Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 14, № 1, 90–102

УДК 517.54 + 517.12

В. А. Войтович

(*Інститут математики НАН України, Київ*)

viktorvojtovich@gmail.com

Наближення класів цілих функцій поліномами найкращого середньоквадратичного наближення

Присвячено 70-річчю професора Юрія Борисовича Зелінського

Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближень поліномами найкращого середньоквадратичного наближення на класах 2π–періодичних функцій $C^{\psi}_{\overline{\beta},s}$, $1 \le s \le \infty$, та $C^{\psi}_{\overline{\beta}} H_{\omega}$, що задаються мультиплікаторами $\psi(k)$ і зсувами по аргументу β_k за умови, що послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше, ніж будь-яка геометрична прогресія (у цьому випадку функції із зазначених класів допускають регулярне продовження на всю комплексну площину).

We find asymptotic equality for the top limits of approaching by the polynomials of best mean approximation on classes of 2π–periodic functions $C^{\psi}_{\overline{\beta},s}$, $1 \le s \le \infty$, and $C^{\psi}_{\overline{\beta}} H_{\omega}$, that are set by multipliers $\psi(k)$ and by shifts forward an argument β_k on condition that sequences $\psi(k)$ fall to the zero more quickly, than any geometrical progression (in this case functions from the noted classes assume regular extension upon the whole complex plane).

Нехай L_s, $1 \leqslant s < \infty$, — простір сумовних на $(0, 2\pi)$ в s-му степені 2π-періодичних функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_s = \Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^s \, dt \Big)^{1/s}$, L_∞ — простір вимірних і істотно обмежених 2π-періодичних функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|$, C — простір неперервних 2π-періодичних функцій $f(t)$, в якому норма задається рівністю $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$.

Нехай f — 2π-періодична, сумовна на $[0, 2\pi)$ функція ($f \in L_1$) і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x)$$

є її рядом Фур'є. Якщо послідовності $\psi = \psi(k)$ і $\overline{\beta} = \beta_k$, $k \in \mathbb{N}$, дійсних чисел такі, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta_k \pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta_k \pi}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L_1$, то її називають $(\psi, \overline{\beta})$–похідною функції f і позначають через $f_{\overline{\beta}}^{\psi}$, при цьому кажуть, що f належить множині $L_{\overline{\beta}}^{\psi}$. Якщо $f \in L_{\overline{\beta}}^{\psi}$ і $f_{\overline{\beta}}^{\psi} \in \mathfrak{N} \subset L_1$, то вважають, що $f \in L_{\overline{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$. У випадку, коли $\beta_k \equiv \beta$ класи $L_{\overline{\beta}}^{\psi}$ співпадають з класами L_{β}^{ψ},а класи $L_{\overline{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ співпадають з класами $L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$ відповідно. Покладемо далі $C_{\overline{\beta}}^{\psi} = C \bigcap L_{\overline{\beta}}^{\psi}$ і $C_{\overline{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N} = C \bigcap L_{\overline{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$.

Множини $L_{\overline{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ та $C_{\overline{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ введено О.І. Степанцем [1]. В роботі в якості множин $\mathfrak{N}$ виступатимуть множини

$$U_s^0 = \left\{ \varphi \in L_s : \|\varphi\|_s \le 1, \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0 \right\}, \ 1 \le s \le \infty,$$

а також

$$H_\omega = \{\varphi \in C : \omega(\varphi; t) \le \omega(t)\}, \ H_{\omega_1} = \{\varphi \in L_1 : \omega_1(\varphi; t) \le \omega(t)\},$$

де $\omega(\varphi; t)$ і $\omega_1(\varphi; t)$ — модулі неперервності функції φ в просторах C і L_1 відповідно, а $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності. Для зручності класи $C_{\overline{\beta}}^{\psi} U_s^0$ позначають через $C_{\overline{\beta}, s}^{\psi}$.

