Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 14, № 1, 52–60

УДК 517.5

М. А. Веремій[1]***, М. В. Гаєвський***[2]

[1](*Східноевропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк*)

[2](*Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Кропивницький*)

[1] **koliaveremii@gmail.com**

Швидкість збіжності групи φ-відхилень на класі аналітичних функцій H_∞^ψ

Присвячено 70-річчю професора Юрія Борисовича Зелінського

Отримано оцінки збіжності груп φ-відхилень та φ-середніх для λ-методів підсумовування рядів Тейлора функцій з класу H_∞^ψ, де послідовність ψ задовольняє умови Сідона–Теляковського.

We obtain estimates of convergence for groups φ-deviations and φ-averages of λ-methods to Taylor's series summation of functions from the class H_∞^ψ, where the sequence ψ satisfies conditions of the Sidon–Telyakovskii.

Нехай $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$;

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, z \in D, \tag{1}$$

є розкладом у ряд Тейлора–Маклорена аналітичної у крузі D функції $f(z)$; $S_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, z \in D$, є частинною сумою ряду Тейлора функції f.

Через H_∞ позначимо простір аналітичних в одиничному крузі функцій з нормою: $\|f\| = \|f\|_{H_\infty} = \|f\|_\infty = \sup_{z\in D} |f(z)| < \infty$.

Нехай P_n — множина алгебраїчних многочленів степеня не вище n; $E_n(f) := E_n(f)_\infty = \inf_{p_n \in P_n} \|f(z) - p_n(z)\|_\infty$ — найкраще наближення аналітичної функції алгебраїчними многочленами порядку не вище n, $\rho_n(f,z) := f(z) - S_n(f,z)$.

Означимо клас функцій H^ψ_∞. Розглянемо послідовність комплексних чисел $\psi = \{\psi(k)\}_{k=0}^\infty$ таку, що $|\psi(k)| \neq 0$, $k \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ і $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(k) = 0$. Очевидно, що для функції $f \in H_\infty$ з рядом Тейлора (1), сума ряду $f^\psi = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\psi(k)} a_k z^k, z \in D$, є аналітичною функцією і $\|f^\psi\| \le 1$. Тоді $H^\psi_\infty := \{f \in H_\infty : \|f^\psi\| \le 1\}$.

Позначимо через Φ множину неспадних і неперервних на $(0,\infty)$ функцій φ таких, що $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$, $\varphi(u) \le e^{bu}$, при деякому $b > 0$ та для $u \in [0,1]$ справджується нерівність $\varphi(2u) \le a\varphi(u)$, де число $a = a(\varphi) > 0$. Природними елементами множини Φ є, наприклад, $\varphi(u) = u^p, p > 0$, $\varphi(u) = e^u - 1$.

В даній роботі досліджуються такі величини

$$H^\varphi_n(f; z) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \varphi(|\rho_k(f; z)|), \tag{2}$$

$$H^\varphi_n(f; \lambda; z) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \varphi(|\rho_k(f; z)|), \tag{3}$$

де $\varphi \in \Phi$, а $\lambda = \{\lambda_k\}$ — задана послідовність додатних чисел.

Зазначимо, що величини типу (2), коли $\varphi(u) = u$, у просторі неперервних функцій вперше були розглянуті у роботі угорських математиків Г. Алєксіча та Д. Краліка [1]. Згодом почали досліджувати функціонали типу (3). Дослідження наведених функціоналів відіграє провідну роль у теорії сильного підсумовування рядів (див. бібліографію та результати в [2]).

Множина функцій Φ вперше була введена В. Тотіком [3], а саме для величини (2) ним встановлено таке твердження [4]:

Теорема А. *Для довільної 2π-періодичної неперервної функції f, $x \in [-\pi, \pi]$, нерівність*

$$H^\varphi_n(f; z) \le K\varphi(E_n(f))$$

виконується тоді і тільки тоді, коли існує така стала A, що

$$\varphi(t) \le e^{At},\ t \in (0, \infty),\ \text{та}\ \varphi(2t) \le A\varphi(t),\ t \in (0, 1).$$

Зараз і далі, під символом K будемо розуміти деякі абсолютні сталі, можливо, неоднакові у різних формулах.

