T})}$. В работе [18] первым из авторов эти результаты были обобщены на случай классов сверток произвольного CVD-ядра с функциями из H^ω. Сформулируем полученные в [18] результаты.

Определим функцию $f_{n,\omega}$ следующим образом. Положим для $x \in [0, \pi/(2n)]$

$$f_{n,\omega}(x) = \frac{1}{2}\omega(2x).$$

Для $x \in [\pi/(2n),\ \pi/n]$ положим

$$f_{n,\omega}(x) = \frac{1}{2}\omega(2(\pi/n - x)).$$

Для $x \in [-\pi/n,\ 0]$ положим $f_{n,\omega}(x) = f_{n,\omega}(-x)$, а затем продолжим полученную функцию с периодом $2\pi/n$ на всю числовую ось.

В [17] для $K = B_r$ и в [18] для произвольного CVD-ядра доказано, что если ω – выпуклый вверх модуль непрерывности, то

$$E_n(K * H^{\omega})_{C(\mathbb{T})} = \|K * f_{n,\omega}\|_{C(\mathbb{T})}.$$

Используя этот результат, аналогично тому, как была доказана теорема 1, устанавливаем, что справедлива (ниже через $(K_{1,2} * (H^{\omega_1}, H^{\omega_1}))^H(D)$ обозначено множество решений задачи (2) с $f_1 \in K_1 * H^{\omega_1}$ и $f_2 \in K_2 * H^{\omega_2}$)

Теорема 2. *Для любых CVD-ядер $K_0(t), K_1(t), K_2(t)$ и любых выпуклых вверх модулей непрерывности ω_0, ω_1, ω_2 справедливы соотношения*

$$E\left((K_0 * H^{\omega_0})^H(B), W_n^{eq}\right)_{C(B)} = E\left((K_0 * H^{\omega_0})^H(B), \mathcal{P}_{n-1}^2\right)_{C(B)} =$$

$$= \|K_0 * f_{n,\,\omega_0}\|_{C(\mathbb{T})},$$

$$E\left((K_{1,2} * (H^{\omega_1}, H^{\omega_2}))^H(D), W_n^{eq}\right)_{C(D)} =$$

$$= E\left((K_{1,2} * (H^{\omega_1}, H^{\omega_2}))^H(D), \mathcal{P}_{n-1}^2\right)_{C(D)} =$$

$$= \max\left\{\|K_1 * f_{n,\,\omega_1}\|_{C(\mathbb{T})}, \|K_2 * f_{n,\,\omega_2}\|_{C(\mathbb{T})}\right\}.$$

1. *Осколков К.И.* Линейные и нелинейные методы рельефной аппроксимации (Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа). — М.: АФЦ, 1999. — С. 165 – 195.
2. *Davison M.E., Grunbaum F.A.* Tomographic reconstruction with arbitrary directions // Comm. Pure Appl. Math. — 1981. — **34**. — P. 77 – 120.
3. *Majorov V.E.* On best approximation by ridge functions // Preprint. Department of Mathematics, Technion, Haifa, Israel, 1997.
4. *Majorov V.E.* On best approximation by ridge functions // Preprint. Department of Mathematics, Technion, Haifa, Israel, January 4,1998.
5. *Бабенко В.Ф., Левченко Д.А.* Равнораспределенная рельефная аппроксимация некоторых классов гармонических функций // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, №10. — С. 1427 – 1432.
6. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения. — М., 1976. — 320 с.

7. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1946. — **10**, №3. — С. 207 – 256.

8. *Ахиезер Н.И., Крейн М.Г.* О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций // Докл. АН СССР. — 1937. — **15**. — С. 107 – 112.

9. *Favard J.* Application de la formule sommatoire d'Eulerala demonstration de quelques proprietes des integrates des fonctions periodqiues ou presque-periodiques // Matematisk Tidskrift, Kobenhavn. B. H. — 1936. — **4**. — P. 81 – 94.

10. *Favard J.* Sur ies meilleurs procedes d'approximation de certains classes de fonctions par des polynomes trigonometriques // Bull. deSci. Math. — 1937. — **61**, № 1. — P. 209 – 224, 243 – 256.

11. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную ($0 < s < 1$) // Изв. АН СССР, Сер. матем. — 1953. — **17**. — С. 135 – 162.

12. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций // Изв. АН СССР, Сер. матем. — 1959. — **23**. — С. 933 – 950.

13. *Дзядык В.К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Матем. заметки. — 1974. — **16**, №5. — С. 691 – 701.

14. *Nagy B.* Uber gewisse Extermalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen // I. Periodiescher Fall, Berichte der math.- phys. Kl. Akademie d. Wiss. zu Leipzig. — 1938. — **90**. — P. 103 – 134.

15. *Бабенко В.Ф.* Приближение классов сверток // Сибирский математический журнал. — 1987. — **28**, №5. — С. 6 – 21.

16. *Pinkus A.* On n-widths on periodic functions // J. Anal. Math. — 1979. — **35**. — P. 209 – 235.

17. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. — 1971. — **35**, №1. — С. 93 – 124.

18. *Бабенко В.Ф.* Наилучшие приближения классов функций, задаваемых с помощью модуля непрерывности // Укр. мат. журн. — 1992. — **44**, №5. — С. 579 – 589.