При $\psi(k) = k^{-r}$, $\beta_k \equiv r$, $r \in \mathbb{N}$, класи $C_{\overline{\beta}, \infty}^{\psi}$ є відомими класами W_∞^r 2π-періодичних функцій f, що мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно і r-та похідна яких майже скрізь обмежена одиницею (див. §§1.4–1.9 в [1]). У випадку, коли $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$,

$r > 0$, класи $L^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$ і $C^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$ є класами узагальнених інтегралів Пуассона і позначаються через $L^{\alpha,r}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$ і $C^{\alpha,r}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$ відповідно

Якщо послідовності ψ і $\overline{\beta}$ такі, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos(kt+\frac{\pi\beta_k}{2})$ є рядом Фур'є деякої сумовної функції $\mathcal{D}_{\psi,\overline{\beta}}(t)$, то для будь-якої функції f з множини $C^{\psi}_{\overline{\beta}}$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ справедлива рівність [1, с. 144]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\overline{\beta}}(x+t)\mathcal{D}_{\psi,\overline{\beta}}(t)dt. \tag{1}$$

Позначимо через $\mathcal{D}_0$ множину послідовностей $\psi(k) > 0$, $k \in \mathbb{N}$, для яких виконується умова

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0. \tag{2}$$

Прикладом послідовностей, що задовольняють умову $\mathcal{D}_0$ є, наприклад, послідовності $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 1$. Відомо (див., наприклад, [1, с. 139–141]), що класи $C^{\psi}_{\overline{\beta}}$, які задаються послідовностями $\psi \in \mathcal{D}_0$, складаються з функцій, що допускають регулярне продовження у всю комплексну площину, тобто з цілих функцій.

Нехай $f \in C$. Розглянемо рівномірне розбиття відрізка $[-\pi,\pi]$ системою точок $x_i = \frac{2\pi i}{N}$, де $i = 0, 1, \ldots, N-1$, де N — довільне натуральне число.

Розглянемо наступну задачу: серед всіх тригонометричних поліномів $T_{n-1}(x)$ порядку не вище $n-1$, знайти той, для якого сума

$$\sum_{i=1}^{N}|f(x) - T_{n-1}(x)|^2 \tag{3}$$

мала б найменше значення, при $N \geq 2n-1$.

Величину (3) мінімізує тригонометричний поліном $T^N_{n-1}(f;x)$, який записується наступним чином (див., наприклад, [2]):

$$T^N_{n-1}(f;x) = \frac{a^N_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(a^N_k\cos kx + b^N_k\sin kx), \tag{4}$$

коефіцієнти якого виражаються формулами

$$a_k^N = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j^N) \cos kx_j^N, \ k = 0, 1, ..., N-1, \tag{5}$$

$$b_k^N = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j^N) \sin kx_j^N, \ k = 1, 2, ..., N-1. \tag{6}$$

Поліном $T_{n-1}^N(f;x)$ називають поліномом найкращого середньоквадратичного наближення функцій f в системі точок x_i^N, $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

При $N = 2n-1$ поліном $T_{n-1}^N(f;x)$ стає інтерполяційним тригонометричним поліномом $n-1$–го порядку з рівновіддаленими вузлами інтерполяції. Далі, при $N = 2n$, він перетворюється в поліном найкращого рівномірного наближення для $f(x)$ в системі точок $\frac{\nu\pi}{n}$, $\nu = 1, 2, \ldots, 2n$. Нарешті, покладаючи $N = m(2n-1)$, при $m \to \infty$ з (4) ми одержимо суму Фур'є порядку $n-1$ для функції $f(x)$.

Апроксимативні властивості поліномів $T_{n-1}^N(f;x)$ досліджувалися у роботах [2–5].

Для довільної $f \in C$ покладемо

$$\rho_n^N(f;x) = f(x) - T_{n-1}^N(f;x). \tag{7}$$

Для фіксованої множини $\mathfrak{N}$ простору C, інваріантної відносно зсуву аргумента, розглянемо величини

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n; x) = \sup_{f \in \mathfrak{N}} |f(x) - U_n(f;x)|, \tag{8}$$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n)_X = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(x) - U_n(f;x)\|_X. \tag{9}$$

де X є простором C або $L_s, 1 \le s \le \infty$, $x \in \mathbb{R}$, а U_n — деякий лінійний метод наближення.

Розглянемо задачу про знаходження асимптотичних рівностей для величин (8) та (9), на класах $(\psi, \overline{\beta})$–диференційовних функцій, що породжуються послідовностями $\psi \in \mathcal{D}_0$, коли в ролі U_n виступають поліноми $T_{n-1}^N(f;x)$.

Надалі при оцінюванні (8) або (9) під символом $O(1)$ будемо розуміти величину, що є рівномірно обмеженою відносно усіх об'єктів, що стоять у дужках у лівій частині (8) або (9).