Зокрема, на множині функцій H_∞^ψ при різних умовах на послідовність ψ величини (2) та (3) досліджувалися у роботах [5, 6].

Кажуть, що послідовність γ_k є *квазіопуклою*, якщо $\sum_{k=0}^\infty (k+1)|\triangle^2\gamma_k| < \infty$, $\triangle^2\gamma_k := \gamma_k - 2\gamma_{k+1} + \gamma_{k+2}$, при кожному $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. В [6] отримано такі твердження для квазіопуклих послідовностей ψ:

Теорема B. *Нехай $\varphi \in \Phi$, $\psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k)$, причому $\{\psi_i(k)\}$, $i = 1, 2$, є квазіопуклими, спадними до нуля послідовностями. Тоді для довільної функції $f \in H_\infty^\psi$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справджується нерівність*

$$H_n^\varphi(f; z) \le K\varphi(R_n(\psi)E_n(f^\psi)),$$

де $R_n(\psi) = \sum_{k=n+1}^\infty (k+1)|\triangle^2\psi(k)|$, $K = K(\varphi)$ — деяка величина, рівномірно обмежена за n, z та f.

Теорема C. *Нехай $\varphi \in \Phi$, $\psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k)$, причому $\{\psi_i(k)\}$, $i = 1, 2$, є квазіопуклими, спадними до нуля послідовностями, $\lambda = \{\lambda_k\}$ — незростаюча послідовність додатних чисел. Тоді для довільної функції $f \in H_\infty^\psi$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справджується нерівність*

$$H_n^\varphi(f; \lambda; z) \le K\Big(n\lambda_n\varphi(R_n(\psi)E_n(f^\psi)) + \sum_{k=n}^\infty \lambda_k\varphi(R_k(\psi)E_k(f^\psi))\Big),$$

де $K = K(\varphi)$ — деяка величина, рівномірно обмежена за n, z та f.

Метою даної роботи є послаблення умов на послідовність ψ, а саме: будемо вважати, що вона задовольняє умови Сідона–Теляковського [7].

Кажуть, що послідовність ψ *задовольняє умови Сідона–Теляковського*, якщо виконуються наступні умови:

1. $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(k) = 0$;
2. існують числа A_k, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, такі, що послідовність A_k монотонно спадає до нуля, $\sum\limits_{k=0}^\infty A_k < \infty$ та $|\triangle\psi(k)| := |\psi(k) - \psi(k+1)| \le A_k$.

Зокрема, у якості A_k можна взяти $A_k := \sup_{m\ge k} |\triangle\psi(m)|$ (див. [7]).

Розглянемо допоміжну лему, яка буде широко використовуватися надалі.

Лема 1. *Нехай послідовність комплексних чисел* $\{\psi(k) = \psi_1(k) + +i\psi_2(k)\}$, *де* $\psi_1(k)$ *та* $\psi_2(k)$ *задовольняють умови Сідона-Теляковського та* $k_j, j = 1, \ldots, r,$ *— деяка підпослідовність натуральних чисел таких, що* $n < k_1 \ldots < k_j < k_{j+1} \leq \ldots < 2n-1$, $1 \leq j \leq r \leq n$. *Тоді для довільної функції* $f \in H^{\psi}_{\infty}$ *та будь-якого* $0 < p < \infty$ *справедлива нерівність*

$$h^p_{n,r}(f,z) := \sup_{z\in D}\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\rho_{k_j}(f;z)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq KV_n(\psi)E_n(f^{\psi})\Big(\ln\frac{2n}{r} + K_p\Big),$$

де $V_n(\psi) = \sum_{k=n}^{\infty} A_k$, K_p *— деяка стала, що залежить лише від* p.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $p \geq 2$. Позначимо $\Delta_n(f,\theta,t) := \Delta_n(f^{\psi}, p_n, \theta, t) = f^{\psi}(e^{i(t+\theta)}) - p_n(e^{i(t+\theta)})$, де $p_n(e^{i\theta})$ — поліном найкращого наближення порядку не вище n функції $f^{\psi}(e^{i\theta})$.

Оскільки функція $h^p_{n,r}(f,z)$ є субгармонічною, тому за принципом максимуму модуля [8, с. 39] вона прийматиме максимальне значення на колі T. В силу можливості зображення функції $f \in H^{\psi}_{\infty}$ у вигляді згортки [9, с. 210], можемо записати

$$h^p_{n,r}(f,z) = \sup_{z\in D}\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\rho_{k_j}(f;z)|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \mathrm{vraisup}_{\theta}\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_n(f,\theta,t)\sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}\psi(\nu)\cos\nu t\,dt|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Застосувавши до суми під знаком інтегралу перетворення Абеля та використавши нерівності, $|a+b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p), p \geq 1$ та $|a+b|^p \leq \leq \big(|a|^p + |b|^p\big), p \leq 1$, отримаємо

$$h^p_{n,r}(f,z) = \sup_{z\in D}\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\rho_{k_j}(f;z)|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \mathrm{vraisup}_\theta \left(\frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \Big| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_n(f,\theta,t) \times \right.$$

$$\left. \times \Big(\sum_{\nu=k_j+1}^{\infty} \triangle\psi(\nu) D_\nu(t) - \psi(k_j+1) D_{k_j}(t) \Big) dt \Big|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq K \mathrm{vraisup}_\theta \left(\frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \Big| \frac{\psi(k_j+1)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_n(f,\theta,t) D_{k_j}(t) dt \Big|^p \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ K \mathrm{vraisup}_\theta \left(\frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \Big| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_n(f,\theta,t) \sum_{\nu=k_j+1}^{\infty} \triangle\psi(\nu) D_\nu(t) dt \Big|^p \right)^{\frac{1}{p}} :=$$

$$:= K(I_1 + I_2),$$

де $D_k(t)$ — ядро Діріхле.

Враховуючи, що для ядра Діріхле

$$D_k(t) = \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} = \cos\frac{t}{2} \frac{\sin kt}{2\sin\frac{t}{2}} + \frac{\cos kt}{2}$$

справедлива нерівність

$$|D_k(t)| \leq \begin{cases} k + \frac{1}{2}, & \text{коли } |t| \leq \frac{\pi}{k}, \\ \frac{\pi}{|t|}, & \text{коли } \frac{\pi}{k} < |t| \leq \pi, \end{cases}$$

величину I_1 оцінюємо наступним чином:

$$I_1 := K\, \mathrm{vraisup}_\theta \left(\frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \Big| \frac{\psi(k_j+1)}{\pi} \times \right.$$

$$\left. \times \Big\{ \int_{|t|\leq \pi/k_j} + \int_{\pi/k_j < |t| \leq \pi/r} + \int_{\pi/r \leq |t| \leq \pi} \Big\} \Delta_n(f,\theta,t) D_{k_j}(t) dt \Big|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq K \Big(\frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} |\psi(k_j+1)|^p E_n^p(f^\psi) \Big)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+K\Big(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\psi(k_j+1)|^p E_n^p(f^{\psi})\int_{\pi/k_j<|t|\le\pi/r}\frac{dt}{|t|^p}\Big)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+K\Big(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\Big|\frac{\psi(k_j+1)}{\pi}\int\limits_{\pi/r\le|t|\le\pi}\Delta_n(f,\theta,t)\big(\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{\sin kt}{2\sin\frac{t}{2}}+\frac{\cos kt}{2}\big)dt\Big|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le K\Big(\max_{n\le k\le 2n}|\psi(k)|E_n(f^{\psi})+\max_{n\le k\le 2n}|\psi(k)|E_n(f^{\psi})\ln\frac{2n}{r}\Big)+$$

$$+K\Big(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\Big|\frac{\psi(k_j+1)}{\pi}\int_{\pi/r\le|t|\le\pi}\cos\frac{t}{2}\,\frac{\Delta_n(f,\theta,t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin k_j t\,dt\Big|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Для оцінки останнього інтегралу розглянемо функцію

$$\varphi_n(t=\begin{cases}\frac{\Delta_n(f,\theta,t)}{2\sin\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}, & \text{коли } \frac{\pi}{r}\le|t|\le\pi,\\ 0, & \text{в іншому випадку },\end{cases}$$