Як було сказано вище, інтерполяційний тригонометричний поліном з рівновіддаленими вузлами інтерполяції є частинним випадком полінома $T^N_{n-1}(f;x)$ при $N = 2n-1$. У роботі [6] було знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах $C^{\psi}_{\bar{\beta},s}$, $1 \le s \le \infty$, і $C^{\psi}_{\bar{\beta}} H_{\omega}$ при $n \to \infty$:
Нехай $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $1 \le s \le \infty$ і $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді для будь–якого $x \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$ виконуються рівності

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},s}; \widetilde{S}_{n-1}; x) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\Big(\|\cos t\|_{s'}\psi(n) + O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k)\Big), \tag{10}$$

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta}} H_{\omega}; \widetilde{S}_{n-1}; x) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\bigg(\psi(n)\theta_{\omega}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\Big(\frac{2t}{n}\Big)\sin t\,dt + O(1)\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k)\bigg), \tag{11}$$

де $s' = \frac{s}{s-1}$, $\theta_{\omega} = \theta_{\omega}(n) \in [\frac{2}{3}, 1]$, причому $\theta_{\omega} = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності.

Оскільки на розглядуваних нами класах було встановлено асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами, тобто для поліномів T^N_{n-1} при $N = 2n-1$, то ми розглядатимемо лише випадок $N > 2n-1$.

Метою даної роботи є знаходження асимптотичних при $n \to \infty$ рівностей для величин $\mathcal{E}^N_n(C^{\psi}_{\bar{\beta},s}; x)$, $1 \le s \le \infty$, і $\mathcal{E}^N_n(C^{\psi}_{\bar{\beta}} H_{\omega}; x)$ при $n \in \mathbb{N}$, $N > 2n-1$, а також $\mathcal{E}^N_n(C^{\psi}_{\bar{\beta},1})_{L_s}$, $1 \le s \le \infty$, і $\mathcal{E}_{n,p}(C^{\psi}_{\bar{\beta}} H_{\omega_1})_{L_1}$ при $n \in \mathbb{N}$, $N > 2n-1$, у випадку, коли функціональні класи $C^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$ породжуються послідовностями ψ, які задовольняють умову $\mathcal{D}_0$.

Перед тим, як перейти до основних результатів, розглянемо допоміжні леми.

Лема 1. *Нехай $a_k(f)$ і $b_k(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції f, а $a^N_k(f)$ і $b^N_k(f)$ — коефіцієнти полінома $T^N_{n-1}(x)$ функції f по системі точок x^N_i, $i = 0, 1, \ldots, N-1$. Якщо ряд Фур'є функції f збігається у точках x^N_i до значень $f(x^N_i)$, тоді справедливі рівності*

$$a^N_k = a_k + \sum_{m=1}^{\infty} a_{mN+k} + a_{mN-k}, k = 0, 1, \ldots, \tag{12}$$

$$b_k^N = b_k + \sum_{m=1}^{\infty} b_{mN+k} - b_{mN-k}, k = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Доведення. Поклавши $c_k^N = a_k^N - ib_k^N$, отримаємо

$$c_k^N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j^N) e^{-kix_j^N},\ k = 0, 1, ..., N-1. \tag{14}$$

Оскільки ряд Фур'є функції f збігається у точках x_i^N до значень $f(x_i^N)$, то в силу (14) маємо:

$$Nc_k^N = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x_j^N} e^{-kix_j^N} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \sum_{j=0}^{N-1} e^{(\nu-k)ix_j^N}, \tag{15}$$

де c_k — комплексні коефіцієнти Фур'є функції f.

Легко бачити, що має місце рівність

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{(\nu-k)ix_j^N} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{(\nu-k)i\frac{2\pi}{N}j} = \frac{1 - e^{i(\nu-k)2\pi}}{1 - e^{\frac{i(\nu-k)2\pi}{N}}} =$$

$$= \begin{cases} 0, & (\nu - k) \neq Nm, m \in \mathbb{Z}, \\ N, & (\nu - k) = Nm, m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{16}$$

З рівностей (14 — 16) отримуємо

$$c_k^N = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{k+mN}. \tag{17}$$

Оскільки $c_k = a_k - ib_k$ та $c_k^N = a_k^N - ib_k^N$, то з рівності (17) випливають рівності (12) та (13). Лему доведено.