тоді через $\alpha_k=\alpha_k(\varphi)$ позначимо синус-коефіцієнти. Використовуючи теорему Хаусдорфа–Юнга [10, с. 211], отримуємо

$$\text{vraisup}_{\theta}\Big(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\Big|\frac{\psi(k_j+1)}{\pi}\int_{\pi/r\le|t|\le\pi}\cos\frac{t}{2}\,\frac{\Delta_n(f,\theta,t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin k_j t dt\Big|^p\Big)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\text{vraisup}_{\theta}\Big(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\psi(k_j+1)\alpha_{k_j}|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le\max_{n\le k\le 2n}|\psi(k)|\text{vraisup}_{\theta}\Big(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\alpha_{k_j}|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le K\Big(\frac{1}{r}\Big)^{\frac{1}{p}}\max_{n\le k\le 2n}|\psi(k)|\text{vraisup}_{\theta}\|\varphi\|_q,$$

де $\|\varphi\|_q=\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(t)|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$.

Отже,

$$\text{vraisup}_{\theta}\|\varphi\|_q=\text{vraisup}_{\theta}\Big(\int_{\frac{\pi}{r}<|t|\le\pi}|\frac{\Delta_n(f,\theta,t)}{2\sin\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\leq K_p E_n(f^{\psi})\Big(\int_{\frac{\pi}{r}}^{\pi}\frac{dt}{t^q}\Big)^{\frac{1}{q}} = K_p r^{\frac{q-1}{q}} E_n(f^{\psi}).$$

Остаточно маємо таку оцінку величини I_1:

$$I_1 \leq K \max_{n\leq k\leq 2n}|\psi(k)|E_n(f^{\psi})\Big(\ln\frac{2n}{r}+K_p\Big).$$

Перейдемо до оцінювання величини I_2:

$$I_2 := \operatorname{vraisup}_{\theta}\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\Big|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_n(f,\theta,t)\sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}\triangle\psi(\nu)D_{\nu}(t)dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq E_n(f^{\psi})\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}\triangle\psi(\nu)D_{\nu}(t)\Big|dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Оцінюємо інтеграл під знаком суми за схемою роботи [7]:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}\triangle\psi(\nu)D_{\nu}(t)\Big|\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}A_{\nu}\frac{\triangle\psi(\nu)}{A_{\nu}}D_{\nu}(t)\Big|\,dt.$$

Покладемо

$$\Sigma_{\nu} := \sum_{l=0}^{\nu}\frac{\triangle\psi(\nu)}{A_{\nu}}D_{\nu}(t)$$

і виконаємо перетворення Абеля в сумі під інтегралом: $\sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}A_{\nu}\frac{\triangle\psi(\nu)}{A_{\nu}}D_{\nu}(t) = \sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}A_{\nu}(\Sigma_{\nu}-\Sigma_{\nu-1}) = \sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}A_{\nu}\Sigma_{\nu}-$ $-\sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}A_{\nu}\Sigma_{\nu-1} = \sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}A_{\nu}\Sigma_{\nu} - \sum_{\nu=k_j}^{\infty}A_{\nu+1}\Sigma_{\nu} =$ $=\sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}(A_{\nu}-A_{\nu+1})\Sigma_{\nu} - A_{k_j+1}\Sigma_{k_j}$.

Використавши Лему 1 з [7], отримаємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}\triangle\psi(\nu)D_{\nu}(t)\Big|\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}(A_{\nu}-A_{\nu+1})\Sigma_{\nu} - A_{k_j+1}\Sigma_{k_j}\Big|\,dt \leq$$

$$\leq K\sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}(\nu+1)(A_{\nu}-A_{\nu+1}) + (k_j+1)A_{k_j+1} \leq K(V_n(\psi)+nA_n),$$

звідки: $I_2 \le K(V_n(\psi)+nA_n)E_n(f^{\psi})$.

Остаточно з використанням нерівності

$$\psi(n)=\Big|\sum_{\nu=n}^{\infty}\triangle\psi(\nu)\Big|\le\sum_{\nu=n}^{\infty}|\triangle\psi(\nu)|\le V_n(\psi),$$

отримуємо

$$h^p_{n,r}(f,z)=K(V_n(\psi)+nA_n)E_n(f^{\psi})\Big(\ln\frac{2n}{r}+K_p\Big).$$

Твердження леми у випадку $0<p<2$ слідує з доведеного, для цього слід використати наслідок з нерівності Гельдера [11, с. 41], тобто $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\rho_k(f;x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\rho_k(f;x)|^s\right)^{\frac{1}{s}}$, $0<p\le s$.