Лема 2. *Нехай* $\psi(k) > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$, $\beta_k \in \mathbb{R}$. *Тоді для довільної функції* $f \in C_{\beta}^{\psi}$ *в кожній точці* $x \in \mathbb{R}$ *справедлива рівність*

$$f(x) - T_{n-1}^N(f;x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta_n(t+x) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\pi\beta_k}{2}\right) dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\delta_n(t+x)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=mN-n+1}^{mN+n-1}\psi(k)\cos\left(kt+mNx+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)dt, \qquad (18)$$

де $\delta_n(\tau) = f^{\psi}_{\beta}(\tau) - t_{n-1}(\tau)$, $t_{n-1}(\tau)$ *— довільний тригонометричний поліном порядку, не вищого ніж* $n-1$.

Доведення. Виходячи з умови $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$ та з рівності (1), коефіцієнти Фур'є a_k та b_k функції $f \in C^{\psi}_{\beta}$ задаються співвідношеннями

$$a_k = \frac{\psi(k)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t)\cos\left(kt+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)dt, \qquad (19)$$

$$b_k = \frac{\psi(k)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t)\sin\left(kt+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)dt. \qquad (20)$$

Об'єднавши формули (4), (12), (13) і (19), (20), отримуємо

$$T^N_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t+x)\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)\cos\left(kt+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t+x)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=mN-n+1}^{mN+n-1}\psi(k)\cos\left(kt+nNx+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)dt. \qquad (21)$$

Використовуючи (1) та (21), можемо записати:

$$f(x) - T^N_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t+x)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t+x)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=mN-n+1}^{mN+n-1}\psi(k)\cos\left(kt+mNx+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)dt. \qquad (22)$$

Взявши до уваги, що функції

$$\Phi_1(t) = \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)$$

та

$$\Phi_2(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=mN-n+1}^{mN+n-1} \psi(k) \cos\left(kt + mNx + \frac{\pi\beta_k}{2}\right)$$

ортогональні будь-якому тригонометричному поліному t_{n-1} порядку не вищого ніж $n-1$, отримуємо (18). Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $n, N \in \mathbb{N}$, $N > 2n-1$, $1 \le s \le \infty$, *і* $\omega(t)$ *— довільний модуль неперервності. Тоді для довільного* $x \in \mathbb{R}$ *при* $n \to \infty$ *виконуються рівності*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s}; T^N_{n-1}; x) = \frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi} \psi(n) + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k), \tag{23}$$

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta} H_\omega; T^N_{n-1}; x) = \frac{2\theta_\omega}{\pi} \psi(n) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + O(1)\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k), \tag{24}$$

де $\theta_\omega = \theta_\omega(n) \in [\frac{2}{3}, 1]$, *причому* $\theta_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності.*

Доведення. Розглянемо другий доданок у правій частині рівності (18). Беручи до уваги відому нерівність

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) K(t) dt \le \|\varphi\|_s \|K\|_{s'}, \tag{25}$$

$$\varphi \in L_s, \quad K \in L_{s'}, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1,\ 1 \le s \le \infty,$$

(див., наприклад, [7, с. 391]), отримаємо наступну оцінку:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta_n(t+x) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=mN-n+1}^{mN+n-1} \psi(k) \cos\left(kt + mNx + \frac{\pi\beta_k}{2}\right) dt \right| \le$$

$$\le \left\| \delta_n(t+x) \right\|_s \left\| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=mN-n+1}^{mN+n-1} \psi(k) \cos\left(kt + mNx + \frac{\pi\beta_k}{2}\right) \right\|_{s'} \le$$

$$\leq E_n(f^{\psi}_{\beta})_s \left\| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=mN-n+1}^{mN+n-1} \psi(k) \right\|_{s'} \leq E_n(f^{\psi}_{\beta})_s (2\pi)^{1/s} \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) dt, \tag{26}$$

де $E_n(\tau) = \inf\limits_{t_n} \|\tau(x) - t_n(x)\|_s$ — найкраще наближення функції тригонометричними поліномами порядку не вище за n у просторі L_s.

Згідно з лемою 2 і оцінкою (26) для довільної $f \in C^{\psi}_{\beta,s}, \beta_k \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathcal{D}_0$, у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ має місце рівність

$$\rho^N_n(f;x) = \rho_n(f;x) + O(1)\, E_n(f^{\psi}_{\beta})_C \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k), \quad 1 \leq s \leq \infty, \tag{27}$$

де $\rho_n(f;x) = f(x) - S_{n-1}(f;x)$.

Розглянувши верхні межі від модулів обох частин рівності (27) по класу $C^{\psi}_{\beta,s}$, отримуємо:

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s}; T^N_{n-1}; x) = \mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s}; S_{n-1}; x) + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k), \tag{28}$$

де S_{n-1} — частинні суми Фур'є функції f.

У роботі [8] показано, що для довільних $\psi \in \mathcal{D}_0,\ \beta_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq s \leq \infty$ при $n \to \infty$ виконується асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s}; S_{n-1}; x) = \frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi} \psi(n) + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k). \tag{29}$$

Об'єднавши формули (28) та (29), одержимо (23).

Розглянувши верхні межі від модулів обох частин рівності (27) по класу $C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}$ та скориставшись нерівністю Джексона (див., наприклад, [9, с. 61], отримаємо асимптотичну рівність

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}; T^N_{n-1}; x) = \mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}; S_{n-1}; x) + O(1)\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k). \tag{30}$$

У роботі [1, с. 295] показано, що для довільних $\psi \in \mathcal{D}_0,\ \beta_k \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$ виконуються рівності

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}; S_{n-1}; x) = \frac{4\theta_{\omega}}{\pi} \psi(n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t dt + O(1)\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k). \tag{31}$$

З (30) та (31) випливає (32). Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $n, N \in \mathbb{N}$, $N > 2n-1$, $1 \le s \le \infty$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\overline{\beta},1}; T^N_{n-1})_{L_s} = \frac{\|\cos t\|_s}{\pi}\psi(n) + O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k). \qquad (32)$$

Доведення. Нехай $f \in C^{\psi}_{\overline{\beta},1}$, де $\psi \in \mathcal{D}_0$. Тоді на підставі рівності (27) при $X = L_1$ та із врахуванням відомої нерівності

$$\left\| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)K(t)dt \right\|_s \le \|\varphi\|_1 \|K\|_s, \quad \varphi \in L_1, \quad K \in L_s,\ 1 \le s \le \infty, \quad (33)$$

(див., наприклад, [7, с. 43]), отримаємо

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\overline{\beta},1}; T^N_{n-1})_{L_s} = \mathcal{E}(C^{\psi}_{\overline{\beta},1}; S_{n-1})_{L_s} + O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k). \qquad (34)$$

В [10] показано, що для довільних $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $1 \le s \le \infty$ при $n \to \infty$, виконується асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\overline{\beta},1}; S_{n-1})_{L_s} = \frac{\|\cos t\|_s}{\pi}\psi(n) + O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k). \qquad (35)$$

Об'єднавши формули (34) та (35), одержимо (32). Теорему доведено.

Теорема 3. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $n, N \in \mathbb{N}$, $N > 2n-1$, $\omega(t)$ *— довільний фіксований модуль неперервності. Тоді при* $n \to \infty$ *виконується рівність*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\overline{\beta}} H_{\omega_1}; T^N_{n-1})_{L_1} = \frac{2\theta^{(1)}_{\omega}}{\pi}\psi(n)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t dt + O(1)\omega \sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k), \qquad (36)$$

де $\theta^{(1)}_{\omega} = \theta^{(1)}_{\omega}(n) \in [\frac{1}{2}, 1]$, *причому* $\theta^{(1)}_{\omega} = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності.*

Доведення. Нехай $f \in C^{\psi}_{\bar{\beta}} H_{\omega_1}$, де $\psi \in \mathcal{D}_0$. Тоді внаслідок (27), при $X = L_1$ та з урахуванням нерівності Джексона в просторі L_1 (див., наприклад, [9, с. 61]), отримуємо:

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta}} H_{\omega_1}; T^N_{n-1})_{L_1} = \mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta}} H_{\omega_1}; S_{n-1})_{L_1} + O(1)\omega\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k). \quad (37)$$

У роботі [1, с. 295] показано, що для довільних $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta}} H_{\omega_1}; S_{n-1})_{L_s} =$$

$$= \frac{2\theta^{(1)}_{\omega}}{\pi p} \psi(n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t dt + O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k). \quad (38)$$

З формул (37) та (38) випливає (36). Теорему доведено.