Лема доведена.

Перейдемо тепер до формування основних результатів.

Теорема 1. *Нехай $\varphi\in\Phi$, $\psi(k)=\psi_1(k)+i\psi_2(k)$, причому $\psi_i(k)$, $i=1,2$ задовольняють умови Сідона–Теляковського. Тоді для довільної функції $f\in H^{\psi}_{\infty}$ та будь-якого $n\in\mathbb{N}$ справджується нерівність*

$$H^{\varphi}_n(f;z)\le K\varphi((V_n(\psi)+nA_n)E_n(f^{\psi})),$$

де $K=K(\varphi)$ — деяка величина рівномірно обмежена по n,z та f.

Теорема 2. *Нехай $\varphi\in\Phi$, $\psi(k)=\psi_1(k)+i\psi_2(k)$, причому $\psi_i(k)$, $i=1,2$, задовольняють умови Сідона–Теляковського, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — незростаюча послідовність додатних чисел. Тоді для довільної функції $f\in H^{\psi}_{\infty}$ та будь-якого $n\in\mathbb{N}$ справджується нерівність*

$$H^{\varphi}_n(f;\lambda;z)\le K\Big(n\lambda_n\varphi((V_n(\psi)+nA_n)(\psi)E_n(f^{\psi}))+$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\varphi((V_k(\psi)+kA_k))E_k(f^{\psi}))\Big),$$

де $K=K(\varphi)$ — деяка рівномірно обмежена величина за n, z та f.

Доведення теорем 1 та 2 повністю співпадає із схемою доведення аналогічних результатів роботи [6].

Наслідок 1. *Нехай $f\in H^{\psi}_{\infty}$ та $\psi(k)=\psi_1(k)+i\psi_2(k)$, причому $\psi_i(k)$, $i=1,2$, задовольняють умови Сідона–Теляковського, тоді має місце співвідношення*

$$\sum_{k=0}^{n}|\rho_k(f;z)|^p\le K_p\sum_{k=0}^{n}E^p_k(f^{\psi}).$$

Наслідок 2. *Нехай* $f \in H_\infty^\psi$ *та* $\psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k)$*, причому* $\psi_i(k)$*,* $i = 1, 2$*, задовольняють умови Сідона–Теляковського, тоді має місце співвідношення*

$$E_{2n}(f) \leq K(V_n(\psi) + nA_n)E_n(f^\psi).$$

Література

[1] *Alexits G., Kralik D.* Über die Approximation mit starken de la Vallee-Poussinschen Mitteln // Acta Math. Hungar. — 1965. — **16**, №1-2. — P. 43 – 49.

[2] *Ласурия Р. А.* Сильная суммируемость рядов Фурье и аппроксимация функций — Сухум: АГУ, 2010. — 260 с.

[3] *Totik V.* On the strong approximation of Fourier series // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1980. — **35**, № 1-2. — P. 151 – 172.

[4] *Totik V.* Notes on Fourier series: strong approximation // J. of Approx. Theory. — 1985. — **43**, № 2. — P. 105 – 111.

[5] *Ласурия Р. А.* Оценки группы φ-отклонений и сильная суммируемость рядов Тейлора функций классов $A^\psi H_\infty(D)$ // Мат. заметки. — 2008. — **83**, № 5. — С. 696 – 704.

[6] *Гаєвський М. В., Задерей П. В.* Оцінки групи φ-відхилень аналітичних функцій // Зб. праць Ін-ту математики НАН України /Теорія наближення функцій та суміжні питання/. — К.: Ін-т математики НАН України, 2015. — **12**, №4. — С. 156 – 166.

[7] *Теляковский С. А.* Об одном достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов // Матем. заметки. — 1973. — **14**, № 3. — С. 317 – 328.

[8] *Привалов И. И.* Субгармонические функции. — М.: ОНТИ, 1937. — 201 с.

[9] *Савчук В. В., Савчук М. В., Чайченко С. О.* Наближення аналітичних функцій сумами Валле Пуссена // Мат. студії. — 2010. — **34**, № 2. — С. 207 – 219.

[10] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: ФМЛ, 1961. — 936 с.

[11] *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. — М.: ИЛ, 1948. — 456 с.