Взявши до уваги, що при $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$ для довільних $r > 1$, $\alpha > 0$ має місце оцінка

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) = O(1)\left(1 + \frac{1}{\alpha r (n+1)^{r-1}}\right) e^{-\alpha (n+1)^r},$$

одержуємо наслідки з теорем 1 – 3.

Наслідок 1. *Нехай $\alpha > 0$, $r > 1$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $n, N \in \mathbb{N}$, $N > 2n - 1$, $1 \le s \le \infty$, і $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді для довільного $x \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$ виконуються рівності*

$$\mathcal{E}(C^{\alpha,r}_{\bar{\beta},s}; T^N_{n-1}; x) =$$

$$= e^{-\alpha n^r} \left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi} + O(1)\left(1 + \frac{1}{\alpha r (n+1)^{r-1}}\right) \frac{e^{-\alpha (n+1)^r}}{e^{-\alpha n^r}} \right), \quad (39)$$

$$\mathcal{E}(C^{\alpha,r}_{\bar{\beta}} H_{\omega}; T^N_{n-1}; x) = e^{-\alpha n^r} \left(\frac{2\theta_{\omega}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + \right.$$

$$\left. + O(1)\omega\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{\alpha r (n+1)^{r-1}}\right) \frac{e^{-\alpha (n+1)^r}}{e^{-\alpha n^r}} \right), \quad (40)$$

де $\theta_{\omega} = \theta_{\omega}(n) \in [\frac{2}{3}, 1]$, причому $\theta_{\omega} = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності.

Наслідок 2. *Нехай* $\alpha > 0$, $r > 1$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $n, N \in \mathbb{N}$, $N > 2n-1$, $1 \le s \le \infty$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(C^{\alpha,r}_{\overline{\beta},1}; T^N_{n-1})_{L_s} =$$

$$= e^{-\alpha n^r}\left(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi} + O(1)\left(1 + \frac{1}{\alpha r(n+1)^{r-1}}\right)\frac{e^{-\alpha(n+1)^r}}{e^{-\alpha n^r}}\right). \qquad (41)$$

Наслідок 3. *Нехай* $\alpha > 0$, $r > 1$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $n, N \in \mathbb{N}$, $N > 2n-1$, $\omega(t)$ *— довільний фіксований модуль неперервності. Тоді при* $n \to \infty$ *виконується рівність*

$$\mathcal{E}(C^{\alpha,r}_{\overline{\beta}} H_{\omega_1}; T^N_{n-1})_{L_1} = e^{-\alpha n^r}\left(\frac{2\theta^{(1)}_\omega}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t dt + \right.$$

$$\left. + O(1)\omega\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{\alpha r(n+1)^{r-1}}\right)\frac{e^{-\alpha(n+1)^r}}{e^{-\alpha n^r}}\right), \qquad (42)$$

де $\theta^{(1)}_\omega = \theta^{(1)}_\omega(n) \in [\frac{1}{2}, 1]$, *причому* $\theta^{(1)}_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності.*

Література

[1] *Степанец А. И.* Методы теории приближений. В 2-х ч. — Праці Інституту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2002. — **40**. — Ч. 1. — 468 с.

[2] *Калашников М. Д.* Про деякі методи наближення неперервних функцій тригонометричними поліномами // Доповіді АН УРСР — 1956. — № 2. — С. 113 – 117.

[3] *Рубан П. И., Красильников К. В.* Об одном методе приближения тригонометрическими полиномами функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. высш. учебн. завед. — 1960. — **1**, № 14. — С. 194 – 197.

[4] *Павловский Н. М.* Об одном методе приближения дифференциируемых функций тригонометрическими многочленами // Изв. высш. учебн. завед. — 1964. — **4**, № 41. — С. 119 – 125.

[5] *Павловский Н. М.* Об одном методе приближения периодических функций тригонометрическими многочленами // Изв. высш. учебн. завед. — 1966. — **4**, № 53. — С. 66 – 73.

[6] *Сердюк А. С., Войтович В. А.* Наближення на класах цілих функцій інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2010. — **7**, №1. — С. 274 – 297.

[7] *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 423 с.

[8] *Сердюк А. С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 8. — С. 1079 — 1096.

[9] *Степанец А. И.* Методы теории приближений. В 2-х ч. — Праці Інституту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2002. — **40.** — Ч. 2. — 468 с.

[10] *Сердюк А. С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в метриці простору L_p // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 10. — С. 1395 – 1408.